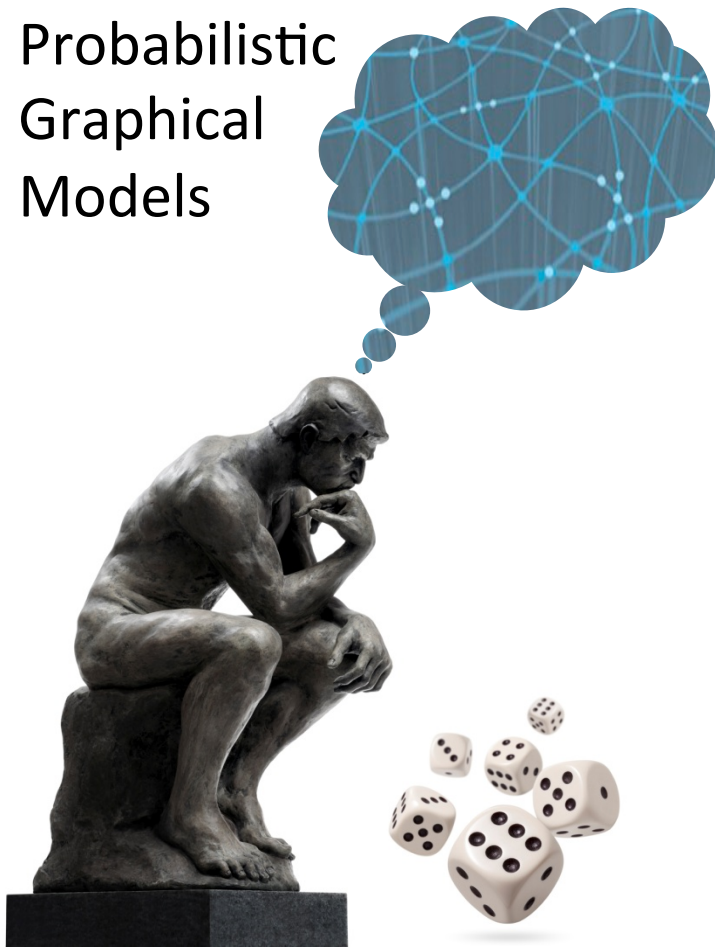


Probabilistic  
Graphical  
Models



---

Introduction

---

# Preliminaries: Factors

# Factors

- A factor  $\phi(\underline{X_1, \dots, X_k})$   
 $\phi : \text{Val}(\underline{X_1, \dots, X_k}) \rightarrow \mathbb{R}$
- Scope =  $\{X_1, \dots, X_k\}$

# Joint Distribution

$P(I, D, G)$

<u>I</u>	<u>D</u>	<u>G</u>	Prob.
$i^0$	$d^0$	$g^1$	0.126
$i^0$	$d^0$	$g^2$	0.168
$i^0$	$d^0$	$g^3$	0.126
$i^0$	$d^1$	$g^1$	0.009
$i^0$	$d^1$	$g^2$	0.045
$i^0$	$d^1$	$g^3$	0.126
$i^1$	$d^0$	$g^1$	0.252
$i^1$	$d^0$	$g^2$	0.0224
$i^1$	$d^0$	$g^3$	0.0056
$i^1$	$d^1$	$g^1$	0.06
$i^1$	$d^1$	$g^2$	0.036
$i^1$	$d^1$	$g^3$	0.024

# Unnormalized measure $P(I, D, g^1)$

Scope =  $\{I, D\}$

$P(I, D, g^1)$

I	D	G	Prob.
$i^0$	$d^0$	$g^1$	0.126
$i^0$	$d^1$	$g^1$	0.009
$i^1$	$d^0$	$g^1$	0.252
$i^1$	$d^1$	$g^1$	0.06

# Conditional Probability Distribution (CPD)

$P(G \mid I, D)$

	$g^1$	$g^2$	$g^3$
$i^0, d^0$	0.3	0.4	0.3
$i^0, d^1$	0.05	0.25	0.7
$i^1, d^0$	0.9	0.08	0.02
$i^1, d^1$	0.5	0.3	0.2

total →

A   B   C

# General factors

Scope = {A, B}

A	B	$\phi$
$a^0$	$b^0$	30
$a^0$	$b^1$	5
$a^1$	$b^0$	1
$a^1$	$b^1$	10

# Factor Product

$g_1(A, B)$

$a^1$	$b^1$	0.5
$a^1$	$b^2$	0.8
$a^2$	$b^1$	0.1
$a^2$	$b^2$	0
$a^3$	$b^1$	0.3
$a^3$	$b^2$	0.9

$g_2(B, C)$

$b^1$	$c^1$	0.5
$b^1$	$c^2$	0.7
$b^2$	$c^1$	0.1
$b^2$	$c^2$	0.2

$A \cdot B \cdot C$

$a^1$	$b^1$	$c^1$	$0.5 \cdot 0.5 = 0.25$
$a^1$	$b^1$	$c^2$	$0.5 \cdot 0.7 = 0.35$
$a^1$	$b^2$	$c^1$	$0.8 \cdot 0.1 = 0.08$
$a^1$	$b^2$	$c^2$	$0.8 \cdot 0.2 = 0.16$
$a^2$	$b^1$	$c^1$	$0.1 \cdot 0.5 = 0.05$
$a^2$	$b^1$	$c^2$	$0.1 \cdot 0.7 = 0.07$
$a^2$	$b^2$	$c^1$	$0 \cdot 0.1 = 0$
$a^2$	$b^2$	$c^2$	$0 \cdot 0.2 = 0$
$a^3$	$b^1$	$c^1$	$0.3 \cdot 0.5 = 0.15$
$a^3$	$b^1$	$c^2$	$0.3 \cdot 0.7 = 0.21$
$a^3$	$b^2$	$c^1$	$0.9 \cdot 0.1 = 0.09$
$a^3$	$b^2$	$c^2$	$0.9 \cdot 0.2 = 0.18$

# Factor Marginalization

Suppose A, B, C

$a^1$	$b^1$	$c^1$	0.25
$a^1$	$b^1$	$c^2$	0.35
$a^1$	$b^2$	$c^1$	0.08
$a^1$	$b^2$	$c^2$	0.16
$a^2$	$b^1$	$c^1$	0.05
$a^2$	$b^1$	$c^2$	0.07
$a^2$	$b^2$	$c^1$	0
$a^2$	$b^2$	$c^2$	0
$a^3$	$b^1$	$c^1$	0.15
$a^3$	$b^1$	$c^2$	0.21
$a^3$	$b^2$	$c^1$	0.09
$a^3$	$b^2$	$c^2$	0.18

A, C

$a^1$	$c^1$	<u>0.33</u>
$a^1$	$c^2$	0.51
$a^2$	$c^1$	0.05
$a^2$	$c^2$	0.07
$a^3$	$c^1$	0.24
$a^3$	$c^2$	0.39



# Factor Reduction

a <sup>1</sup>	b <sup>1</sup>	c <sup>1</sup>	0.25
a <sup>1</sup>	b <sup>1</sup>	c <sup>2</sup>	0.35
a <sup>1</sup>	b <sup>2</sup>	c <sup>1</sup>	0.08
a <sup>1</sup>	b <sup>2</sup>	c <sup>2</sup>	0.16
a <sup>2</sup>	b <sup>1</sup>	c <sup>1</sup>	0.05
a <sup>2</sup>	b <sup>1</sup>	c <sup>2</sup>	0.07
a <sup>2</sup>	b <sup>2</sup>	c <sup>1</sup>	0
a <sup>2</sup>	b <sup>2</sup>	c <sup>2</sup>	0
a <sup>3</sup>	b <sup>1</sup>	c <sup>1</sup>	0.15
a <sup>3</sup>	b <sup>1</sup>	c <sup>2</sup>	0.21
a <sup>3</sup>	b <sup>2</sup>	c <sup>1</sup>	0.09
a <sup>3</sup>	b <sup>2</sup>	c <sup>2</sup>	0.18



a <sup>1</sup>	b <sup>1</sup>	c <sup>1</sup>	0.25
a <sup>1</sup>	b <sup>2</sup>	c <sup>1</sup>	0.08
a <sup>2</sup>	b <sup>1</sup>	c <sup>1</sup>	0.05
a <sup>2</sup>	b <sup>2</sup>	c <sup>1</sup>	0
a <sup>3</sup>	b <sup>1</sup>	c <sup>1</sup>	0.15
a <sup>3</sup>	b <sup>2</sup>	c <sup>1</sup>	0.09

A, B

# Why factors?

- Fundamental building block for defining distributions in high-dimensional spaces
- Set of basic operations for manipulating these probability distributions