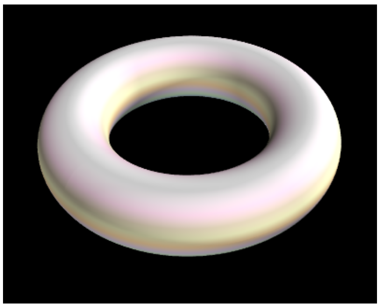
Svijanje torusa

Svijanjem plohe u smjeru njezine normale mogu se dobiti nove plohe s interesantnijim reljefom. Pokazat ćemo nekoliko primjera svijanja torusa. Opisane ideje možemo primijeniti na proizvoljnim plohama.

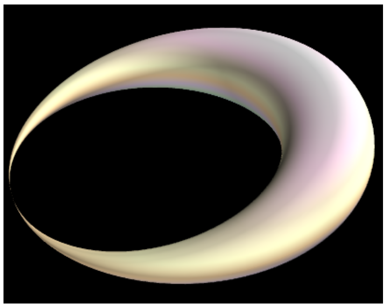
Parametarske jednadžbe torusa glase

$$\begin{aligned} x &= (R + r\cos v)\cos u \\ y &= (R + r\cos v)\sin u \\ z &= r\sin v \end{aligned}$$

pri čemu su $u, v \in [0, 2\pi]$ i $r < R$.



(a) fiksni manji polumjer



(b) varijabilni manji polumjer

Slika 1: Torus

Stavimo li u parametarske jednadžbe torusa varijabilni manji polumjer $r = \sin^2 \frac{u}{2}$, dobivamo plohu s parametarskim jednadžbama

$$\begin{aligned} x &= \left(R + \sin^2 \tfrac{u}{2}\cos v\right)\cos u \\ y &= \left(R + \sin^2 \tfrac{u}{2}\cos v\right)\sin u\,. \\ z &= \sin^2 \tfrac{u}{2}\sin v \end{aligned}$$

Neka je $\mathbf{x}(u,v) = \big((R + r\cos v)\cos u,\ (R + r\cos v)\sin u,\ r\sin v\big)$ parametrizacija torusa. Jedinična normala u proizvoljnoj točki torusa dobiva se po formuli

$$\mathbf{n}(u,v) = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|}$$

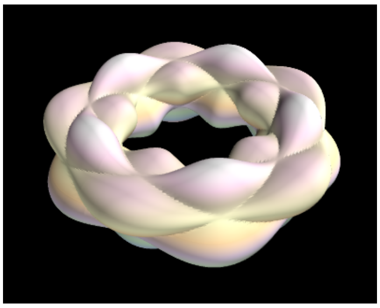
pri čemu su $\mathbf{x}_u$ i $\mathbf{x}_v$ parcijalne derivacije vektorske funkcije $\mathbf{x}$.

Ploha prikazana na slici 2 dobiva se periodičkim svijanjem torusa u smjeru njegove jedinične normale. Njezina parametrizacija glasi

$$\mathbf{y}(u,v) = \mathbf{x}(u,v) + 2 \cdot |\sin 5u + \sin 3v| \cdot \mathbf{n}(u,v).$$

U nastavku dalje navodimo dvije varijante slučajnog svijanja torusa. Neka je $\operatorname{rand}(a,b)$ funkcija koja na slučajni način vraća neki realni broj na segmentu $[a,b]$. Za odabrane $m, n \in \mathbb{N}$ definiramo funkciju

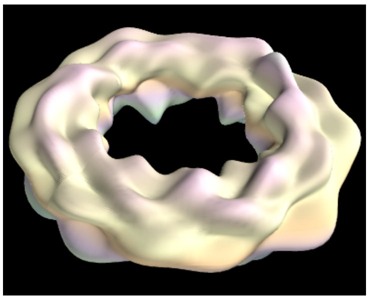
$$f(u,v) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} \operatorname{rand}(-1,1) \cdot \cos\big(iu + 2\pi \cdot \operatorname{rand}(0,1)\big) \cdot \cos\big(jv + 2\pi \cdot \operatorname{rand}(0,1)\big).$$



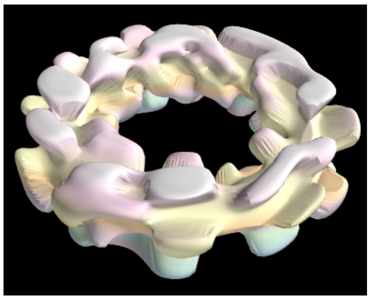
Slika 2: Svijanje torusa

Na kraju za odabrani $h \in \mathbb{R}$ definiramo plohu parametrizacijom

$$\mathbf{r_1}(u, v) = \mathbf{x}(u, v) + h \cdot f(u, v) \cdot \mathbf{n}(u, v).$$



(a) $\mathbf{r_1}(u, v)$



(b) $\mathbf{r_2}(u, v)$

Slika 3: Random svijanje torusa

Na slici 3(a) prikazana je ploha s parametrizacijom r_1 i odabranim parametrima $R = 10$, $r = 3$, $h = 0.2$, $n = 12$, $m = 6$.

Za vektore $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ i $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ definiramo operaciju $*$ formulom

$$\mathbf{u} * \mathbf{v} = \big(u_1 v_1,\ u_2 v_2,\ u_3 v_3\big).$$

Za vektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ i realnu funkciju realne varijable g definiramo $g(\mathbf{u})$ formulom

$$g(\mathbf{u}) = \big(g(u_1),\ g(u_2),\ g(u_3)\big).$$

Na primjer,

- za $g(x) = |x|$ je $|\mathbf{u}| = \big(|u_1|,\ |u_2|,\ |u_3|\big)$
- za $g(x) = \operatorname{arctg} x$ je $\operatorname{arctg} \mathbf{u} = \big(\operatorname{arctg} u_1,\ \operatorname{arctg} u_2,\ \operatorname{arctg} u_3\big)$
- za $g(x) = x^{\frac{2}{3}}$ je $\mathbf{u}^{\frac{2}{3}} = \left(u_1^{\frac{2}{3}},\ u_2^{\frac{2}{3}},\ u_3^{\frac{2}{3}}\right)$

Za odabrani realni broj ε i vektor $\mathbf{v}$ definiramo funkciju skaliranja s formulom

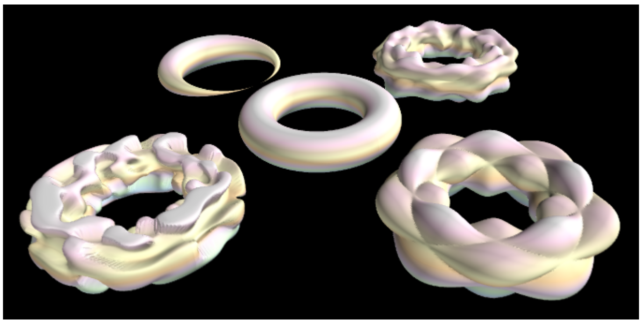
$$s(\mathbf{v}) = \operatorname{sign} \mathbf{v} * \left(\tfrac{2}{\pi} \operatorname{arctg} |\mathbf{v}|\right)^{\varepsilon}.$$

Konačno, definiramo plohu parametrizacijom

$$\mathbf{r}_2(u,v) = \mathbf{x}(u,v) + h \cdot s\big(f(u,v) \cdot \mathbf{n}(u,v)\big).$$

Na slici 3(b) prikazana je ploha s parametrizacijom r_2 i odabranim parametrima $R = 10$, $r = 3$, $h = 1$, $n = 12$, $m = 6$, $\varepsilon = 0.5$.

Konačno, odgovarajućim translacijama možemo sve navedene plohe razmjestiti kako je prikazano na slici 4.



Slika 4: 3D scena s torusima