

**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET ORGANIZACIJE I INFORMATIKE
V A R A Ž D I N**

Kristina Ledinski

**PRVA I DRUGA FUNDAMENTALNA FORMA PLOHE
ZAVRŠNI RAD**

Varaždin, 2011.

**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET ORGANIZACIJE I INFORMATIKE
V A R A Ž D I N**

Kristina Ledinski

Redoviti student

Broj indeksa: 37055/08-R

Smjer: Informacijski sustavi

Preddiplomski studij

PRVA I DRUGA FUNDAMENTALNA FORMA PLOHE

ZAVRŠNI RAD

Mentor:

Damir Horvat, prof.

Varaždin, rujan 2011.

Sadržaj

1. Uvod	1
2. Plohe	2
2.1. Zadavanje ploha	6
2.2. Tangencijalna ravnina plohe i normala	8
3. Prva fundamentalna forma plohe	10
3.1. Normala plohe	11
3.2. Primjeri	12
4. Druga fundamentalna forma plohe	18
4.1. Gaussovo preslikavanje	18
4.2. Operator oblika plohe i druga fundamentalna forma plohe	19
4.3. Primjeri	22
5. Zakrivljenosti	25
5.1. Normalna zakrivljenost	25
5.2. Gaussova i srednja zakrivljenost	27
5.3. Primjer	30
6. Implementacija u Maximi	33
6.1. Funkcije	33
6.2. Primjena funkcija na plohe	35
7. Zaključak	46
Literatura	47

1. Uvod

Prvo će biti ponovljeno gradivo o plohama koje je važno za ovu temu, zatim će biti objašnjena prva i druga fundamentalna forma, gdje je važno razumijevanje pojma operatora oblika plohe, te ću intuitivno opisati neke dijelove. Na kraju će biti obrađene vrste zakrivljenosti – normalna, Gaussova i srednja, uz kratko ponavljanje matričnog zapisa linearnih operatora.

Drugo poglavlje obuhvaća ponavljanje gradiva o plohama. Obrađuju se tri oblika zadavanja ravnine i općenito plohe, parcijalne derivacije funkcije dviju i triju varijabli, usmjerene derivacije i diferencijal funkcije.

Treće poglavlje obrađuje prvu fundamentalnu formu plohu, definira normalu plohe, duljinu luka krivulje na plohi, kut između parametarskih krivulja i površinu dijela plohe korištenjem fundamentalnih veličina prvog reda. Slijede nekoliko primjera za plohe koje imaju istu prvu fundamentalnu formu i slično. Definira se lokalna izometrija.

Četvrto poglavlje obrađuje drugu fundamentalnu formu plohe. Definira se pojam Gaussovog preslikavanja i operatora oblika plohe. Slijede primjeri koji pokazuju da se plohe s istom prvom fundamentalnom formom razlikuju po drugoj fundamentalnoj formi.

Peto poglavlje obrađuje tri vrste zakrivljenosti ploha – normalnu zakrivljenost, Gaussovu i srednju.

Kroz obrađivanje gradiva, neki će grafovi funkcija biti vizualizirani korištenjem programskog alata Maxima, a na nekim je mjestima napisan pripadajući kôd da se vidi kako naredbe izgledaju u tom alatu. Maxima je grafičko korisničko sučelje s mnogo ugrađenih naredbi, s mogućnošću vizualizacije tro- i dvodimenzionalnih grafova te omogućava jednostavnije animacije. U poglavlju 6 su navedeni primjeri računa u Maximi koji implementiraju funkcije računanja prve i druge fundamentalne forme plohe na raznim primjerima ploha te funkcije za računanje triju spomenutih vrsta zakrivljenosti.

2. Plohe

Jedna od najpoznatijih i najjednostavnijih ploha je ravnina. Dva najpoznatija oblika jednadžbe ravnine su implicitni (opći) i eksplicitni oblik.

Oblik

$$Ax + By + Cz + D = 0, \text{ gdje su } A, B, C, D \in \mathbb{R} \text{ i } A^2 + B^2 + C^2 \neq 0,$$

zovemo implicitni ili opći oblik, a

$$z = -\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y - \frac{D}{C},$$

gdje je $C \neq 0$, zovemo eksplicitni oblik.

Zatim imamo vektorski oblik jednadžbe ravnine, koji polazi od činjenice da je ravninu moguće zadati jednom točkom i dva nekolinearna vektora, tj.

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + u\vec{a} + v\vec{b},$$

gdje je \vec{r}_0 radijvektor spomenute točke, \vec{a} i \vec{b} nekolinearni vektori, a u i v proizvoljni realni brojevi.

Iz vektorskog oblika može se dobiti parametarski oblik koji glasi

$$x = x_0 + a_x u + b_x v$$

$$y = y_0 + a_y u + b_y v$$

$$z = z_0 + a_z u + b_z v,$$

gdje su $\vec{r} = (x, y, z)$, $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ koordinate pojedinih vektora u standardnoj ortonormiranoj bazi $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Često se parametarski oblik ravnine piše u obliku $r(u, v) = (x_0 + a_x u + b_x v, y_0 + a_y u + b_y v, z_0 + a_z u + b_z v)$ pri čemu preslikavanje $r: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ zovemo parametrizacija ravnine.

Ploha u prostoru se može zadati na tri različita načina. Pritom, kako je općenito ploha zakrivljena, u interesu je u okolini svake točke aproksimirati njezin graf što bolje s ravninom. Ravnina koja se u nekoj točki plohe najbolje priljubljuje uz plohu zove se tangencijalna ravnina. Kako bismo mogli uvesti taj pojam, potrebni su nam neki osnovni pojmovi iz realnih funkcija dviju i triju realnih varijabli.

Neka je zadana funkcija $z = f(x, y)$ i neka je $T(x_0, y_0)$ točka iz unutrašnjosti domene funkcije f . Zamislimo ravninu s jednadžbom $y = y_0$ koja prolazi tom točkom – tada ta ravnina graf

funkcije $z = f(x, y)$ siječe u jednoj krivulji. Jednadžba te krivulje je tada funkcija jedne varijable $f_1(x) = f(x, y_0)$. Derivacija funkcije f_1 je parcijalna derivacija funkcije f po varijabli x .

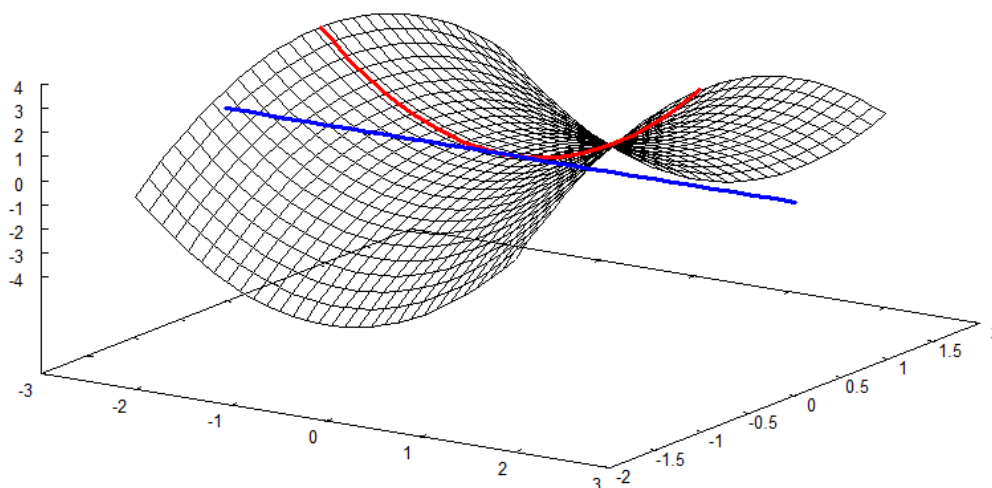
Oznake su: $f_x(x_0, y_0)$, $f'_x(x_0, y_0)$, $D_x f(x_0, y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial x}$.

Preciznije,

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

Geometrijska interpretacija parcijalne derivacije po varijabli x funkcije f u točki $T(x_0, y_0)$ je koeficijent smjera tangente na graf funkcije $f_1(x) = f(x, y_0)$ u točki x_0 .

Kao primjer će poslužiti sedlasta funkcija s jednadžbom $f(x, y) = x^2 - y^2$. Slika 2.1. prikazuje pojmove spomenute kod parcijalne derivacije funkcije po x . Crvenom bojom označena je krivulja $f_1(x) = f(x, y_0)$, a plavom bojom tangenta na tu krivulju u točki x_0 . U ovom je slučaju točka $T(0, 2)$.



Slika 2.1. Parcijalna derivacija funkcije $f(x, y) = x^2 - y^2$ po x

Analogno slijedi i za parcijalnu derivaciju funkcije $z = f(x, y)$ po varijabli y .

Neka je zadana funkcija $z = f(x, y)$ i neka je $T(x_0, y_0)$ točka iz unutrašnjosti domene funkcije f . Zamislimo ravninu s jednadžbom $x = x_0$ koja prolazi tom točkom – tada ta ravnina graf funkcije $z = f(x, y)$ siječe u jednoj krivulji. Jednadžba te krivulje je tada funkcija jedne varijable $f_2(y) = f(x_0, y)$. Derivacija funkcije f_2 je parcijalna derivacija funkcije f po varijabli y .

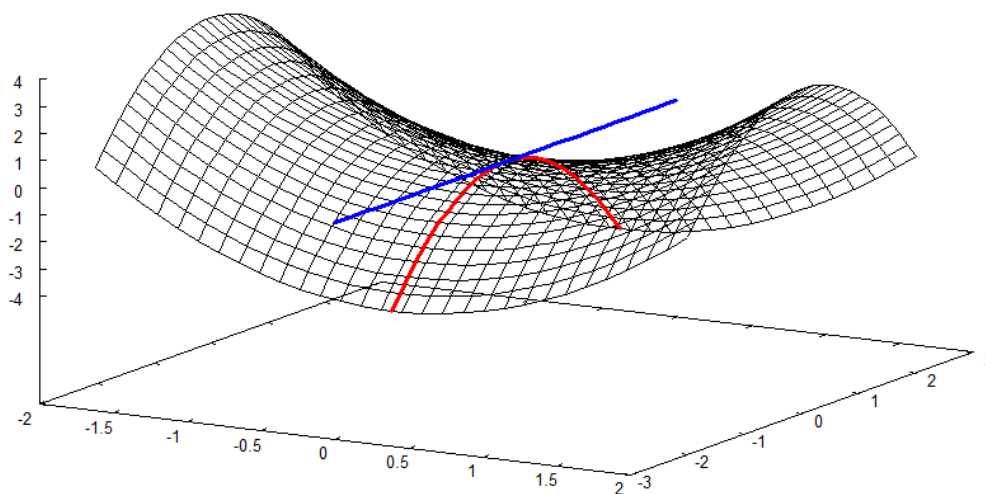
Oznake su: $f_y(x_0, y_0)$, $f'_y(x_0, y_0)$, $D_y f(x_0, y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Preciznije,

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

Geometrijska interpretacija parcijalne derivacije funkcije f po varijabli y u točki $T(x_0, y_0)$ je koeficijent smjera tangente na graf funkcije $f_2(y) = f(x_0, y)$ u točki y_0 .

Na slici 2.2. prikazana je parcijalna derivacija sedlaste funkcije iz prethodnog primjera. Crvenom bojom označena je krivulja $f_2(y) = f(x_0, y)$, a plavom bojom njezina tangenta u točki y_0 .



Slika 2.2. Parcijalna derivacija funkcije $f(x, y) = x^2 - y^2$ po y

Za parcijalne derivacije vrijede ista pravila kao i za obične derivacije. Parametarski zadane jednačbe deriviraju se tako da se svaka komponenta u zagradama zasebno parcijalno derivira.

Oznake koje će se koristiti kroz rad su sljedeće:

$$\begin{aligned} x_u &= \frac{\partial x}{\partial u} & x_v &= \frac{\partial x}{\partial v} \\ x_{uu} &= \frac{\partial^2 x}{\partial^2 u} & x_{uv} &= \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \end{aligned}$$

Ako imamo funkciju tri varijable $f(x, y, z)$, tada imamo još jednu parcijalnu derivaciju $\frac{\partial f}{\partial z}$.

Vrijedi sljedeće:

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y, z) - f(x, y, z)}{\Delta y}$$

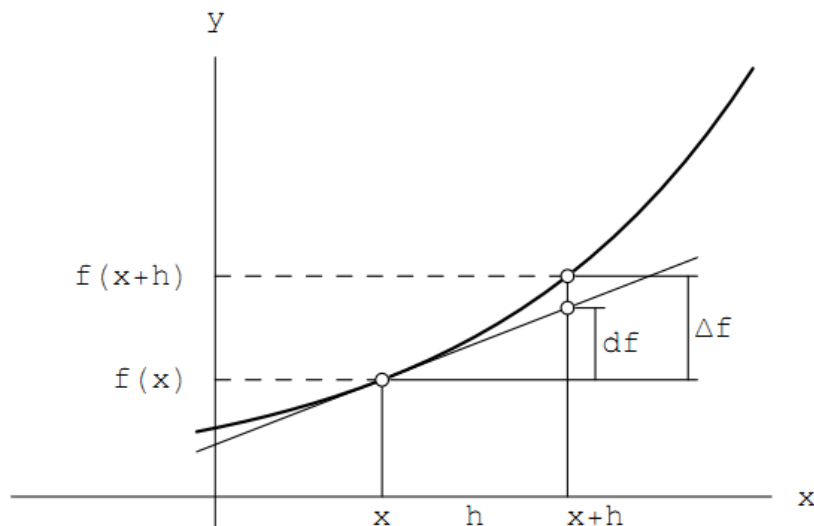
$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z)}{\Delta z}$$

Neka je $f: O \rightarrow \mathbb{R}$ i neka je $T_0 \in O$, $O \subseteq \mathbb{R}^2$ otvoren skup. Zanima nas brzina promjene funkcije u smjeru nekog vektora $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ u točki T_0 . Gledamo restrikciju funkcije f na pravac kroz točku T_0 s vektorom smjera \vec{u} . To će biti funkcija jedne varijable čiji je graf krivulja koja se dobije kao presjek grafa funkcije f i ravnine kroz točku T_0 koja je okomita na xy -ravninu i paralelna s vektorom \vec{u} . Derivacija te funkcije u točki T_0 zove se derivacija funkcije f duž vektora \vec{u} i označava se s $\partial_{\vec{u}} f(T_0)$. Derivacija duž jediničnog vektora $\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ zove se derivacija u smjeru vektora \vec{u} . Vrijedi

$$\partial_{\vec{u}} f(T_0) = \frac{df}{dt}(T_0 + t\vec{u}).$$

Diferencijalni račun polazi od ideje o što boljem lokalnom aproksimiranju zadane funkcije linearnom. Kažemo da je funkcija diferencijabilna u točki (x_0, y_0) ako je $f(x_0 + h, y_0 + k)$ praktički jednako $f(x_0, y_0)$ kada su k i h dovoljno blizu 0.

Neka je $f: O \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija definirana na otvorenom skupu $O \subseteq \mathbb{R}^2$ i neka je $T_0 \in O$. Želimo prirast funkcije $f(T_0 + H) - f(T_0)$, gdje je $H \in \mathbb{R}^2$ takav da je $T_0 + H \in O$, aproksimirati s $A(H)$, gdje je $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ linearni operator. Pri tome ćemo preslikavanje f smatrati *dobrim* ukoliko relativnu grešku $\frac{r(H)}{\|H\|}$ možemo učiniti po volji malom za dovoljno male H , pri čemu vrijedi $r(H) = f(T_0 + H) - f(T_0) - A(H)$. Pripadajuća slika za slučaj realne funkcije jedne varijable je slika 2.3.



Slika 2.3. Diferencijal funkcije

Ukoliko linearni operator A postoji, on je jedinstven i zovemo ga *diferencijal funkcije f u točki T_0* i označava se s $df(T_0)$. Tada kažemo da je funkcija f *diferencijabilna* u točki T_0 .

2.1. Zadavanje ploha

Implicitni oblik jednadžbe plohe P glasi

$$F(x, y, z) = 0, \text{ tj.}$$

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : F(x, y, z) = 0\}.$$

Pritom se traži da je funkcija F diferencijabilna, tj. da postoji $dF = F_x dx + F_y dy + F_z dz$, i da je bar jedan od F_x, F_y, F_z različit od nule. Vektor (F_x, F_y, F_z) je normala tangencijalne ravnine na implicitno zadanu plohu P .

EksPLICITNI oblik jednadžbe plohe P glasi

$$z = f(x, y), \text{ tj.}$$

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y)\}.$$

Funkcija f mora biti diferencijabilna, tj. postoji $dz = f_x dx + f_y dy$. Ovdje je normala tangencijalne ravnine na plohu P vektor $(f_x, f_y, -1)$.

Parametarski oblik jednadžbe plohe P glasi

$$x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v), \text{ tj.}$$

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)\},$$

gdje su preslikavanja x, y, z diferencijabilna i rang matrice

$$\begin{bmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{bmatrix}$$

jednak je 2.

Preslikavanje $(u, v) \mapsto (x, y, z)$ zadano vektorskom jednadžbom

$$r(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k},$$

odnosno s

$$r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

zovemo parametrizacija plohe P .

Vektorski umnožak $r_u \times r_v$ je normala tangencijalne ravnine na plohu P , gdje su r_u i r_v parcijalne derivacije vektorske funkcije r po u , odnosno v .

Pritom domena funkcije r ne mora biti čitav \mathbb{R}^2 , najčešće je to podskup oblika $I \times J$, gdje su I i J intervali u \mathbb{R} .

NAPOMENA

Pojam plohe se u matematici preciznije definira na sljedeći način.

Regularna parametrizacija podskupa $P \subset \mathbb{R}^3$ je injektivno preslikavanje (barem klase C^3)

$$x: U \rightarrow P$$

tako da je $x_u \times x_v \neq 0$ i $x^{-1}: x(U) \rightarrow U$ neprekidno za neki otvoreni skup $U \subseteq \mathbb{R}^2$.

Povezan podskup $P \subset \mathbb{R}^3$ je ploha ako svaka točka iz P ima okolinu koja se može regularno parametrizirati.

Kao primjer za oblike jednadžbi će poslužiti sfera.

Implicitni oblik jednadžbe sfere sa središtem u ishodištu glasi

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

gdje je R polumjer sfere.

EksPLICITNI oblik gornje polusfere glasi

$$z = \sqrt{x^2 + y^2 - R^2},$$

dok donju polusferu dobivamo s predznakom minus ispred korijena. Zajedno te dvije polusfere čine potpunu sferu. Drugim riječima, ne može se cijela sfera izraziti eksPLICITNOM formulom.

Parametarski oblik sfere glasi

$$x = R \sin \theta \cos \varphi$$

$$y = R \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = R \cos \theta,$$

pri čemu je $\theta \in [0, 2\pi]$, $\varphi \in [0, \pi]$.

2.2. Tangencijalna ravnina plohe i normala

Neka je ploha zadana eksplicitno sa $z = f(x, y)$ i neka je $T_0(x_0, y_0, z_0)$ točka na toj plohi. Ravninu koja prolazi točkom T_0 i razapeta je vektorima $(1, 0, z_x(x_0, y_0))$ i $(0, 1, z_y(x_0, y_0))$ zovemo tangencijalna ravnina plohe $z = f(x, y)$.

Njezina je jednačina

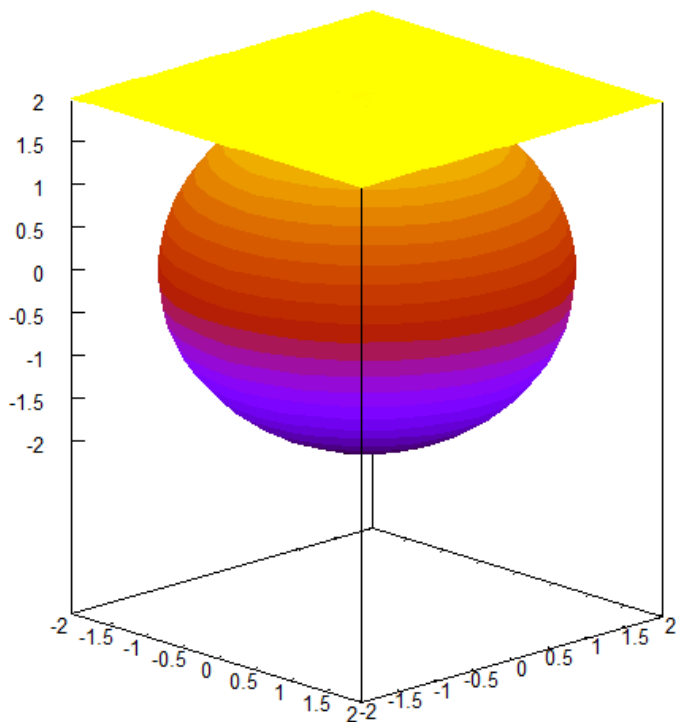
$$z_x(x_0, y_0)(x - x_0) + z_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

ili

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ 1 & 0 & z_x(x_0, y_0) \\ 0 & 1 & z_y(x_0, y_0) \end{vmatrix} = 0,$$

gdje su z_x i z_y parcijalne derivacije funkcije z po x , odnosno po y , i računaju se u točki $T_0(x_0, y_0)$. Normala je $(z_x(x_0, y_0), z_y(x_0, y_0), -1)$.

Prikaz primjera tangencijalne ravnine je na slici 2.4. Može se vidjeti sfera sa središtem u ishodištu koordinatnog sustava i polumjerom 2 te ravnina $z = 2$ koja predstavlja tangencijalnu ravninu sfere. Dodiruje je u točki $(0, 0, 2)$.



Slika 2.4. Primjer tangencijalne ravnine na sferu

Naredbe u Maximi su glasile

```
sfera:parametric_surface(2*cos(u)*sin(v),2*sin(u)*sin(v),2*cos(v),
u,0,2*pi, v,0,pi);
ravnina:parametric_surface(u,v,2, u,-2,2, v,-2,2);
draw3d(enhanced3d=[4*z,x,y,z],ravnina,sfera);
```

Normala plohe $z = f(x, y)$ u točki $T_0(x_0, y_0, z_0)$ je pravac

$$\frac{x - x_0}{z_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{z_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$$

koji je okomit na tangencijalnu ravninu, tj. vektor smjera je kolinearan s normalom tangencijalne ravnine.

Jednadžba tangencijalne ravnine plohe zadane implicitno s $F(x, y, z) = 0$ glasi

$$(F_x)_{T_0}(x - x_0) + (F_y)_{T_0}(y - y_0) + (F_z)_{T_0}(z - z_0) = 0.$$

Jednadžba normale tada glasi

$$\frac{x - x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}.$$

Ako je ploha zadana parametarski s $r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ jednadžba tangencijalne ravnine glasi

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_u(u_0, v_0) & y_u(u_0, v_0) & z_u(u_0, v_0) \\ x_v(u_0, v_0) & y_v(u_0, v_0) & z_v(u_0, v_0) \end{vmatrix} = 0.$$

Za vektor smjera pravca normale možemo uzeti u ovom slučaju vektor $\vec{n} = r_u \times r_v$.

NAPOMENA

Tangencijalna ravnina se u matematici preciznije definira na sljedeći način.

Neka je $P \subset \mathbb{R}^3$ ploha i $S \in P$. Neka je $\mathbf{x}: U \rightarrow P$ regularna parametrizacija takva da je $S = \mathbf{x}(u_0, v_0)$. Tangencijalna ravnina plohe P u točki S je potprostor $T_S P$ razapet s vektorima $\mathbf{x}_u(u_0, v_0)$ i $\mathbf{x}_v(u_0, v_0)$. Pojam tangencijalne ravnine ne ovisi o parametrizaciji.

3. Prva fundamentalna forma plohe

Neka je $T_S P$ tangencijalna ravnina plohe P u točki S . Neka je $\mathbf{x}: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizacija plohe zadana s $\mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$. Ono što je važno napomenuti je da su parcijalne derivacije $\mathbf{x}_u(u_0, v_0)$ i $\mathbf{x}_v(u_0, v_0)$ tangencijalni vektori za u -krivulju čija je jednačba $c_1(u) = \mathbf{x}(u, v_0)$, odnosno v -krivulju čija je jednačba $c_2(v) = \mathbf{x}(u_0, v)$ te će se te parcijalne derivacije koristiti kroz cijeli rad.

Definira se *prva Gaussova ili diferencijalna fundamentalna forma plohe*, $I_S: T_S P \rightarrow \mathbb{R}$, sa

$$I_S(U, V) = U \cdot V$$

za $U, V \in T_S P$.

Definiramo funkcije $E, F, G: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ kao

$$E = I_S(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u) = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = \|\mathbf{x}_u\|^2$$

$$F = I_S(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v) = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v$$

$$G = I_S(\mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v) = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = \|\mathbf{x}_v\|^2,$$

koje se nazivaju *Gaussove fundamentalne veličine prvog reda* i često se puta stavljaju u simetričnu matricu oblika

$$I_S = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}.$$

Budući da su U i V tangencijalni vektori, mogu se prikazati pomoću linearne kombinacije vektora \mathbf{x}_u i \mathbf{x}_v , tj.

$$U = a\mathbf{x}_u + b\mathbf{x}_v \in T_S P,$$

$$V = c\mathbf{x}_u + d\mathbf{x}_v \in T_S P.$$

Nadalje,

$$I_S(U, V) = U \cdot V = (a\mathbf{x}_u + b\mathbf{x}_v) \cdot (c\mathbf{x}_u + d\mathbf{x}_v) = ac\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u + ad\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v + bc\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v + bd\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v.$$

Uvrštavanjem Gaussovih fundamentalnih veličina prvog reda, E, F, G , dobiva se

$$I_S(U, V) = Eac + F(ad + bc) + Gbd.$$

Isto tako

$$I_S(U, U) = U \cdot U = \|U\|^2 = (ax_u + bx_v)^2 = Ea^2 + 2Fab + Gb^2,$$

što se najčešće piše kao

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$

a taj izraz također nazivamo *prvom fundamentalnom formom plohe P*.

Prvom fundamentalnom formom možemo mjeriti duljinu luka krivulje na nekoj plohi. Također, možemo odrediti kut između dviju krivulja na plohi i računati površinu nekog dijela na plohi.

Duljina luka l krivulje $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ gdje su $A = \alpha(a) = \mathbf{x}(u(a), v(a))$ i $B = \alpha(b) = \mathbf{x}(u(b), v(b))$ rubne točke krivulje je

$$l = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{E \cdot u'(t)^2 + 2Fu'(t) \cdot v'(t) + G \cdot v'(t)^2} dt.$$

Kut φ između parametarskih krivulja je

$$\cos \varphi = \frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

Površina π dijela plohe je

$$\pi(P) = \int_U \|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\| dudv = \int_U \sqrt{EG - F^2} dudv.$$

3.1. Normala plohe

Vektor normale plohe je

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|}$$

Koristeći Lagrangeov identitet $(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 + (\vec{a} \times \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2$, možemo vidjeti da vrijedi

$$(\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v)^2 + (\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v)^2 = \mathbf{x}_u^2 \cdot \mathbf{x}_v^2.$$

Premještanjem se dobiva

$$(\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v)^2 = \mathbf{x}_u^2 \cdot \mathbf{x}_v^2 - (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v)^2$$

$$\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|^2 = \mathbf{x}_u^2 \cdot \mathbf{x}_v^2 - (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v)^2$$

$$\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|^2 = EG - F^2$$

Neka je $W = \sqrt{EG - F^2}$.

Tada za normalnu tangencijalne ravnine vrijedi

$$n = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{W}.$$

3.2. Primjeri

PRIMJER 3.1

Neka je xy -ravnina zadana parametarski s $\mathbf{x}(u, v) = (u, v, 0)$. Odredimo fundamentalne veličine E, F, G i njezinu prvu fundamentalnu formu.

Rješenje

Prvo je potrebno parcijalno derivirati funkciju \mathbf{x} po u , zatim po v :

$$\mathbf{x}_u = (1, 0, 0) \text{ i } \mathbf{x}_v = (0, 1, 0).$$

Fundamentalne veličine E, F, G tada glase

$$E = \|\mathbf{x}_u\|^2 = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2}^2 = 1$$

$$F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = (1, 0, 0) \cdot (0, 1, 0) = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 0$$

$$G = \|\mathbf{x}_v\|^2 = \sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2}^2 = 1,$$

a prva fundamentalna forma

$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 = du^2 + dv^2.$$

PRIMJER 3.2

Neka je cilindar zadan parametarski s $\mathbf{x}^*(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$ (cilindar s polumjerom 1). Odredimo fundamentalne veličine E, F, G i njegovu prvu fundamentalnu formu.

Rješenje

Prvo je potrebno parcijalno derivirati funkciju \mathbf{x}^* po u , zatim po v :

$$\mathbf{x}_u^* = (-\sin u, \cos u, 0) \text{ i } \mathbf{x}_v^* = (0, 0, 1)$$

Fundamentalne veličine E, F, G tada glase

$$\begin{aligned} E = \|\mathbf{x}_u\|^2 &= \sqrt{\sin^2 u + \cos^2 u + 0^2}^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = (-\sin u, \cos u, 0) \cdot (0, 0, 1) \\
&= -\sin u \cdot 0 + \cos u \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\
&= 0 \\
G &= \|\mathbf{x}_v\|^2 = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}^2 \\
&= 1
\end{aligned}$$

a prva fundamentalna forma

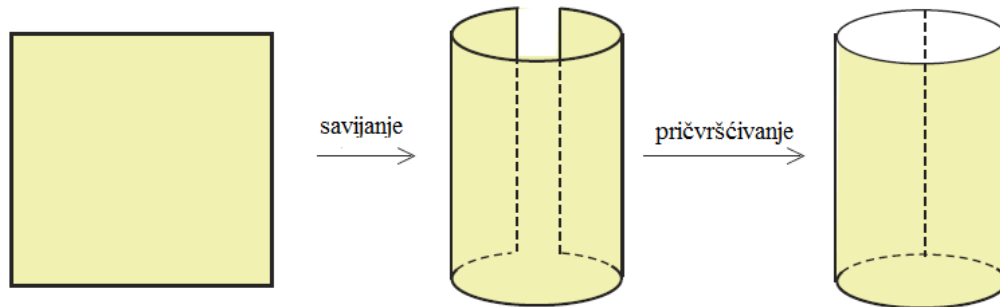
$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 = du^2 + dv^2.$$

Prema tome, ravnina i cilindar imaju istu prvu fundamentalnu formu. Ako dvije plohe imaju istu prvu fundamentalnu formu, one ne moraju biti jednake, već su „lokalno slične“, ali ne i globalno.

Gledajući primjer 3.1 i 3.2, možemo zamisliti list papira koji predstavlja ravninu, tj. jedan dio ravnine, te savijanjem tog lista i spajanjem dviju njegovih nasuprotnih strana možemo dobiti cilindar, tj. dio cilindra – što znači da istu prvu fundamentalnu formu imaju plohe koje su lokalno izometrične.

Izometrija je preslikavanje koje čuva udaljenost između točaka (izos = isto, metrein = mjerenje).

Izometrija jednu plohu preslikava u drugu, što se intuitivno može shvatiti gledajući sliku 3.1.



Slika 3.1. Savijanje papira koji predstavlja ravninu u cilindar [Shifrin, 2008, str. 40]

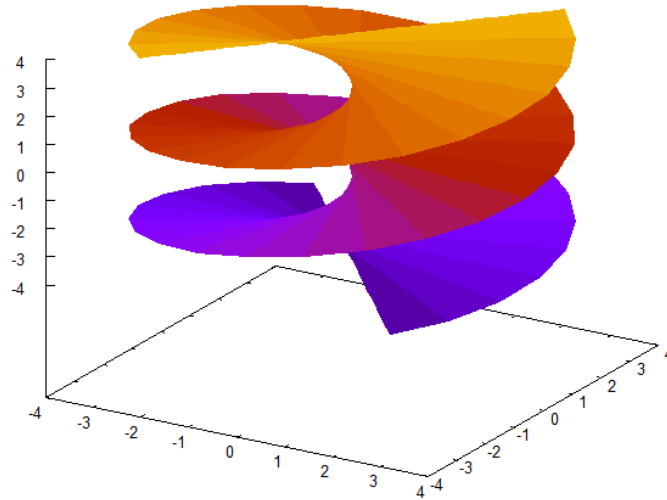
Neka su P i P^* dvije plohe. Kažemo da su lokalno izometrične ako za svaku $S \in P$ postoje parametrizacija $\mathbf{x}: \mathcal{U} \rightarrow P$ s $\mathbf{x}(u_0, v_0) = S$ i parametrizacija $\mathbf{x}^*: \mathcal{U} \rightarrow P^*$ (koristeći istu domenu $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$) gdje vrijedi $I_S = I_{S^*}^*$ za svaku $S = \mathbf{x}(u, v)$ i $S^* = \mathbf{x}^*(u, v)$ za neke $(u, v) \in \mathcal{U}$. Tj., funkcija $f = \mathbf{x}^* \circ \mathbf{x}^{-1}: \mathbf{x}(\mathcal{U}) \rightarrow \mathbf{x}^*(\mathcal{U})$ je preslikavanje koje čuva prvu fundamentalnu formu plohe i prema tome čuva udaljenosti.

Da to nisu parovi međusobno jednakih ploha, pokazat će se kroz drugu fundamentalnu formu plohe, gdje je važan pojam operator oblika plohe koji će riješiti „problem“ prve fundamentalne forme.

PRIMJER 3.3

Neka je helikoid zadan parametarski s $r(u, v) = (u \cos v, u \sin v, bv)$. Odredimo fundamentalne veličine E, F, G i njegovu prvu fundamentalnu formu.

Helikoid je ploha za koju je karakteristično da za svaku njegovu točku postoji spirala koja prolazi tom točkom. Helikoid je ploha koja nastaje rotacijom i istovremenom translacijom pravca oko i uzduž zamišljene osi.



Slika 3.2. Helikoid

Skup naredbi u alatu Maxima koji vraća sliku helikoida (slika 3.2) za $b = 1$ su:

```
helikoid:parametric_surface (u*cos(v),u*sin(v),v, u,-4,4, v,-4,4);  
draw3d (enhanced3d=[4*z,x,y,z], helikoid);
```

Rješenje

Prvo je potrebno parcijalno derivirati funkciju r po u , zatim po v :

$$r_u(u, v) = (\cos v, \sin v, 0)$$

$$r_v(u, v) = (-u \sin v, u \cos v, b)$$

Fundamentalne veličine prvog reda tada iznose

$$\begin{aligned} E = \|r_u\|^2 &= \sqrt{\cos^2 v + \sin^2 v + 0^2}^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

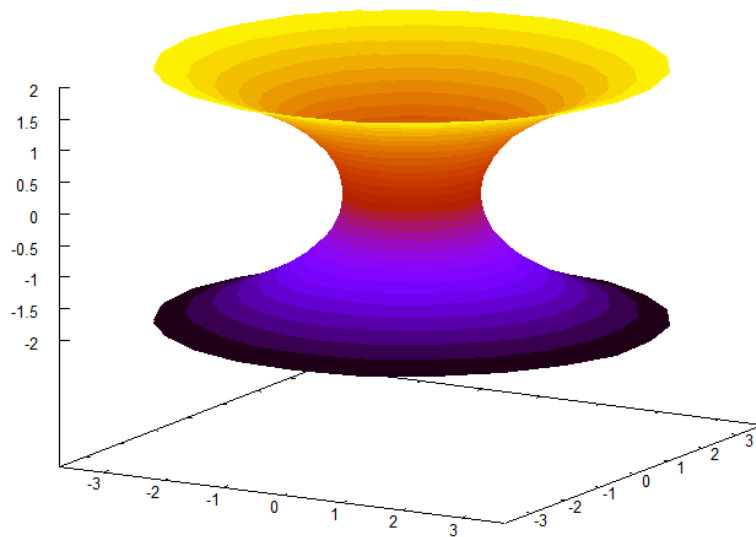
$$\begin{aligned} F = r_u \cdot r_v &= (\cos v, \sin v, 0) \cdot (-u \sin v, u \cos v, b) \\ &= -u \sin v \cos v + u \sin v \cos v + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$G = \|r_v\|^2 = \sqrt{u^2 \sin^2 v + u^2 \cos^2 v + b^2}^2 \\ = u^2 + b^2$$

Stoga je prva fundamentalna forma helikoida

$$ds^2 = du^2 + (u^2 + b^2)dv^2.$$

Ono što je kod helikoida zanimljivo je da je lokalno izometričan s katenoidom koji ima parametarske jednadžbe $\mathbf{x}(u, v) = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u)$. Slika 3.3. prikazuje katenoid nacrtan u Maximi.

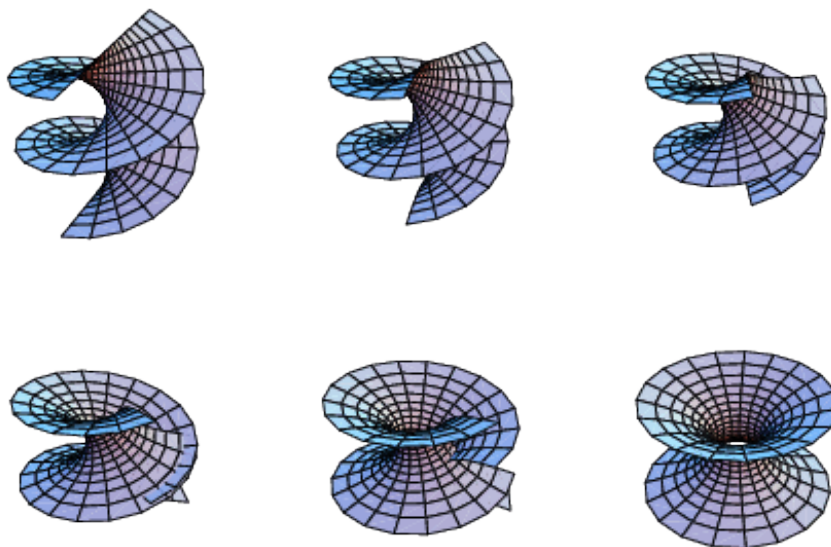


Slika 3.3. Katenoid

Naredbe za katenoid su glasile

```
katenuoid: parametric_surface (cosh(u)*cos(v), cosh(u)*sin(v), u, u, -2, 2,
v, 0, 2*pi);
draw3d (enhanced3d=[4*z, x, y, z], katenuoid);
```

Slika 3.4. prikazuje prijelaz s helikoida u gornjem lijevom uglu do katenoida u donjem desnom uglu. Na Internetu se mogu naći mnoge lijepe animacije koje prikazuju taj prijelaz.



Slika 3.4. Prijelaz s helikoida u katenoid
[\[http://mathworld.wolfram.com/images/eps-gif/HelicoidCatenoid_1000.gif\]](http://mathworld.wolfram.com/images/eps-gif/HelicoidCatenoid_1000.gif)

Uzmemo li sljedeću parametrizaciju:

$$x(u, v) = \cos \alpha \sinh v \sin u + \sin \alpha \cosh v \cos u$$

$$y(u, v) = -\cos \alpha \sinh v \cos u + \sin \alpha \cosh v \sin u$$

$$z(u, v) = u \cos \alpha + v \sin \alpha$$

za $\alpha = 0$ dobit ćemo *helikoid*, a za $\alpha = \frac{\pi}{2}$ katenoid.

Dokaz da su helikoid i katenoid lokalno izometrični nalazi se u poglavlju 6.

PRIMJER 3.4 – KUT IZMEĐU KRIVULJA

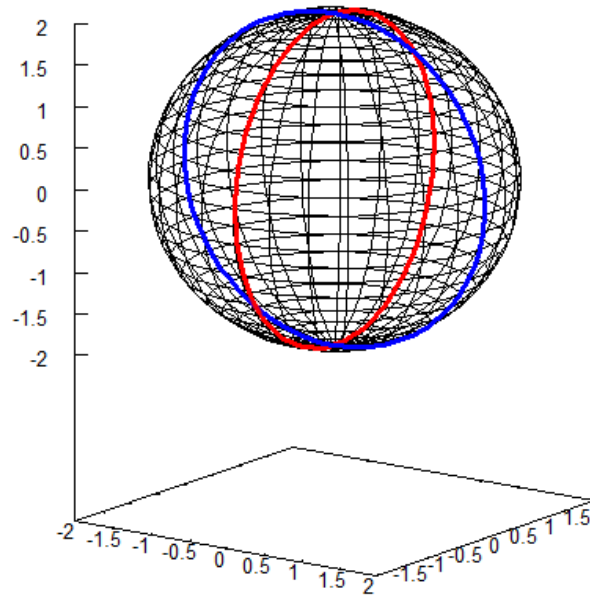
Odredimo kut između u -crta i v -crta na sferi s parametrizacijom $x = R \sin u \cos v$, $y = R \sin u \sin v$, $z = R \cos u$.

Na slici 3.5. prikazana je sfera sa središtem u ishodištu i promjerom 2, gdje je crvenom bojom označena jedna njezina u -krivulja, a plavom bojom v -krivulja.

Rješenje.

Sjetimo se, kut između parametarskih crta na plohi računa se pomoću formule

$$\cos \varphi = \frac{F}{\sqrt{EG}}.$$



Slika 3.5. Sfera i njezine u i v -krivulje

Parametrizacija plohe glasi

$$\mathbf{x}(u, v) = (R \sin u \cos v, R \sin u \sin v, R \cos u)$$

Parcijalne derivacije iznose

$$\mathbf{x}_u(u, v) = (R \cos u \cos v, R \cos u \sin v, -R \sin u)$$

$$\mathbf{x}_v(u, v) = (-R \sin u \sin v, R \sin u \cos v, 0)$$

$$\begin{aligned} E = \mathbf{x}_u^2 &= R^2 \cos^2 u \cos^2 v + R^2 \cos^2 u \sin^2 v + R^2 \sin^2 u \\ &= R^2 \cos^2 u (\cos^2 v + \sin^2 v) + R^2 \sin^2 u \\ &= R^2 \cos^2 u + R^2 \sin^2 u \\ &= R^2 (\cos^2 u + \sin^2 u) \\ &= R^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F = \mathbf{x}_u \mathbf{x}_v &= -R^2 \cos u \cos v \sin u \sin v + R^2 \cos u \cos v \sin u \sin v + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G = \mathbf{x}_v^2 &= R^2 \sin^2 u \sin^2 v + R^2 \sin^2 u \cos^2 v + 0 \\ &= R^2 \sin^2 u (\sin^2 v + \cos^2 v) \\ &= R^2 \sin^2 u \end{aligned}$$

Kut između krivulja tada iznosi

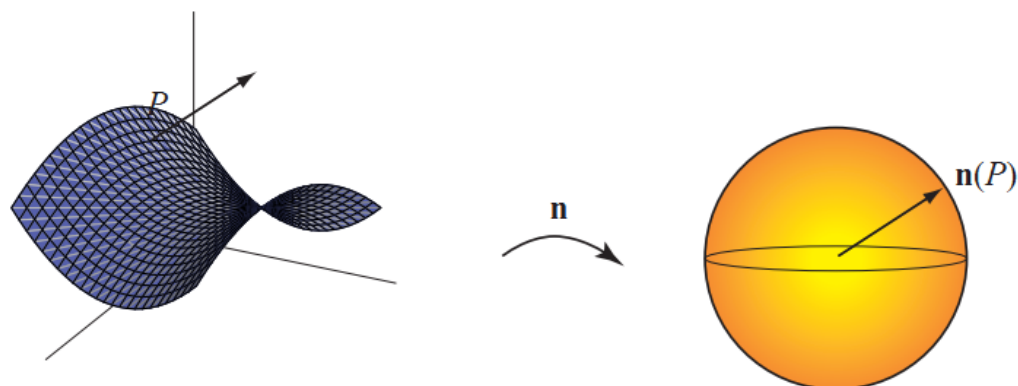
$$\cos \varphi = \frac{F}{\sqrt{EG}} = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$$

što znači da se u i v -krivulje sfere u svakoj točki sijeku pod pravim kutem.

4. Druga fundamentalna forma plohe

4.1. Gaussovo preslikavanje

Neka je P ploha, a $n: P \rightarrow S^2$ funkcija koja svakoj točki $S \in P$ pridružuje njezinu jediničnu normalu $n(S)$. Funkciju n tada zovemo *Gaussovo preslikavanje* plohe P .



Slika 4.1. Gaussovo preslikavanje [Shifrin, 2008, str. 44]

Slika 4.1. prikazuje Gaussovo preslikavanje vektora normale iz točke P na plohi u jedinični vektor $n(P)$ na jediničnoj sferi S^2 .

Na primjer, funkcija n kod ravnine je konstanta. To je jasno jer ravnina nije nimalo zakrivljena i normale svih tangencijalnih ravnina su jednaki vektori.

Gledajući cilindar, kojem su izvodnice pravci, a sastoji se od beskonačno mnogo kružnica koje sve imaju središte na jednom pravcu, funkciju Gaussovog preslikavanja možemo zamisliti kao vektore koji svi iz središta sfere pokazuju prema ekvatoru sfere (prema jednoj kružnici na sferi).

Za sferu smještenu u ishodištu funkcija Gaussovog preslikavanja predstavlja normiranje radijevktora.

Najveći dio informacija o samom obliku plohe sadržan je u Gaussovom preslikavanju. Da bismo mogli definirati operator oblika plohe, potreban nam je pojam usmjerene derivacije realnih i vektorskih funkcija definiranih na plohi P .

Neka je f realna ili vektorska funkcija definirana na plohi P i neka je $V \in T_S P$. Usmjerena derivacija $D_V f(S)$ funkcije f u točki S u smjeru vektora V definira se na sljedeći način:

Neka je $\alpha: \langle -\varepsilon, \varepsilon \rangle \rightarrow P$ krivulja takva da je $\alpha(0) = S$ i $\alpha'(0) = V$. Tada je $D_V f(S) = (f \circ \alpha)'(0)$.

4.2. Operator oblika plohe i druga fundamentalna forma plohe

Neka je $T_S P$ tangencijalna ravnina plohe P u točki S , kao i u prethodnim primjerima. Neka je $n(S)$ normala na $T_S P$ iz točke S . Zamislimo ravninu razapetu normalom $n(S)$ i nekim tangencijalnim vektorom $V \in T_S P$. Ta ravnina siječe plohu u nekoj krivulji. Kako se vektor V mijenja, mijenja se i krivulja. Neka je $D_V n(S)$ usmjerena derivacija Gaussovog preslikavanja n duž vektor V u točki S .

Operator oblika plohe je linearni operator

$$O_S: T_S P \rightarrow T_S P$$

definiran s

$$O_S(V) = -D_V n(S).$$

Kraća oznaka je $-D_V n$.

Riječima bi to glasilo ovako: operator oblika plohe koji je primjenjen na tangencijalni vektor V je derivacija normale plohe $n(P)$ u smjeru vektora V s negativnim predznakom. Operator oblika plohe mjeri kako se ploha P mijenja u trodimenzionalnom prostoru u različitim smjerovima, tj. konkretnije kako se mijenjaju normale te plohe kada se krećemo po plohi. Velika većina podataka o zakrivljenosti plohe „spremljena“ je u operatoru oblika plohe.

Lako se vidi da je operator oblika ravnine nuloperator za sve točke ravnine. Za neravnu plohu normala n će se okretati od točke do točke i O više neće biti nuloperator. Svaku normalu u nekoj točki na plohi moguće je odabrati na dva načina, moguće je odabrati n i $-n$. Operator oblika plohe primjenjen na n bit će negativna vrijednost operatora oblika plohe od $-n$.

Teorem.

Operator oblika plohe je simetrična funkcija, tj. za svaka dva vektora $U, V \in T_S P$ vrijedi

$$O_S(U) \cdot V = U \cdot O_S(V).$$

Dokaz.

Vektore U i V možemo prikazati kao linearnu kombinaciju vektora x_u i x_v , tj.

$$U = ax_u + bx_v \in T_S P$$

$$V = cx_u + dx_v \in T_S P.$$

Neka je $U = \mathbf{x}_u$, $V = \mathbf{x}_v$, a $n_u = D_{\mathbf{x}_u} n$.

Budući da je $n \cdot \mathbf{x}_v = 0$, vrijedi $0 = (n \cdot \mathbf{x}_v)_u = n_u \cdot \mathbf{x}_v + n \cdot \mathbf{x}_{vu}$, nadalje vrijedi

$$\begin{aligned} O_S(\mathbf{x}_u) \cdot \mathbf{x}_v &= -D_{\mathbf{x}_u} n(P) \cdot \mathbf{x}_v = -n_u \cdot \mathbf{x}_v \\ &= n \cdot \mathbf{x}_{vu} = n \cdot \mathbf{x}_{uv} \\ &= -n_v \cdot \mathbf{x}_u = -D_{\mathbf{x}_v} n(P) \cdot \mathbf{x}_u \\ &= O_S(\mathbf{x}_v) \cdot \mathbf{x}_u \end{aligned}$$

Slijedi

$$\begin{aligned} O_S(U) \cdot V &= O_S(a\mathbf{x}_u + b\mathbf{x}_v) \cdot (c\mathbf{x}_u + d\mathbf{x}_v) = (aO_S(\mathbf{x}_u) + bO_S(\mathbf{x}_v)) \cdot (c\mathbf{x}_u + d\mathbf{x}_v) \\ &= acO_S(\mathbf{x}_u) \cdot \mathbf{x}_u + adO_S(\mathbf{x}_u) \cdot \mathbf{x}_v + bcO_S(\mathbf{x}_v) \cdot \mathbf{x}_u + bdO_S(\mathbf{x}_v) \cdot \mathbf{x}_v \\ &= acO_S(\mathbf{x}_u) \cdot \mathbf{x}_u + adO_S(\mathbf{x}_v) \cdot \mathbf{x}_u + bcO_S(\mathbf{x}_u) \cdot \mathbf{x}_v + bdO_S(\mathbf{x}_v) \cdot \mathbf{x}_v \\ &= cO_S(\mathbf{x}_u) \cdot (a\mathbf{x}_u + b\mathbf{x}_v) + dO_S(\mathbf{x}_v) \cdot (a\mathbf{x}_u + b\mathbf{x}_v) \\ &= (a\mathbf{x}_u + b\mathbf{x}_v) \cdot (cO_S(\mathbf{x}_u) + dO_S(\mathbf{x}_v)) \\ &= (a\mathbf{x}_u + b\mathbf{x}_v) \cdot O_S(c\mathbf{x}_u + d\mathbf{x}_v) \\ &= U \cdot O_S(V) \end{aligned}$$

■

Ako $U, V \in T_S P$, tada druga fundamentalna forma plohe glasi

$$II_S(U, V) = O_S(U) \cdot V.$$

Definiramo funkcije e, f, g kao

$$\begin{aligned} e &= II_S(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u) = -D_{\mathbf{x}_u} n \cdot \mathbf{x}_u = \mathbf{x}_{uu} \cdot n \\ f &= II_S(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v) = -D_{\mathbf{x}_u} n \cdot \mathbf{x}_v = \mathbf{x}_{uv} \cdot n = \mathbf{x}_{vu} \cdot n = II_S(\mathbf{x}_v, \mathbf{x}_u) \\ g &= II_S(\mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v) = -D_{\mathbf{x}_v} n \cdot \mathbf{x}_v = \mathbf{x}_{vv} \cdot n \end{aligned}$$

koje se nazivaju fundamentalne veličine drugog reda te ih možemo zapisati u obliku matrice

$$II_S = \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{uu} \cdot n & \mathbf{x}_{uv} \cdot n \\ \mathbf{x}_{uv} \cdot n & \mathbf{x}_{vv} \cdot n \end{bmatrix}$$

i ona tada predstavlja operator oblika plohe O_S , ali jedino ako je $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ ortonormirana baza.

Budući da je normala n plohe u nekoj točki S okomita na vektor \mathbf{x}_u , skalarni umnožak normale n i vektora \mathbf{x}_u jednak je nula. Slijedi

$$\begin{aligned} n \cdot \mathbf{x}_u &= 0 / \frac{\partial}{\partial u} \\ n_u \mathbf{x}_u + n \mathbf{x}_{uu} &= 0 \end{aligned}$$

$$D_{x_u} n \cdot x_u + nx_{uu} = 0$$

$$x_{uu}n = -D_{x_u} n \cdot x_u$$

čime je dokazana jednakost uz koeficijent e . Analogno slijedi i za ostala dva koeficijenta f i g .

Teorem.

Matrični zapis operatora oblika plohe u bazi $\{x_u, x_v\}$ kada nije nužno da je baza ortonormirana glasi

$$O_S = I_S^{-1} \cdot II_S = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix}$$

Dokaz.

$$O_S(x_u) = ax_u + bx_v / \cdot x_u$$

$$O_S(x_u) = ax_u + bx_v / \cdot x_v$$

$$O_S(x_u) \cdot x_u = ax_u^2 + bx_u x_v$$

$$O_S(x_u) \cdot x_v = ax_u x_v + bx_v^2$$

$$e = Ea + Fb$$

$$f = Fa + Gb$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

Nadalje,

$$O_S(x_v) = cx_u + dx_v / \cdot x_u$$

$$O_S(x_v) = cx_u + dx_v / \cdot x_v$$

$$O_S(x_v) \cdot x_u = cx_u^2 + dx_u x_v$$

$$O_S(x_v) \cdot x_v = cx_u x_v + dx_v^2$$

$$f = Ec + Fd$$

$$g = Fc + Gd$$

$$\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}$$

Konačno dobivamo

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix}$$

što je i trebalo dokazati. ■

Znajući formulu normale i neka je $W = \sqrt{EG - F^2}$ kao i prije, za koeficijent e vrijedi

$$e = \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{x}_{uu} \cdot \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|} = \frac{\det(\mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v)}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{\det(\mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v)}{W}$$

Analogno i za ostala dva koeficijenta

$$f = \frac{\det(\mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v)}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{\det(\mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v)}{W}$$

$$g = \frac{\det(\mathbf{x}_{vv}, \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v)}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{\det(\mathbf{x}_{vv}, \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v)}{W}.$$

Neka je, kao i u prošlim primjerima, $U = a\mathbf{x}_u + b\mathbf{x}_v$ i $V = c\mathbf{x}_u + d\mathbf{x}_v$. Primjenjujući drugu fundamentalnu formu plohe dobivamo redom

$$\begin{aligned} II_S(U, V) &= II_S(a\mathbf{x}_u + b\mathbf{x}_v, c\mathbf{x}_u + d\mathbf{x}_v) \\ &= acII_S(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u) + adII_S(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v) + bcII_S(\mathbf{x}_v, \mathbf{x}_u) + bdII_S(\mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v) \\ &= e(ac) + f(bc + ad) + g(bd), \end{aligned}$$

što također nazivamo *drugom fundamentalnom formom plohe*.

Specijalno,

$$II_S(U, U) = ea^2 + 2fab + gb^2,$$

što najčešće pišemo u obliku

$$II = edu^2 + 2fdudv + gdv^2.$$

4.3. Primjeri

Pogledajmo ravninu i cilindar. Kako smo ranije vidjeli, ove plohe imaju istu prvu fundamentalnu formu. Ovdje će druga fundamentalna forma računski pokazati da te dvije plohe po obliku nisu iste iako lokalno jesu izometrične.

PRIMJER 4.1

Neka je xy -ravnina zadana parametarski s $\mathbf{x}(u, v) = (u, v, 0)$. Odredimo joj fundamentalne veličine drugog reda.

Rješenje

Iz primjera 3.1 na stranici 12 imamo

$$E = G = 1$$

$$F = 0$$

$$\mathbf{x}_u = (1, 0, 0) \text{ i } \mathbf{x}_v = (0, 1, 0).$$

Slijedi

$$\mathbf{x}_{uu} = \mathbf{x}_{uv} = \mathbf{x}_{vv} = (0, 0, 0)$$

$$e = f = g = 0.$$

Matrični zapis operatora oblika plohe ravnine u bazi $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ tada glasi

$$O(u, v) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

PRIMJER 4.2

Neka je cilindar zadan parametarski s $\mathbf{x}^*(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$ (cilindar s polumjerom 1).

Odredimo mu fundamentalne veličine drugog reda.

Rješenje.

Iz primjera 3.2 na stranici 12 imamo

$$E = G = 1$$

$$F = 0$$

$$\mathbf{x}_u^* = (-\sin u, \cos u, 0) \text{ i } \mathbf{x}_v^* = (0, 0, 1)$$

Slijedi

$$\mathbf{x}_{uu}^* = (-\cos u, -\sin u, 0)$$

$$\mathbf{x}_{uv}^* = \mathbf{x}_{vv}^* = (0, 0, 0)$$

$$W = \sqrt{EG - F^2} = 1$$

Iz Maxime:

✓ determinanta $\det(\mathbf{x}_{uu}^*, \mathbf{x}_u^*, \mathbf{x}_v^*)$

```
m: matrix([-cos(u), -sin(u), 0], [-sin(u), cos(u), 0], [0, 0, 1]);
```

```
determinant(m);
```

```
-cos(u)^2 - sin(u)^2
```

Budući da vrijedi $\sin^2 u + \cos^2 u = 1$, determinanta $\det(\mathbf{x}_{uu}^*, \mathbf{x}_u^*, \mathbf{x}_v^*)$ iznosi -1 .

✓ determinante $\det(\mathbf{x}_{uv}^*, \mathbf{x}_u^*, \mathbf{x}_v^*)$ i $\det(\mathbf{x}_{vv}^*, \mathbf{x}_u^*, \mathbf{x}_v^*)$

```
m: matrix([0,0,0],[-sin(u),cos(u),0],[0,0,1]);
```

```
determinant(m);
```

```
0
```

Slijedi

$$e = \frac{\det(\mathbf{x}_{uu}^*, \mathbf{x}_u^*, \mathbf{x}_v^*)}{W} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$f = \frac{\det(\mathbf{x}_{uv}^*, \mathbf{x}_u^*, \mathbf{x}_v^*)}{W} = \frac{0}{1} = 0$$

$$g = \frac{\det(\mathbf{x}_{vv}^*, \mathbf{x}_u^*, \mathbf{x}_v^*)}{W} = \frac{0}{1} = 0$$

Matrični zapis operatora oblika plohe cilindra u bazi $\{\mathbf{x}_u^*, \mathbf{x}_v^*\}$ tada glasi

$$O(u, v) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

5. Zakrivljenosti

Računanje zakrivljenosti plohe daleko je kompliciranije od računanja zakrivljenosti krivulje. Neka je α krivulja u trodimenzionalnom prostoru, a S točka na toj krivulji. Zakrivljenost od α mjeri odstupanje krivulje α od tangente (*pravca*) krivulje u točki S . Analogno, zakrivljenost plohe P u trodimenzionalnom prostoru u točki S trebala bi mjeriti zakrivljenost cijele plohe u svim smjerovima, tj. odstupanje plohe od tangencijalne *ravnine* u točki S . Krivulja se od tangente u točki S kreće uvijek u samo dva smjera, a ploha u istoj točki u beskonačno mnogo smjerova. Općenito, zakrivljenost plohe ovisi o smjeru u kojem gledamo zakrivljenost.

Postoji nekoliko pojmova vezanih za zakrivljenost ploha:

- ✓ normalna zakrivljenost k duž nekog tangencijalnog vektora v_S
- ✓ glavne zakrivljenosti k_1 i k_2
- ✓ srednja zakrivljenost H
- ✓ Gaussova zakrivljenost K

Gaussova i srednja zakrivljenost predstavljaju dvije najvažnije funkcije vezane uz plohe.

5.1. Normalna zakrivljenost

Funkcija, koja radi sličnu stvar kao i operator oblika plohe, zove se *normalna zakrivljenost*. Zadana je sljedećom formulom

$$k(u_S) = O_S(u_S) \cdot u_S = II_S(u_S, u_S),$$

gdje je u_S jedinični tangencijalni vektor plohe u točki S .

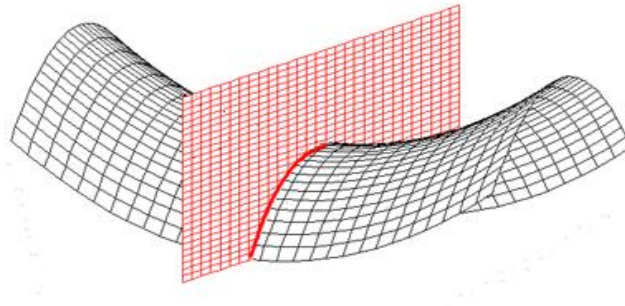
Općenitije, ukoliko je v_S bilo koji tangencijalni vektor koji nije nulvektor, vrijedi

$$k(v_S) = \frac{O_S(v_S) \cdot v_S}{\|v_S\|^2}.$$

Geometrijska interpretacija normalne zakrivljenosti je sljedeća:

Neka je zadana ploha $P \subseteq \mathbb{R}^3$ i neka je u_S jedinični tangencijalni vektor na plohu P u točki S . Neka je π ravnina zadana normalom U_S na plohu P u točki S i vektorom u_S . Tada se presjek plohe P i ravnine π zove *normalni presjek*. Zakrivljenost krivulje normalnog presjeka do na predznak je jednaka normalnoj zakrivljenosti.

Presjek plohe i ravnine zadane normalom plohe u nekoj točki i tangencijalnim vektorom iz iste točke, tj. normalni presjek, prikazuje slika 5.1. Crvena krivulja je normalni presjek.



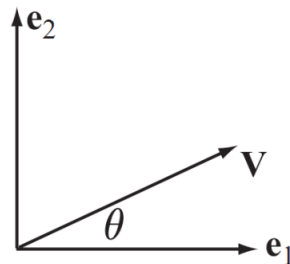
Slika 5.1. Normalni presjek plohe i ravnine

VAŽNI POJMOVI

Linearni operator O_S ima dvije svojstvene vrijednosti, $k_1(S)$ i $k_2(S)$. Te dvije svojstvene vrijednosti, nazivamo *glavne zakrivljenosti* plohe P u točki S i one su ekstremne zakrivljenosti. Tangencijalni vektori pridruženih krivulja nazivamo *glavnim smjerovima* u točki S i oni su uvijek okomiti. Neka se jedinični vektori glavnih smjerova zovu e_1 i e_2 . Ravnine koje su zadane glavnim vektorima i normalom na krivulju u točki S , nazivaju se *glavne ravnine*. Krivulja na plohi kojoj su tangencijalni vektori u svim njenim točkama glavni vektori, naziva se *crtu krivine*.

Teorem.

Neka su e_1 i e_2 jedinični vektori glavnih smjerova u točki S s pripadajućim glavnim zakrivljenostima k_1 i k_2 . Neka je $V = \cos \theta \cdot e_1 + \sin \theta \cdot e_2$ za neki $\theta \in [0, 2\pi)$, što je prikazano na slici 5.2. Tada je $II_S(V, V) = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta$.



Slika 5.2. Vektori V, e_1, e_2 i kut θ [Shifrin, 2008, str. 47]

Dokaz.

Budući da je $O_S(e_1) = k_1 e_1$ i $O_S(e_2) = k_2 e_2$, slijedi

$$\begin{aligned}
 II_S(V, V) &= O_S(V) \cdot V \\
 &= O_S(\cos \theta \cdot e_1 + \sin \theta \cdot e_2) \cdot (\cos \theta \cdot e_1 + \sin \theta \cdot e_2) \\
 &= (\cos \theta k_1 \cdot e_1 + \sin \theta k_2 \cdot e_2) \cdot (\cos \theta \cdot e_1 + \sin \theta \cdot e_2) \\
 &= k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta
 \end{aligned}$$

■

Normalna zakrivljenost povezana je s koeficijentima prve i druge fundamentalne forme na sljedeći način:

$$k(v_s) = \frac{ea^2 + 2fab + gb^2}{Ea^2 + 2Fab + Gb^2} = \frac{II_s}{I_s}$$

gdje je

$$v_s = ax_u(u_0, v_0) + bx_v(u_0, v_0)$$

tangencijalni vektor duž kojeg gledamo zakrivljenost plohe.

5.2. Gaussova i srednja zakrivljenost

Matrični zapis linearnog operatora $f: U \rightarrow V$ je matrica F tipa (m, n) , a njezini stupci su koordinatne matrice slika $F(a_k)$ vektora baze A u bazi B , gdje je

$$A = \{a_1, \dots, a_n\} \text{ baza za vektorski prostor } U, \dim U = n$$

$$B = \{b_1, \dots, b_m\} \text{ baza za vektorski prostor } V, \dim V = m$$

Trag matrice F je zbroj elemenata na glavnoj dijagonali. Označava se s $\text{tr} f = \text{tr} F$.

Općenito gledano, neka su F i F' matrični zapisi linearnog operatora f u paru baza A i B , odnosno A' i B' . Tada vrijedi

$$F' = T^{-1}FS,$$

gdje je S matrica prijelaza iz baze A u A' , a T matrica prijelaza iz baze B u B' .

U vezi zakrivljenosti ploha, gledat ćemo linearne operatore oblika $F: V \rightarrow V$.

U tom slučaju vrijedi

$$F' = T^{-1}FT,$$

gdje je T matrica prijelaza iz baze B u bazu B' , a F i F' su matrični zapisi linearnog operatora f u bazi B , odnosno bazi B' .

Nadalje, vrijedi

$$\det F = \det(T^{-1}FT)$$

$$\text{tr} F = \text{tr}(T^{-1}FT)$$

Neka je P ploha u \mathbb{R}^3 , S točka na toj plohi, a O_S operator oblika te plohe u toj točki. *Gaussova zakrivljenost* K i *srednja zakrivljenost* H plohe P su funkcije $K, H: P \rightarrow \mathbb{R}$ zadane s

$$K(S) = \det(O_S)$$

$$H(S) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(O_S).$$

Kažemo da ploha ima konstantnu zakrivljenost ako je Gaussova zakrivljenost u svakoj njezinoj točki konstantna, tj. $K(S) = \textit{konst.}$, za svaku točku S na plohi.

Gaussova i srednja zakrivljenost povezane su s glavnim zakrivljenostima na sljedeći način

$$K = k_1 k_2$$

$$H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

Teorem.

Gaussova i srednja zakrivljenost povezane su s koeficijentima prve i druge fundamentalne forme na sljedeći način:

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

$$H = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)}$$

gdje su E, F, G koeficijenti prve, a e, f, g koeficijenti druge fundamentalne forme plohe kao i dosad.

Dokaz.

$$O_S = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix}$$

$$K(S) = \det(O_S)$$

$$= \det \left(\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}} \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ f & g \end{vmatrix}$$

$$= \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

$$H(S) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(O_S)$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{tr} \left(\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{tr} \left(\frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{tr} \left(\frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} eG - fF & Gf - Fg \\ fE - eF & gE - fF \end{bmatrix} \right) \\ = \frac{eG - 2fF + gE}{2 \cdot (EG - F^2)}$$

■

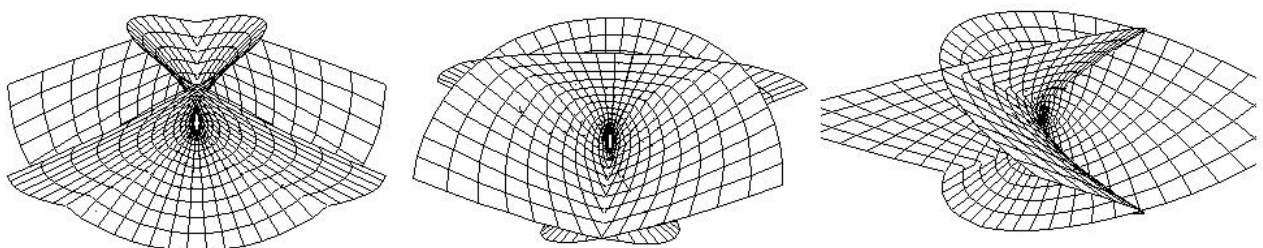
Pomoću Gaussove zakrivljenosti možemo razlikovati četiri vrste točaka na plohi:

- ✓ S je eliptička ako $K(S) > 0$ (glavne zakrivljenosti k_1 i k_2 imaju isti predznak)
- ✓ S je hiperbolička ako $K(S) < 0$ (k_1 i k_2 imaju različiti predznak)
- ✓ S je parabolička ako $K(S) = 0$, $O_S \neq \mathbf{0}$ (jedna od k_1 i k_2 je nula)
- ✓ S je planarna ako $K(S) = 0$, $O_S = \mathbf{0}$ ($k_1 = k_2 = 0$)

Zamislimo graf sedlaste funkcije (npr. slika 2.1). Intuitivno možemo shvatiti da su sve točke hiperboličke i bez da znamo mnogo o Gaussovoj zakrivljenosti. Iz toga se dalje može zaključiti da za sve točke vrijedi $K(S) < 0$. Kod te je plohe Gaussova zakrivljenost svuda negativna jer se ploha krivi od svoje normale, a kod sfere je svugdje pozitivna jer se ploha krivi prema normali.

Govorimo o minimalnoj plohi ako srednja zakrivljenost u svakoj njezinoj točki iznosi nula, tj. $H(S) = 0$ za svaku točku S na plohi.

Trivijalni primjer minimalne plohe je ravnina. Zatim su primjeri katenoid, koji nastaje rotacijom lančaniće (krivulja slična paraboli, primjer iz prirode je lanac obješen za dva kraja tako da malo visi), helikoid, Enneperova ploha (Slika 5.3.)...



Slika 5.3. Enneperova minimalna ploha iz različitih kuteva gledanja

Naredbe za Enneperovu plohu u Maximi, koje sadrže parametarske jednadžbe plohe, bile su:

```
enneper:parametric_surface(u*(1-u^2/3+v^2)/3,-v*(1-v^2/3+u^2)/3,
(u^2-v^2)/3, u,-4,4, v,-4,4);

draw3d(axis_3d=false,xticks=false,ytics=false,zticks=false,
surface_hide=true, enneper);
```


5.3. Primjer

PRIMJER 5.1 – ENNEPEROVA MINIMALNA PLOHA

Kao primjer će u Maximi biti pokazano da je Enneperova ploha minimalna ploha, tj. da joj je srednja zakrivljenost jednaka nula, tj. $H = 0$.

Parametarske jednadžbe Enneperove plohe su

$$x(u, v) = \left(\frac{u}{3} \left(1 - \frac{u^2}{3} + v^2 \right), -\frac{v}{3} \left(1 - \frac{v^2}{3} + u^2 \right), \frac{u^2 - v^2}{3} \right)$$

Naredba za parcijalnu derivaciju po u i rezultat

```
deru: ratsimp(diff([u*(1-u^2/3+v^2)/3, -v*(1-v^2/3+u^2)/3, (u^2-v^2)/3], u));
```

$$\left[\frac{v^2 - u^2 + 1}{3}, -\frac{2uv}{3}, \frac{2u}{3} \right]$$

Naredba za parcijalnu derivaciju po v i rezultat

```
derv: ratsimp(diff([u*(1-u^2/3+v^2)/3, -v*(1-v^2/3+u^2)/3, (u^2-v^2)/3], v));
```

$$\left[\frac{2uv}{3}, \frac{v^2 - u^2 - 1}{3}, -\frac{2v}{3} \right]$$

Fundamentalne veličine prvog reda prema formulama

$$E = I_S(x_u, x_u) = x_u \cdot x_u$$

$$F = I_S(x_u, x_v) = x_u \cdot x_v$$

$$G = I_S(x_v, x_v) = x_v \cdot x_v$$

```
E: ratsimp(deru.deru);
```

$$\frac{v^4 + (2u^2 + 2)v^2 + u^4 + 2u^2 + 1}{9}$$

```
F: ratsimp(deru.derv);
```

$$0$$

```
G: ratsimp(derv.derv);
```

$$\frac{v^4 + (2u^2 + 2)v^2 + u^4 + 2u^2 + 1}{9}$$

Parcijalne derivacije drugog reda

deruu: diff(deru,u);

$$\left[-\frac{2u}{3}, -\frac{2v}{3}, \frac{2}{3}\right]$$

deruv: diff(deru,v);

$$\left[\frac{2v}{3}, -\frac{2u}{3}, 0\right]$$

dervv: diff(derv,v);

$$\left[\frac{2u}{3}, \frac{2v}{3}, -\frac{2}{3}\right]$$

Definiranje varijable W

W: sqrt(E*G-F^2);

$$\frac{v^4 + (2u^2 + 2)v^2 + u^4 + 2u^2 + 1}{9}$$

Definiranje funkcije za računanje fundamentalnih veličina drugog reda za formule

$$e = \frac{\det(x_{uu}, x_u, x_v)}{W}$$

$$f = \frac{\det(x_{uv}, x_u, x_v)}{W}$$

$$g = \frac{\det(x_{vv}, x_u, x_v)}{W}$$

$h(x, y, z, w) := \text{determinant}(\text{matrix}(x, y, z)) / w;$

$$h(x, y, z, w) := \frac{\text{determinant}(\text{matrix}(x, y, z))}{w}$$

i pripadajući rezultati

e: ratsimp(h(deruu, deru, derv, W));

$$-\frac{2}{3}$$

f: ratsimp(h(deruv, deru, derv, W));

$$0$$

`g:ratsimp(h(derivv,deru,deriv,W));`

$$-\frac{2}{3}$$

Definiranje formule za računanje srednje zakrivljenosti H prema formuli

$$H = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)}$$

`H: (e*G-2*f*F+g*E) / (2*W^2);`

i konačni rezultat

0

čime je dokazano da je Enneperova ploha minimalna, tj. $H = 0$.

6. Implementacija u Maximi

U ovom će poglavlju biti obuhvaćeno nekoliko primjera vezanih uz implementaciju prve i druge fundamentalne forme plohe te triju vrsta zakrivljenosti na plohi u Maximi.

6.1. Funkcije

Funkcija u Maximi za definiranje prve fundamentalne forme plohe koja vraća matricu s fundamentalnim veličinama prvog reda, E, F, G :

```
prva_fund_forma(x,u,v):=block([xu,xv,U,V],
  xu: diff(x(U,V),U),
  xv: diff(x(U,V),V),
  EE: subst([U=u,V=v],xu.xu),
  FF: subst([U=u,V=v],xu.xv),
  GG: subst([U=u,V=v],xv.xv),
  radcan(trigsimp(ratsimp(matrix([EE,FF],[FF,GG]))))
)$
```

Funkcija u Maximi za definiranje druge fundamentalne forme plohe koja vraća matricu s fundamentalnim veličinama drugog reda, e, f, g :

```
druga_fund_forma(x,u,v):=block
([xu,xv,xuu,xuv,xvv,U,V],
  xu: diff(x(U,V),U),
  xv: diff(x(U,V),V),
  xuu: diff(xu,U),
  xuv: diff(xu,V),
  xvv: diff(xv,V),
  EE: subst([U=u,V=v],xu.xu),
  FF: subst([U=u,V=v],xu.xv),
  GG: subst([U=u,V=v],xv.xv),
  W: sqrt(EE*GG-FF^2),
  ee: subst([U=u,V=v],(determinant(matrix(xuu,xu,xv)))/W),
  ff: subst([U=u,V=v],(determinant(matrix(xuv,xu,xv)))/W),
  gg: subst([U=u,V=v],(determinant(matrix(xvv,xu,xv)))/W),
  radcan(trigsimp(ratsimp(matrix([ee,ff],[ff,gg]))))
)$
```

Funkcija u Maximi za definiranje normalne zakrivljenosti, gdje su koeficijenti a i b koordinate tangencijalnog vektora u bazi $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ duž kojeg želimo računati normalnu zakrivljenost plohe:

```
normalna_zakr(x,u,v,a,b):=block
( [xu,xv,xuu,xuv,xvv,U,V],
  xu: diff(x(U,V),U),
  xv: diff(x(U,V),V),
  xuu: diff(xu,U),
  xuv: diff(xu,V),
  xvv: diff(xv, V),
  EE: subst([U=u,V=v],xu.xu),
  FF: subst([U=u,V=v],xu.xv),
  GG: subst([U=u,V=v],xv.xv),
  W: sqrt(EE*GG-FF^2),
  ee: subst([U=u,V=v],(determinant(matrix(xuu,xu,xv)))/W),
  ff: subst([U=u,V=v],(determinant(matrix(xuv,xu,xv)))/W),
  gg: subst([U=u,V=v],(determinant(matrix(xvv,xu,xv)))/W),
  k: (ee*a^2+2*ff*a*b+gg*b^2)/(EE*a^2+2*FF*a*b+GG*b^2),
  radcan(trigsimp(ratsimp(k))))$
```

Funkcija u Maximi za definiranje Gaussove zakrivljenosti:

```
gaussova_zakr(x,u,v):=block
( [xu,xv,xuu,xuv,xvv,U,V],
  xu: diff(x(U,V),U),
  xv: diff(x(U,V),V),
  xuu: diff(xu,U),
  xuv: diff(xu,V),
  xvv: diff(xv, V),
  W: sqrt(EE*GG-FF^2),
  EE: subst([U=u,V=v],xu.xu),
  FF: subst([U=u,V=v],xu.xv),
  GG: subst([U=u,V=v],xv.xv),
  ee: subst([U=u,V=v],(determinant(matrix(xuu,xu,xv)))/W),
  ff: subst([U=u,V=v],(determinant(matrix(xuv,xu,xv)))/W),
  gg: subst([U=u,V=v],(determinant(matrix(xvv,xu,xv)))/W),
  K: (ee*gg-ff^2)/(EE*GG-FF^2),
  radcan(trigsimp(ratsimp(K))))$
```

Funkcija u Maximi za definiranje srednje zakrivljenosti:

```
srednja_zakr(x,u,v):=block
( [xu,xv,xuu,xuv,xvv,U,V],
  xu: diff(x(U,V),U),
  xv: diff(x(U,V),V),
  xuu: diff(xu,U),
  xuv: diff(xu,V),
  xvv: diff(xv,V),
  EE: subst([U=u,V=v],xu.xu),
  FF: subst([U=u,V=v],xu.xv),
  GG: subst([U=u,V=v],xv.xv),
  W: sqrt(EE*GG-FF^2),
  ee: subst([U=u,V=v],(determinant(matrix(xuu,xu,xv)))/W),
  ff: subst([U=u,V=v],(determinant(matrix(xuv,xu,xv)))/W),
  gg: subst([U=u,V=v],(determinant(matrix(xvv,xu,xv)))/W),
  H: (ee*GG-2*ff*FF+gg*EE)/(2*(EE*GG-FF^2)),
  radcan(trigsimp(ratsimp(H)))
)$
```

Funkcija u Maximi za definiranje operatora oblika plohe:

```
operator_oblika(x,u,v):=
invert(prva_fund_forma(x,u,v)).druga_fund_forma(x,u,v);
```

Funkcija je definirana koristeći teorem sa stranice 21, tj.

$$O_S = I_S^{-1} \cdot II_S.$$

6.2. Primjena funkcija na plohe

XY-RAVNINA

```
ravnina(u,v):=[u,v,0];
prva_fund_forma(ravnina,u,v);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

`druga_fund_forma(ravnina, u, v);`

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

`normalna_zakr(ravnina, u, v, 2, 3);`

0

`gaussova_zakr(ravnina, u, v);`

0

`srednja_zakr(ravnina, u, v);`

0

`operator_oblika(ravnina, u, v);`

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- ✓ Intuitivno je jasno da su sve tri vrste zakrivljenosti i operator oblika plohe kod ravnine jednaki nula, odnosno nulmatrica budući da ravnina nije nimalo zakrivljena.

CILINDAR

`cilindar(u, v) := [cos(u), sin(u), v];`

`prva_fund_forma(cilindar, u, v);`

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

`druga_fund_forma(cilindar, u, v);`

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

`normalna_zakr(cilindar, u, v, 2, 3);`

$$-\frac{4}{13}$$

`gaussova_zakr(cilindar, u, v);`

0

srednja_zakr(cilindar, u, v);

$$-\frac{1}{2}$$

operator_oblika(cilindar, u, v);

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

HELIKOID

helikoid[b](u, v) := [u*cos(v), u*sin(v), b*v];

prva_fund_forma(helikoid[b], u, v);

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^2 + b^2 \end{bmatrix}$$

prva_fund_forma(helikoid[1], 1, 5);

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

druga_fund_forma(helikoid[b], u, v);

$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{b}{\sqrt{u^2 + b^2}} \\ -\frac{b}{\sqrt{u^2 + b^2}} & 0 \end{bmatrix}$$

druga_fund_forma(helikoid[1], 1, 5);

$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}$$

normalna_zakr(helikoid[b], u, v, 2, 3);

$$\frac{36}{\sqrt{u^2 + 9}(9u^2 + 85)}$$

normalna_zakr(helikoid[b], u, v, 1, 0);

$$0$$

gaussova_zakr(helikoid[b], u, v);

$$-\frac{b^2}{u^4 + (b^2 + 9)u^2 + 9b^2}$$

srednja_zakr(helikoid[b], u, v);

0

- ✓ Kao što se vidi iz računa za srednju zakrivljenost plohe, helikoid je jedna od minimalnih ploha.

operator_oblika(helikoid[b], u, v);

$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{b}{\sqrt{u^2 + b^2}} \\ -\frac{b}{(u^2 + b^2)^{3/2}} & 0 \end{bmatrix}$$

HELIKOID I KATENOID

Slijede helikoid i katenoid u parametrizaciji spomenutoj na stranici 16, koja glasi

$$x(u, v) = \cos \alpha \sinh v \sin u + \sin \alpha \cosh v \cos u$$

$$y(u, v) = -\cos \alpha \sinh v \cos u + \sin \alpha \cosh v \sin u$$

$$z(u, v) = u \cos \alpha + v \sin \alpha$$

gdje ćemo za $\alpha = 0$ dobiti *helikoid*, a za $\alpha = \frac{\pi}{2}$ katenoid.

```
helikoid2(u,v):=[cos(%pi)*sinh(v)*sin(u)+sin(%pi)*cosh(v)*cos(u),
-cos(%pi)*sinh(v)*cos(u)+sin(%pi)*cosh(v)*sin(u),
u*cos(%pi)+v*sin(%pi)];
```

```
katenuoid(u,v):=[cos(%pi/2)*sinh(v)*sin(u)+sin(%pi/2)*cosh(v)*cos(u),
-cos(%pi/2)*sinh(v)*cos(u)+sin(%pi/2)*cosh(v)*sin(u),
u*cos(%pi/2)+v*sin(%pi/2)];
```

prva_fund_forma(helikoid2,u,v);

$$\begin{bmatrix} \cosh(v)^2 & 0 \\ 0 & \cosh(v)^2 \end{bmatrix}$$

`prva_fund_forma(katenoid,u,v);`

$$\begin{bmatrix} \cosh(v)^2 & 0 \\ 0 & \cosh(v)^2 \end{bmatrix}$$

✓ Kao što se vidi iz računa, helikoid i katenoid imaju istu prvu fundamentalnu formu.

`druga_fund_forma(katenoid, u, v);`

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

`normalna_zakr(katenoid,u,v,1,0);`

$$-\frac{1}{\cosh(v)^2}$$

`gaussova_zakr(katenoid,u,v);`

$$-\frac{1}{\cosh(v)^4}$$

`srednja_zakr(katenoid,u,v);`

$$0$$

✓ Kao što se vidi iz računa za srednju zakrivljenost plohe, katenoid je jedna od minimalnih ploha.

`operator_oblika(katenoid,u,v);`

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{\cosh(v)^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\cosh(v)^2} \end{bmatrix}$$

ENNEPEROVA MINIMALNA PLOHA

```
enneper(u,v):=[u*(1-u^2/3+v^2)/3, -v*(1-v^2/3+u^2)/3, (u^2-v^2)/3];
```

```
prva_fund_forma(enneper,u,v);
```

$$\begin{bmatrix} \frac{v^4 + (2u^2 + 2)v^2 + u^4 + 2u^2 + 1}{9} & 0 \\ 0 & \frac{v^4 + (2u^2 + 2)v^2 + u^4 + 2u^2 + 1}{9} \end{bmatrix}$$

```
druga_fund_forma(enneper, u, v);
```

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

```
normalna_zakr(enneper, u, v, 2, 3);
```

$$\frac{30}{13v^4 + (26u^2 + 26)v^2 + 13u^4 + 26u^2 + 13}$$

```
gaussova_zakr(enneper, u, v);
```

$$\frac{36}{v^8 + (4u^2 + 4)v^6 + (6u^4 + 12u^2 + 6)v^4 + (4u^6 + 12u^4 + 12u^2 + 4)v^2 + u^8 + 4u^6 + 6u^4 + 4u^2 + 1}$$

```
srednja_zakr(enneper, u, v);
```

$$0$$

- ✓ Kao i u primjeru 5.1 sa stranica 30-32, ovdje se opet dokazalo da je Enneperova ploha minimalna.

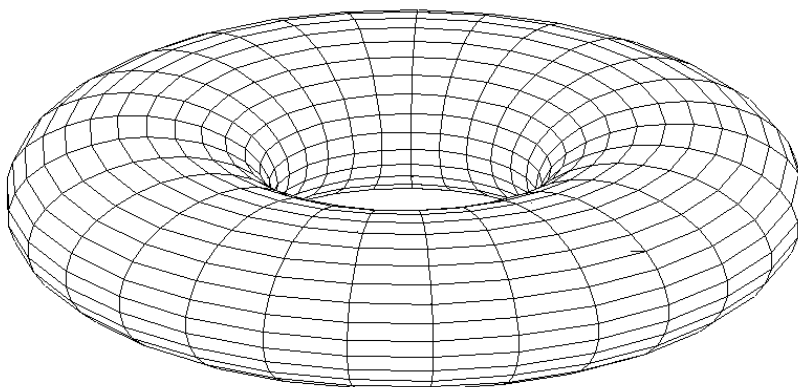
`operator_oblika(enneper,u,v);`

$$\begin{bmatrix} -\frac{6}{v^4+(2u^2+2)v^2+u^4+2u^2+1} & 0 \\ 0 & \frac{6}{v^4+(2u^2+2)v^2+u^4+2u^2+1} \end{bmatrix}$$

TORUS

`torus[a,b](u,v):=[(b+a*cos(v))*cos(u),(b+a*cos(v))*sin(u),a*sin(v)];`

- ✓ Kod torusa imamo dva parametra, a i b , gdje je b polumjer od središta otvora torusa do središta cijevi torusa, a a je polumjer cijevi torusa. Pripadajuća slika je slika 6.1.



Slika 6.1. Torus

`prva_fund_forma(torus[a,b],u,v);`

$$\begin{bmatrix} a^2 \cos(v)^2 + 2ab \cos(v) + b^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{bmatrix}$$

`druga_fund_forma(torus[a,b],u,v);`

$$\begin{bmatrix} -\frac{a^2 \cos(v)^2 + ab \cos(v)}{|a|} & 0 \\ 0 & -|a| \end{bmatrix}$$

druga_fund_forma(torus[1,1],u,v);

$$\begin{bmatrix} -\cos(v)^2 - \cos(v) & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

normalna_zakr(torus[a,b],u,v,1,0);

$$-\frac{\cos(v)}{|\cos(v)|}$$

trigreduce(gaussova_zakr(torus[a,b],u,v));

$$\frac{\cos(v)}{a^2 \cos(v) + a b}$$

srednja_zakr(torus[a,b],u,v);

$$-\frac{2 a \cos(v) + b}{2 a |a| \cos(v) + 2 |a| b}$$

operator_oblika(torus[a,b],u,v);

$$\begin{bmatrix} -\frac{a^2 \cos(v)^2 + a b \cos(v)}{|a| (a^2 \cos(v)^2 + 2 a b \cos(v) + b^2)} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{|a|} \end{bmatrix}$$

SFERA

sfera(u,v):=[2*cos(u)*sin(v),2*sin(u)*sin(v),2*cos(v)];

prva_fund_forma(sfera,u,v);

$$\begin{bmatrix} 4 \sin(v)^2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

`druga_fund_forma(sfera,u,v);`

$$\begin{bmatrix} 2 \sin(v) |\sin(v)| & 0 \\ 0 & \frac{2 \sin(v)}{|\sin(v)|} \end{bmatrix}$$

`normalna_zakr(sfera,u,v,2,3);`

$$\frac{4 \sin(v)^3 + 9 \sin(v)}{(8 \cos(v)^2 - 26) |\sin(v)|}$$

`gaussova_zakr(sfera,u,v);`

$$\frac{1}{4}$$

- ✓ Kao što se vidi iz računa, sfera je jedna od ploha s konstantnom Gaussovom zakrivljenošću.

`srednja_zakr(sfera,u,v);`

$$\frac{\sin(v)}{2 |\sin(v)|}$$

`operator_oblika(sfera,u,v);`

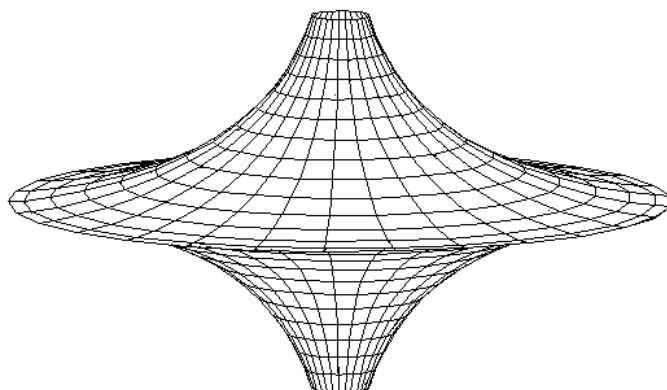
$$\begin{bmatrix} \frac{|\sin(v)|}{2 \sin(v)} & 0 \\ 0 & \frac{\sin(v)}{2 |\sin(v)|} \end{bmatrix}$$

- ✓ Sfera ima konstantan operator oblika plohe, što se intuitivno može protumačiti tako da ploha iz svake točke izgleda jednako.

PSEUDOSFERA

`pseudosfera(u,v):=[sech(u)*cos(v), sech(u)*sin(v), u-tanh(u)];`

Pseudosfera je prikazana na slici 6.2.



Slika 6.2. Pseudosfera

`prva_fund_forma(pseudosfera,u,v);`

$$\begin{bmatrix} \frac{\cosh(u)^2 - 1}{\cosh(u)^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\cosh(u)^2} \end{bmatrix}$$

`trigreduce(druga_fund_forma(pseudosfera,u,v));`

$$\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2} \tanh(u)}{\sqrt{\cosh(2u)+1}} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2} \tanh(u)}{\sqrt{\cosh(2u)+1}} \end{bmatrix}$$

`normalna_zakr(pseudosfera,u,v,1,1);`

0

`trigreduce(gaussova_zakr(pseudosfera,u,v));`

-1

- ✓ Kao što se vidi iz računa, pseudosfera je kao i sfera također jedna od ploha s konstantnom Gaussovom zakrivljenošću i ona iznosi -1 .

`trigsimp(srednja_zakr(pseudosfera,u,v));`

$$\frac{\cosh(u)^2 - 2}{2 \sinh(u)}$$

`operator_oblika(pseudosfera,u,v);`

$$\begin{bmatrix} -\frac{\cosh(u) \sinh(u)}{(\cosh(u)^2 - 1) \sqrt{\sinh(u)^2 + 1}} & 0 \\ 0 & \frac{\cosh(u) \sinh(u)}{\sqrt{\sinh(u)^2 + 1}} \end{bmatrix}$$

7. Zaključak

Koeficijenti prve fundamentalne forme uvode metriku na plohu, kako bismo mogli izračunati duljinu neke krivulje na toj plohi, kut između dviju krivulja, pomoću njih je moguće izračunati površinu dijela plohe... Drugim riječima, uvodi se koordinatni sustav na plohu, kao što smo naviknuti kod ravnine. Ukoliko je $E = G = 1$ i $F = 0$, parcijalne derivacije parametarski zadane plohe, tj. vektori \mathbf{x}_u i \mathbf{x}_v , predstavljaju koordinatne vektore \vec{i} i \vec{j} , na koje smo naviknuti. Općenito vektori \mathbf{x}_u i \mathbf{x}_v čine kosokuti koordinatni sustav u tangencijalnoj ravnini, a pravokutni je ukoliko je $F = 0$.

„Problem“ prve fundamentalne forme je da ukoliko dvije plohe imaju istu prvu fundamentalnu formu plohe, one ne moraju biti jednake, kao npr. helikoid i katenoid, a taj problem rješava druga fundamentalna forma plohe koja uvodi pojam operatora oblika plohe. Operator oblika plohe mjeri zakrivljenost plohe u svim smjerovima u trodimenzionalnom prostoru.

Uz pojam operatora oblika plohe vežu se tri vrste zakrivljenosti – normalna, Gaussova i srednja zakrivljenost, a specifična je Gaussova po tome što je otporna na predznak normale.

Geometrijska interpretacija Gaussove zakrivljenosti je sljedeća. Zamislimo neku točku na odabranoj plohi i dio površine plohe oko te točke. Kada bi se normale plohe kretale po toj površini, njihovi bi krajevi opisali neku površinu – dio površine sfere, ako normale stavimo u ishodište (Gaussovo preslikavanje). Tada je Gaussova zakrivljenost u promatranoj točki jednaka kvocijentu tih površina i to se zapravo postiže na limesu, kada se odabrana površina na plohi „stisne“ u promatranu točku. Tada je taj limes jednak apsolutnoj vrijednosti Gaussove zakrivljenosti plohe u promatranoj točki.

Zanimljivost vezana uz Gaussovu zakrivljenost je Gaussov *Veličanstveni teorem*, koji kaže da je Gaussovu zakrivljenost moguće izračunati poznavajući samo metriku na plohi, tj. da fundamentalne veličine drugog reda e, f, g , nisu potrebne, već samo fundamentalne veličine prvog reda E, F, G .

Kroz nekoliko se praktičnih primjera u Maximi na kraju mogu vidjeti svojstva nekih jednostavnijih ploha, kao npr. da je Enneperova ploha minimalna ploha jer ima srednju zakrivljenost jednaku nula, da postoje plohe koje su lokalno izometrične, ali ne i globalno.

Literatura

1. Divjak, B., *Funkcije više varijabli*, prezentacija s kolegija Odabrana poglavlja matematike, FOI
2. Divjak, B., *Plohe u prostoru*, prezentacija s kolegija Odabrana poglavlja matematike, FOI
3. Divjak, B., *Linearni operatori*, prezentacija s kolegija Odabrana poglavlja matematike, FOI
4. Gorjanc, S., *Normalna, gaussova i srednja zakrivljenost u regularnoj točki plohe*, dostupno 1.7.2011. na http://www.grad.unizg.hr/itproject_math/Links/sonja/gauss/uvodno/uvodno.html
5. Gray, A., Abbena, E., Salamon, S., (2006). *Modern differential geometry of curves and surfaces with Mathematica*, Chapman & Hall/CRC
6. Shifrin, T., *DIFFERENTIAL GEOMETRY: A first course in curves and surfaces*, dostupno 1.7.2011. na <http://www.math.uga.edu/~shifrin/ShifrinDiffGeo.pdf>
7. Slapničar, I., *Usmjerene derivacije*, dostupno 1.7.2011. na <http://lavica.fesb.hr/mat3/predavanja/node11.html>
8. Weisstein, E. W., *Catenoid*. From MathWorld--A Wolfram Web Resource, dostupno 1.7.2011. na <http://mathworld.wolfram.com/Catenoid.html>
9. Weisstein, E. W., *Helicoid*. From MathWorld--A Wolfram Web Resource, dostupno 1.7.2011. na <http://mathworld.wolfram.com/Helicoid.html>
10. Weisstein, E. W., *Pseudosphere*. From MathWorld--A Wolfram Web Resource dostupno 1.7.2011. na <http://mathworld.wolfram.com/Pseudosphere.html>
11. Weisstein, E. W., *Torus*. From MathWorld--A Wolfram Web Resource dostupno 1.7.2011. na <http://mathworld.wolfram.com/Torus.html>