

Ulančani torusi

Torus je ploha koja ima implicitnu jednadžbu

$$(x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2)^2 - 4R^2(x^2 + y^2) = 0.$$

Za različite odabire konstanti R i r dobivamo drukčije toruse.

Dvostruki torus nastaje lijepljenjem dva torusa. Proces lijepljenja odgovara produktu implicitnih jednadžbi torusa umanjenom za neku konstantu. Konkretnije, implicitna jednadžba dvostrukog torusa glasi

$$f_1(x, y, z) \cdot f_2(x, y, z) = c,$$

pri čemu je

$$\begin{aligned} f_1(x, y, z) &= ((x + a)^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2)^2 - 4R^2((x + a)^2 + y^2) \\ f_2(x, y, z) &= ((x + b)^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2)^2 - 4R^2((x + b)^2 + y^2) \end{aligned}$$

za neke odabrane konstante a, b, c, r, R .

Trostruki torus nastaje lijepljenjem tri torusa. Možemo ga vizualizirati preko implicitne jednadžbe

$$g_1(x, y, z) \cdot g_2(x, y, z) \cdot g_3(x, y, z) = c,$$

pri čemu je

$$\begin{aligned} g_1(x, y, z) &= ((x + a)^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2)^2 - 4R^2((x + a)^2 + y^2) \\ g_2(x, y, z) &= ((x + b_1)^2 + (y + b_2)^2 + z^2 + R^2 - r^2)^2 - 4R^2((x + b_1)^2 + (y + b_2)^2) \\ g_3(x, y, z) &= ((x + c_1)^2 + (y + c_2)^2 + z^2 + R^2 - r^2)^2 - 4R^2((x + c_1)^2 + (y + c_2)^2) \end{aligned}$$

i vrijedi $b_1 = a \cos \frac{2}{3}\pi$, $b_2 = a \sin \frac{2}{3}\pi$, $c_1 = a \cos \frac{4}{3}\pi$, $c_2 = a \sin \frac{4}{3}\pi$ za neke odabrane konstante a, c, r, R .



(a) dvostruki torus



(b) trostruki torus

Slika 1: Dvostruki i trostruki torus

Pomoću torusa, dvostrukog torusa i trostrukog torusa možemo napraviti 3D model koji se sastoji od dva torusa, dva dvostruka torusa i dva trostruka torusa koji su raspoređeni na način kako je prikazano na slici 2.



Slika 2: Ulančani torusi

Za dovođenje torusa, dvostrukih i trostrukih torusa u željeni položaj treba na njihove standardne implicitne jednadžbe primijeniti određene transformacije: translacije i rotacije oko koordinatnih osi.

Translacija za vektor (x_0, y_0, z_0) preslikava točku (x, y, z) u točku $(x + x_0, y + y_0, z + z_0)$, tj. matematički zapisano

$$(x, y, z) \mapsto (x + x_0, y + y_0, z + z_0).$$

Rotacija $R_{x,\phi}$ oko osi x za kut ϕ , rotacija $R_{y,\phi}$ oko osi y za kut ϕ , rotacija $R_{z,\phi}$ oko osi z za kut ϕ imaju redom matrice prikaze

$$R_{x,\phi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}, \quad R_{y,\phi} = \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi \end{bmatrix}, \quad R_{z,\phi} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Na primjer, rotacija oko osi x za kut ϕ preslikava točku (x, y, z) u točku

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \cos \phi - z \sin \phi \\ y \sin \phi + z \cos \phi \end{bmatrix}$$

odnosno

$$(x, y, z) \mapsto (x, y \cos \phi - z \sin \phi, y \sin \phi + z \cos \phi).$$

Važna napomena. Gornji matricni prikazi rotacija su prikazi pozitivnih rotacija u desnom koordinatnom sustavu. Što se tiče stavljanja minus predznaka kod sinus člana, ukoliko ne brinemo previše o tome kod kojeg ćemo ga člana staviti, onda moramo paziti na jednu stvar. Ukoliko, na primjer, nekim slučajem rotacijom objekta oko x -osi za 30° nismo dobili željeni položaj objekta, a mi smo gotovo pa sigurni da mora biti rotacija za taj kut, onda je možda samo problem da smo vjerojatno trebali rotirati za -30° . Upravo izbor sinus člana kod kojeg ćemo staviti minus predznak u matrici rotacije bitno utječe na pozitivne i negativne kutove. Zapravo to jako ovisi i o tome da li imamo lijevi ili desni koordinatni sustav (pazite, neki 3D programi koriste desni, a neki lijevi koordinatni sustav). No, jednostavno rečeno, ako niste dobili očekivani efekt rotacijom za neki kut ϕ , probajte rotirati za kut $-\phi$.