Ulančani torusi

Torus je ploha koja ima implicitnu jednadžbu

$$\left(x^2+y^2+z^2+R^2-r^2\right)^2-4R^2\left(x^2+y^2\right)=0.$$

Za različite odabire konstanti R i r dobivamo drukčije toruse.

Dvostruki torus nastaje lijepljenjem dva torusa. Proces lijepljenja odgovara produktu implicitnih jednadžbi torusa umanjenom za neku konstantu. Konkretnije, implicitna jednadžba dvostrukog torusa glasi

$$f_1(x,y,z)\cdot f_2(x,y,z)=c,$$

pri čemu je

$$\begin{aligned} f_1(x,y,z)&=\left((x+a)^2+y^2+z^2+R^2-r^2\right)^2-4R^2\left((x+a)^2+y^2\right)\\ f_2(x,y,z)&=\left((x+b)^2+y^2+z^2+R^2-r^2\right)^2-4R^2\left((x+b)^2+y^2\right)\end{aligned}$$

za neke odabrane konstante a,b,c,r,R.

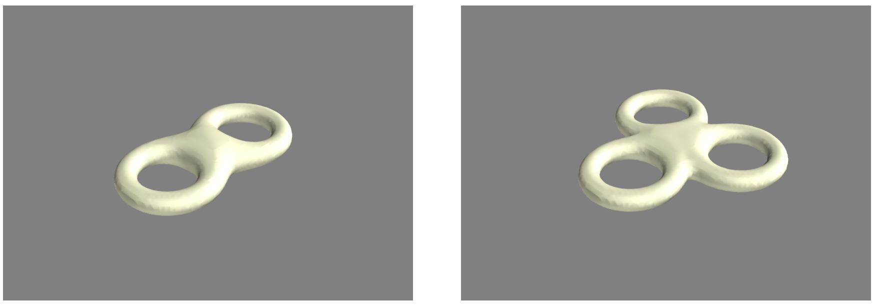
Trostruki torus nastaje lijepljenjem tri torusa. Možemo ga vizualizirati preko implicitne jednadžbe

$$g_1(x,y,z)\cdot g_2(x,y,z)\cdot g_3(x,y,z)=c,$$

pri čemu je

$$\begin{aligned} g_1(x,y,z)&=\left((x+a)^2+y^2+z^2+R^2-r^2\right)^2-4R^2\left((x+a)^2+y^2\right)\\ g_2(x,y,z)&=\left((x+b_1)^2+(y+b_2)^2+z^2+R^2-r^2\right)^2-4R^2\left((x+b_1)^2+(y+b_2)^2\right)\\ g_3(x,y,z)&=\left((x+c_1)^2+(y+c_2)^2+z^2+R^2-r^2\right)^2-4R^2\left((x+c_1)^2+(y+c_2)^2\right)\end{aligned}$$

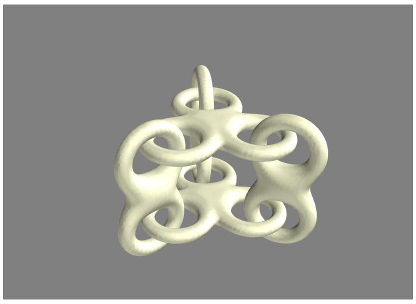
i vrijedi $b_1=a\cos\frac{2}{3}\pi,\ b_2=a\sin\frac{2}{3}\pi,\ c_1=a\cos\frac{4}{3}\pi,\ c_2=a\sin\frac{4}{3}\pi$ za neke odabrane konstante a,c,r,R.



(a) dvostruki torus (b) trostruki torus

Slika 1: Dvostruki i trostruki torus

Pomoću dvostrukog i trostrukog torusa možemo napraviti 3D model koji se sastoji od dva trostruka torusa i tri dvostruka torusa koji su raspoređeni na način kako je prikazano na slici 2.



Slika 2: Ulančani torusi

Za dovođenje dvostrukih i trostrukih torusa u željeni položaj treba na njihove standardne implicitne jednadžbe primijeniti određene transformacije: translacije i rotacije oko koordinatnih osi.

Translacija za vektor (x_0, y_0, z_0) preslikava točku (x, y, z) u točku $(x + x_0, y + y_0, z + z_0)$, tj. matematički zapisano

$$(x, y, z) \mapsto (x + x_0, y + y_0, z + z_0).$$

Rotacija $R_{x,\phi}$ oko osi x za kut ϕ, rotacija $R_{y,\phi}$ oko osi y za kut ϕ, rotacija $R_{z,\phi}$ oko osi z za kut ϕ imaju redom matrične prikaze

$$R_{x,\phi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}, \; R_{y,\phi} = \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi \end{bmatrix}, \; R_{z,\phi} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Na primjer, rotacija oko osi x za kut ϕ preslikava točku (x, y, z) u točku

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y\cos\phi - z\sin\phi \\ y\sin\phi + z\cos\phi \end{bmatrix}$$

odnosno

$$(x, y, z) \mapsto (x,\ y\cos\phi - z\sin\phi,\ y\sin\phi + z\cos\phi).$$

Važna napomena. Gornji matrični prikazi rotacija su prikazi pozitivnih rotacija u desnom koordinatnom sustavu. Što se tiče stavljanja minus predznaka kod sinus člana, ukoliko ne brinemo previše o tome kod kojeg ćemo ga člana staviti, onda moramo paziti na jednu stvar. Ukoliko, na primjer, nekim slučajem rotacijom objekta oko x-osi za $30°$ nismo dobili željeni položaj objekta, a mi smo gotovo pa sigurni da mora biti rotacija za taj kut, onda je možda samo problem da smo vjerojatno trebali rotirati za $-30°$. Upravo izbor sinus člana kod kojeg ćemo staviti minus predznak u matrici rotacije bitno utječe na pozitivne i negativne kutove. Zapravo to jako ovisi i o tome da li imamo lijevi ili desni koordinatni sustav (pazite, neki 3D programi koriste desni, a neki lijevi koordinatni sustav). No, jednostavno rečeno, ako niste dobili očekivani efekt rotacijom za neki kut ϕ, probajte rotirati za kut $-\phi$.