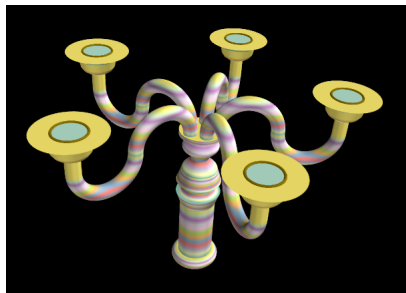


Modeliranje svijećnjaka

Modeliranje svijećnjaka prikazanog na slici 1 objasnit ćemo u nekoliko koraka. Pritom nam treba nekoliko matematičkih formula.



Slika 1:

Ako je u yz -ravnini zadana krivulja $c : I \rightarrow \mathbb{R}$ parametarskim jednadžbama

$$c(u) = (0, g(u), h(u)),$$

tada parametarske jednadžbe plohe dobivene rotacijom te krivulje oko z -osi glase

$$x = g(u) \sin v$$

$$y = g(u) \cos v$$

$$z = h(u)$$

pri čemu je $u \in I$, $v \in [0, 2\pi]$. Nadalje, rotacija $R_{z,\phi}$ oko z -osi za kut ϕ ima matrični prikaz

$$R_{z,\phi} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dakle, rotacija oko z -osi za kut ϕ preslikava točku (x, y, z) u točku

$$\begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \cos \phi - y \sin \phi \\ x \sin \phi + y \cos \phi \\ z \end{bmatrix}$$

odnosno

$$(x, y, z) \mapsto (x \cos \phi - y \sin \phi, x \sin \phi + y \cos \phi, z).$$

Parametarske jednadžbe dužine koja spaja točke $T_1(x_1, y_1, z_1)$ i $T_2(x_2, y_2, z_2)$ možemo zapisati u obliku

$$x = x_1 + (x_2 - x_1)t$$

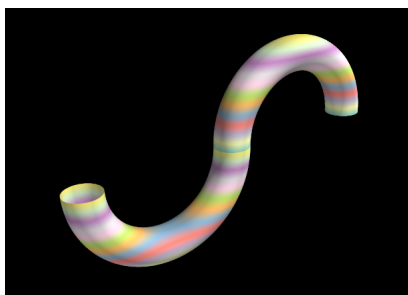
$$y = y_1 + (y_2 - y_1)t, \quad t \in [0, 1].$$

$$z = z_1 + (z_2 - z_1)t$$

Dio svijećnjaka prikazan na slici 2 možemo modelirati pomoću sljedeće dvije plohe koje su dijelovi torusa:

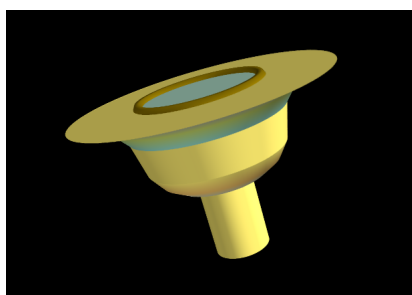
$$\begin{aligned} x &= 19 + (13 + 3 \cos v_1) \cos u_1 & x &= 45 + (13 + 3 \cos v_2) \cos u_2 \\ y &= 3 \sin v_1 & y &= 3 \sin v_2 \\ z &= 78 + (13 + 3 \cos v_1) \sin u_1 & z &= 78 + (13 + 3 \cos v_2) \sin u_2 \end{aligned}$$

Pritom je $u_1 \in [0, \pi]$, $v_1 \in [0, 2\pi]$, $u_2 \in [\pi, 2\pi]$, $v_2 \in [0, 2\pi]$.

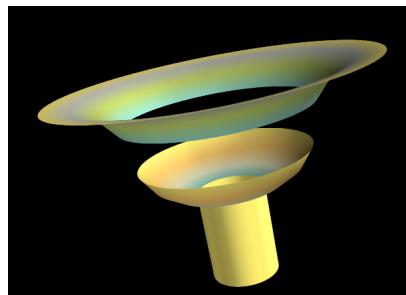


Slika 2:

Modeliranje oblika prikazanog na slici 3(a) opisat ćemo u nekoliko koraka.



(a) dio



(b) dio

Slika 3:

Dijelove prikazane na slici 3(b) modeliramo na sljedeći način. Jedan od tih dijelova modeliramo pomoću cilindra

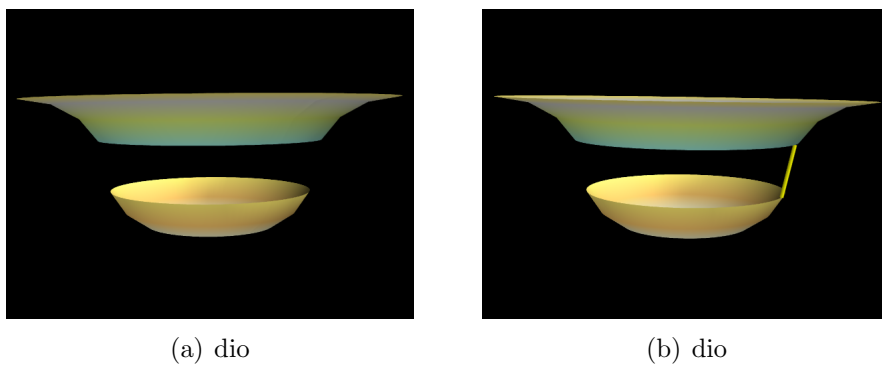
$$r(u, v) = (3 \sin u, 3 \cos u, v), \quad u \in [0, 2\pi], \quad v \in [0, 8].$$

Preostala dva dijela modeliramo pomoću rotacijskih ploha tako da krivulje

$$c_1(t) = (0, 3 + 5 \cos t, 13 + 5 \sin t), \quad t \in \left[\frac{3}{2}\pi, \frac{15}{8}\pi\right]$$

$$c_2(t) = (0, 14 + 6 \cos t, 13 + 5 \sin t), \quad t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{7}{8}\pi\right]$$

zarotiramo oko z -osi. Nadalje, prazninu između dijelova prikazanih na slici 4(a) popunimo na sljedeći način. U yz -ravnini uzmemo dužinu koja spaja te dijelove kako je prikazano na slici 4(b) (žuta dužina) i nakon toga tu dužinu zarotiramo oko z -osi.

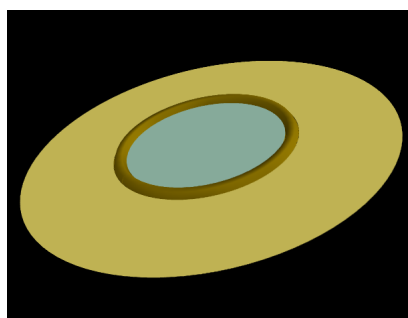


Slika 4:

Konačno, dio prikazan na slici 5 modeliramo preko sljedećih formula

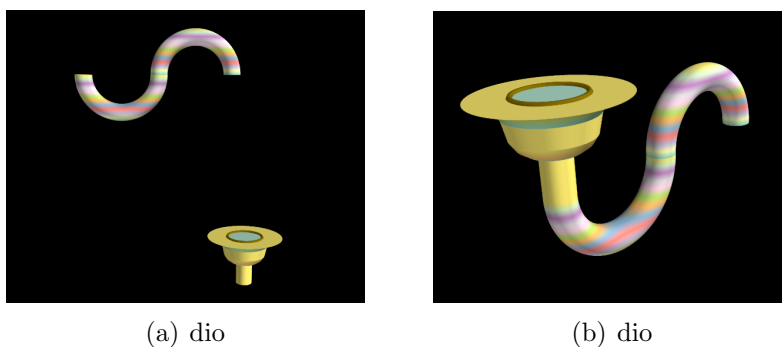
$$\begin{array}{lll}
 x = 6u_1 \sin v_1 & x = 14u_2 \sin v_2 & x = 6.5 \cos t \\
 y = 6u_1 \cos v_1 & y = 14u_2 \cos v_2 & y = 6.5 \sin t \\
 z = 18 & z = 18 & z = 18
 \end{array}$$

gdje je $u_1 \in [0, 1]$, $v_1 \in [0, 2\pi]$, $u_2 \in [0.5, 1]$, $v_2 \in [0, 2\pi]$, $t \in [0, 2\pi]$.

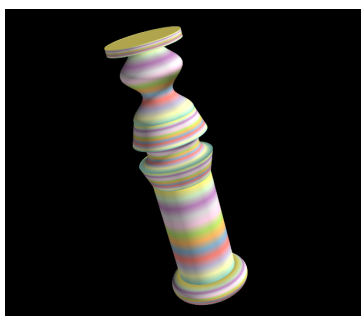


Slika 5:

Ako u ovom trenutku prikažemo istovremeno dijelove na slikama 2 i 3(a), dobit ćemo scenu kakva je prikazana na slici 6(a). Translacijom za odgovarajući vektor ta dva dijela se mogu spojiti kako je prikazano na slici 6(b).



Slika 6:



(a) dio



(b) dio

Slika 7:

Modeliranje oblika prikazanog na slici 7(a) opisat ćemo u nekoliko koraka. Dijelove prikazane na slici 7(b) modeliramo tako da krivulje

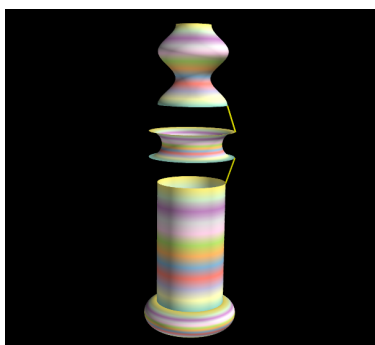
$$c_1(t) = (0, 8 + 3 \cos t, 8 + 3 \sin t), \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$c_2(t) = (0, 10 + 3 \cos t, 49 + 3 \sin t), \quad t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$$

$$c_3(t) = (0, 6 + 2 \cos t, \frac{6}{\pi}t + 58), \quad t \in [0, 3\pi]$$

$$c_4(t) = (0, 8, 11 + 29t), \quad t \in [0, 1]$$

zarotiramo oko z -osi. Praznine između dijelova prikazanih na slici 7(b) popunimo tako



Slika 8:



Slika 9:

da u yz -ravnini uzmemo dužine koje spajaju odgovarajuće dijelove kako je prikazano na slici 8 (žute dužine) i nakon toga te dužine zarotiramo oko z -osi. Sve preostale dijelove modela sa slike 7(a) modeliramo pomoću ploha

$$x = u \sin v$$

$$x = 1.2u \sin v$$

$$x = 1.2u \sin v$$

$$x = 9.6 \sin v$$

$$y = u \cos v$$

$$y = 1.2u \cos v$$

$$y = 1.2u \cos v$$

$$y = 9.6 \cos v$$

$$z = 5$$

$$z = 76$$

$$z = 78$$

$$z = 76 + 0.25u$$

gdje je $u \in [0, 8]$, $v \in [0, 2\pi]$.

Ako prikažemo istovremeno modele na slikama 6(b) i 7(a), dobit ćemo model prikazan na slici 9. Odgovarajućim rotacijama oko z -osi modela sa slike 6(b) konačno dobijemo model svijećnjaka koji je prikazan na slici 1.