

Matematičke metode za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka Divjak,
Damir Horvat

Sadržaj

Dio I
Dio II
Dio III
Dio IV
Dio V
Dio VI
Dio VII
Dio VIII
Dio IX
Dio X

Sadržaj prvog dijela

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

• Klasična algebra vektora

- Uvod
- Orijentirana dužina
- Vektor
- Zbrajanje vektora
- Množenje vektora skalarom
- Kolinearni i komplanarni vektori
- Baza i koordinatizacija od V^3
- Skalarni produkt vektora
- Koordinatni prikaz skalarnog produkta
- Vektorski produkt vektora
- Koordinatni prikaz vektorskog produkta
- Mješoviti produkt vektora

Sadržaj

Dio I

Dio II

Dio III

Dio IV

Dio V

Dio VI

Dio VII

Dio VIII

Dio IX

Dio X



Sadržaj drugog dijela

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

● Analitička geometrija prostora

- Stereometrija. Euklidski prostor
- Kartezijev koordinatni sustav
- Jednadžba ravnine
- Udaljenost točke od ravnine
- Geometrijska interpretacija koeficijenata A, B, C, D
- Segmentni oblik jednadžbe ravnine
- Položaj dviju ravnina
- Jednadžba pravca
- Kut dvaju pravaca
- Kut pravca i ravnine
- Udaljenost točke od pravca
- Mimosmjerni pravci
- Udaljenost mimosmjernih pravaca
- Pramen ravnina
- Snop ravnina

Sadržaj

Dio I

Dio II

Dio III

Dio IV

Dio V

Dio VI

Dio VII

Dio VIII

Dio IX

Dio X

Sadržaj trećeg dijela

• Vektorski prostori

- Algebarske strukture
- Binarna operacija
- Grupoid. Polugrupa
- Monoid
- Grupa
- Primjeri grupa
- Prsten
- Primjeri prstena
- Polje
- Primjeri polja
- Vektorski ili linearni prostor
- Primjeri vektorskih prostora
- Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
- Linearni omotač skupa
- Potprostor vektorskog prostora
- Primjeri vektorskih potprostora
- Baza vektorskog prostora
- Egzistencija baze i dimenzija
- Koordinatizacija vektorskog prostora
- Transformacija koordinata

Sadržaj

Dio I

Dio II

Dio III

Dio IV

Dio V

Dio VI

Dio VII

Dio VIII

Dio IX

Dio X

Sadržaj četvrtog dijela

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

• Linearni operatori

- Definicija linearnog operatora
- Primjeri linearnih operatora
- Zadavanje linearnog operatora
- Izomorfizam vektorskih prostora
- Rang i defekt
- Matrični zapis linearnog operatora
- Primjeri matričnih zapisa
- Računanje slike vektora
- Izomorfizam matrica i linearnih operatora
- Odnos matričnih zapisa istog operatora
- Karakteristični polinom
- Minimalni polinom
- Invarijantni potprostori
- Svojstvene vrijednosti

Sadržaj

Dio I

Dio II

Dio III

Dio IV

Dio V

Dio VI

Dio VII

Dio VIII

Dio IX

Dio X

Sadržaj petog dijela

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

● Polinomi

- Definicija polinoma
- Prsten polinoma
- Jednakost polinoma
- Određenost polinoma
- Dijeljenje polinoma
- Hornerov algoritam
- Razvoj polinoma po potencijama od $x - a$
- Najveća zajednička mjera polinoma
- Kompleksni brojevi
- Nultočke polinoma
- Cjelobrojne nultočke
- Racionalne nultočke
- Kompleksne nultočke
- Simetrične jednadžbe
- Cardanova formula
- Ferrarijeva metoda

Sadržaj

Dio I

Dio II

Dio III

Dio IV

Dio V

Dio VI

Dio VII

Dio VIII

Dio IX

Dio X

Sadržaj šestog dijela

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

● Funkcije više varijabli

- Osnovne definicije
- Nivo-linije
- Kvadrike u \mathbb{R}^3
- Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
- Limes funkcije više varijabli
- Parcijalne derivacije
- Parcijalne derivacije višeg reda
- Diferencijabilnost funkcije
- Usmjerena derivacija
- Teorem srednje vrijednosti za funkcije više varijabli
- Parcijalno deriviranje složenih funkcija
- Derivacija implicitno zadane funkcije
- Ekstremi funkcija dvije varijable
- Uvjetni ekstremi

Sadržaj

Dio I

Dio II

Dio III

Dio IV

Dio V

Dio VI

Dio VII

Dio VIII

Dio IX

Dio X

Sadržaj sedmog dijela

- Plohe u prostoru
 - Zadavanje plohe
 - Sfera i elipsoid
 - Torus
 - Rotacijske plohe
 - Pravčaste plohe
 - Tangencijalna ravnina i normala plohe

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Sadržaj

Dio I

Dio II

Dio III

Dio IV

Dio V

Dio VI

Dio VII

Dio VIII

Dio IX

Dio X

Sadržaj osmog dijela

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

● Krivulje u prostoru

- Definicija krivulje
- Jednadžba tangente na prostornu krivulju
- Duljina luka krivulje
- Reparametrizacija krivulje
- Oskulacijska ravnina
- Frenetov trobrid
- Fleksija i torzija
- Frenetove formule
- Krivulje parametrizirane općim parametrom

Sadržaj

Dio I

Dio II

Dio III

Dio IV

Dio V

Dio VI

Dio VII

Dio VIII

Dio IX

Dio X

Sadržaj devetog dijela

- Dvostruki integral

- Problem površine
- Jednostruki integral
- Dvostruke sume
- Integriranje po pravokutniku
- Integriranje po omeđenom skupu
- Svojstva dvostrukog integrala
- Računanje dvostrukog integrala
- Zamjena varijabli u dvostrukom integralu

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Sadržaj

Dio I

Dio II

Dio III

Dio IV

Dio V

Dio VI

Dio VII

Dio VIII

Dio IX

Dio X

Sadržaj desetog dijela

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

- Obične diferencijalne jednačbe
 - Osnovne definicije
 - Separacija varijabli
 - Homogene diferencijalne jednačbe
 - Egzaktne diferencijalne jednačbe
 - Eulerovi multiplikatori
 - Linearne jednačbe 1. reda
 - Bernoullijeva jednačba
 - Diferencijalne jednačbe višeg reda

Sadržaj

Dio I

Dio II

Dio III

Dio IV

Dio V

Dio VI

Dio VII

Dio VIII

Dio IX

Dio X

Klasična algebra vektora

Uvod

Orijentirana dužina

Vektor

Zbrajanje vektora

Množenje skalarom

Kol. i kompl. vektori

Baza i koord. od V^3

Skalarni produkt

Koord. prikaz

Vektorski produkt

Koord. prikaz

Mješoviti produkt

Dio I

Klasična algebra vektora

● Klasična algebra vektora

- Uvod
- Orijentirana dužina
- Vektor
- Zbrajanje vektora
- Množenje vektora skalarom
- Kolinearni i komplanarni vektori
- Baza i koordinatizacija od V^3
- Skalarni produkt vektora
- Koordinatni prikaz skalarnog produkta
- Vektorski produkt vektora
- Koordinatni prikaz vektorskog produkta
- Mješoviti produkt vektora

Klasična algebra vektora

Uvod

Orijentirana dužina

Vektor

Zbrajanje vektora

Množenje skalarom

Kol. i kompl. vektori

Baza i koord. od V^3

Skalarni produkt

Koord. prikaz

Vektorski produkt

Koord. prikaz

Mješoviti produkt

dvije vrste veličina:

- skalari – određeni jednim brojem
- vektori – iznos i smjer (sila, brzina)

Vektorska algebra

- utemeljitelj nizozemac Simon Stevin (1548 - 1620)
- razvili je Grassman (1809 - 1877) i Hamilton (1805 - 1865)
- široka primjena u matematici, fizici, inženjerstvu

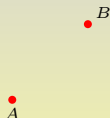
Orijentirana dužina

E^3 – standardni 3-dim Euklidski prostor

dvije točke $A, B \in E^3$

uređeni par $(A, B) = \overrightarrow{AB}$ - **orijentirana dužina**

A početak, B kraj



definicija



zorno

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Klasična algebra vektora

Uvod

Orijentirana dužina

Vektor

Zbrajanje vektora

Množenje skalarom

Kol. i kompl. vektori

Baza i koord. od V^3

Skalarni produkt

Koord. prikaz

Vektorski produkt

Koord. prikaz

Mješoviti produkt

Duljina

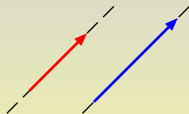
$$|\overrightarrow{AB}| = |\overline{AB}|$$

Smjer

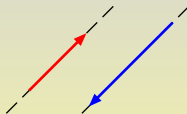
Smjer od \overrightarrow{AB} je određen pravcem AB

– smjer u E^3 je klasa ekvivalencije paralelnih pravaca

Orijentacija



iste orijentacije



različite orijentacije

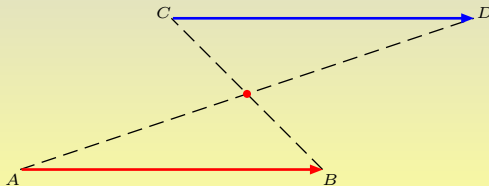
$$\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$$

Na skupu $D = E^3 \times E^3$ svih orijentiranih dužina definiramo relaciju ekvivalencije:

$\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD}$ akko orijentirane dužine imaju isti smjer, duljinu i orijentaciju

Ekvivalentna definicija

$\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD}$ akko dužine \overline{AD} i \overline{BC} imaju isto polovište



Zadatak 1.

Dokažite da su te dvije definicije ekvivalentne.

Propozicija 1.

$$\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{AC} \equiv \overrightarrow{BD}$$

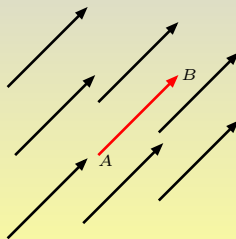
Vektor je klasa ekvivalencije orijentiranih dužina

$$[\overrightarrow{AB}]_{\equiv} = \{ \overrightarrow{PQ} \in D \mid \overrightarrow{PQ} \equiv \overrightarrow{AB} \} = \vec{a}$$

Kvocijentni skup (skup svih klasa ekvivalencije)

$$V^3 = D / \equiv$$

– elemente iz V^3 zovemo vektori



$$\text{Vektor } \vec{a} = [\overrightarrow{AB}]$$

Propozicija 2.

Neka je $\vec{a} \in V^3$ i $A \in E^3$. Tada postoji jedinstvena točka $B \in E^3$ takva da je $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$.

– kažemo da smo vektor \vec{a} nanijeli iz točke A

Nulvektor $\vec{0} = \overrightarrow{AA}$

Suprotni vektor od $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ je vektor $-\vec{a} = \overrightarrow{BA}$

Duljina, smjer i orijentacija vektora $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ je po

definiciji duljina, smjer i orijentacija od \overrightarrow{AB} ili bilo kojeg drugog njegovog predstavnika.

Propozicija 3.

Svaki vektor je jednoznačno određen svojom duljinom, smjerom i orijentacijom.

Zadatak 2.

Karakterizirajte suprotne vektore.

Zbrajanje vektora

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Definiramo binarnu operaciju

$$s : V^3 \times V^3 \rightarrow V^3$$

koju zovemo **zbrajanje vektora** i označavamo sa

$$s(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$$

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = [\overrightarrow{AB}] + [\overrightarrow{BC}] \stackrel{\text{def}}{=} [\overrightarrow{AC}]$$

– zbrajanje vektora je dobro definirano, ne ovisi o izboru predstavnika

Klasična algebra vektora

Uvod

Orijentirana dužina

Vektor

Zbrajanje vektora

Množenje skalarom

Kol. i kompl. vektori

Baza i koord. od V^3

Skalarni produkt

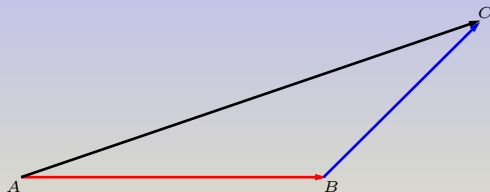
Koord. prikaz

Vektorski produkt

Koord. prikaz

Mješoviti produkt

Pravilo trokuta



$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Klasična algebra vektora

Uvod

Orijentirana dužina

Vektor

Zbrajanje vektora

Množenje skalarom

Kol. i kompl. vektori

Baza i koord. od V^3

Skalarni produkt

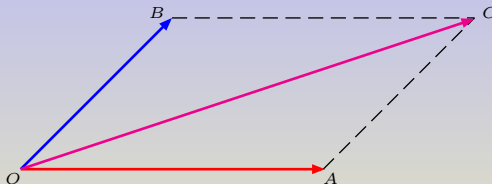
Koord. prikaz

Vektorski produkt

Koord. prikaz

Mješoviti produkt

Pravilo paralelograma



$$\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OC}$$

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Klasična algebra vektora

Uvod

Orijentirana dužina

Vektor

Zbrajanje vektora

Množenje skalarom

Kol. i kompl. vektori

Baza i koord. od V^3

Skalarni produkt

Koord. prikaz

Vektorski produkt

Koord. prikaz

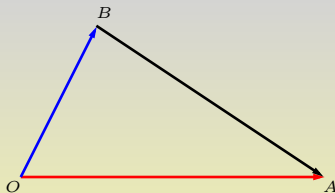
Mješoviti produkt

Teorem 1.

$(V^3, +)$ je komutativna grupa.

Oduzimanje vektora

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$



$$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BA}$$

Množenje vektora skalarom

- **produljivanje** (rastezanje, dilatacija) i **skraćivanje** (stezanje, kontrakcija) vektora

Množenje vektora realnim brojevima je preslikavanje

$$m : \mathbb{R} \times V^3 \rightarrow V^3$$

gdje vektor $m(\lambda, \vec{a})$ pišemo kratko kao $\lambda \vec{a}$ i nazivamo **produktom realnog broja i vektora**, a definiran je na sljedeći način:

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Klasična algebra vektora

Uvod

Orijentirana dužina

Vektor

Zbrajanje vektora

Množenje skalarom

Kol. i kompl. vektori

Baza i koord. od V^3

Skalarni produkt

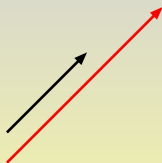
Koord. prikaz

Vektorski produkt

Koord. prikaz

Mješoviti produkt

- ❶ **duljina:** $|\lambda \vec{a}| = |\lambda| |\vec{a}|$
- ❷ **smjer:** smjer od $\lambda \vec{a}$ je isti kao i od \vec{a}
- ❸ **orijentacija:** ako je $\lambda > 0$, tada su vektori $\lambda \vec{a}$ i \vec{a} istih orijentacija; ako je $\lambda < 0$, tada su vektori $\lambda \vec{a}$ i \vec{a} suprotnih orijentacija



$$\lambda = 2$$



$$\lambda = -\frac{1}{2}$$

Propozicija 4.

$$\lambda \vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ili } \vec{a} = \vec{0}.$$

Dokaz.



Iz definicije slijedi da je $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$ i isto tako $\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$



$$\lambda \vec{a} = \vec{0} \Rightarrow |\lambda \vec{a}| = |\vec{0}| \Rightarrow |\lambda| \cdot |\vec{a}| = 0$$

$$|\lambda|, |\vec{a}| \in \mathbb{R} \Rightarrow |\lambda| = 0 \text{ ili } |\vec{a}| = 0$$

Dakle, $\lambda = 0$ ili $\vec{a} = \vec{0}$.



Teorem 2.

Množenje vektora realnim brojevima ima ova svojstva:

- ❶ *kvaziasocijativnost: $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$*
- ❷ *posjedovanje jedinice: $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$*
- ❸ *distributivnost u odnosu na zbrajanje vektora:
 $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$*
- ❹ *distributivnost u odnosu na zbrajanje skalara:
 $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$*

za sve $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ i $\vec{a}, \vec{b} \in V^3$.

Kolinearni i komplanarni vektori

- vektori su **kolinearni** ako imaju isti smjer
- po dogovoru, nulvektor je kolinearan sa svakim vektorom
- vektori su **komplanarni** ako su paralelni s istom ravninom

Propozicija 5.

$\vec{a}, \vec{b} \in V^3, \vec{a} \neq \vec{0}$ su kolinearni $\Rightarrow \exists! \lambda \in \mathbb{R}, \vec{b} = \lambda \vec{a}$.

Dokaz.

$\lambda = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$, ako su \vec{a} i \vec{b} istih orijentacija,

$\lambda = -\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$, ako su \vec{a} i \vec{b} suprotnih orijentacija.

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Klasična algebra vektora

Uvod

Orijentirana dužina

Vektor

Zbrajanje vektora

Množenje skalarom

Kol. i kompl. vektori

Baza i koord. od V^3

Skalarni produkt

Koord. prikaz

Vektorski produkt

Koord. prikaz

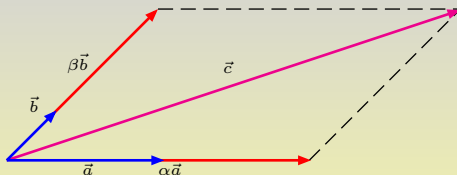
Mješoviti produkt



Propozicija 6.

Neka su $\vec{a}, \vec{b} \in V^3$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Neka je $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$.

Onda su vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ komplanarni.



Klasična algebra vektora

Uvod

Orijentirana dužina

Vektor

Zbrajanje vektora

Množenje skalarom

Kol. i kompl. vektori

Baza i koord. od V^3

Skalarni produkt

Koord. prikaz

Vektorski produkt

Koord. prikaz

Mješoviti produkt

Teorem 3.

Neka su $\vec{a}, \vec{b} \in V^3$ nekolinearni vektori, a $\vec{c} \in V^3$ bilo koji vektor komplanaran s \vec{a} i \vec{b} . Tada postoje jedinstveni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ takvi da je $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$.

Teorem 4.

Neka su $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3$ nekomplanarni vektori. Ako je $\vec{d} \in V^3$ bilo koji vektor, onda postoje jedinstveni $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ takvi da je $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$.

Baza i koordinatizacija od V^3

Matematičke metode
za informatičare

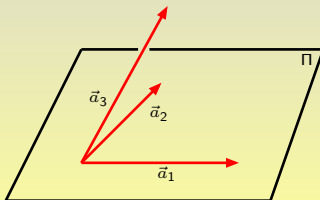
prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Svaku uređenu trojku

$$B = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$$

nekomplanarnih vektora iz V^3 zovemo **baza** prostora V^3 .

B zovemo još **koordinatna baza** ili **koordinatni sustav** za V^3 .



Klasična algebra vektora

Uvod

Orijentirana dužina

Vektor

Zbrajanje vektora

Množenje skalarom

Kol. i kompl. vektori

Baza i koord. od V^3

Skalarni produkt

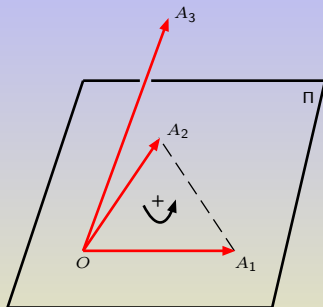
Koord. prikaz

Vektorski produkt

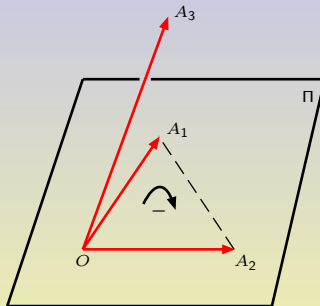
Koord. prikaz

Mješoviti produkt

Lijeva i desna baza



$(\vec{OA_1}, \vec{OA_2}, \vec{OA_3})$ je desna baza



$(\vec{OA_1}, \vec{OA_2}, \vec{OA_3})$ je lijeva baza

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Klasična algebra vektora

Uvod

Orijentirana dužina

Vektor

Zbrajanje vektora

Množenje skalarom

Kol. i kompl. vektori

Baza i koord. od V^3

Skalarni produkt

Koord. prikaz

Vektorski produkt

Koord. prikaz

Mješoviti produkt

Iz [Teorema 4](#) slijedi da svaki vektor $\vec{a} \in V^3$ ima jedinstveni prikaz u odabranoj bazi $B = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$, tj. postoje jedinstveni $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \alpha_3 \vec{a}_3.$$

Kažemo da je vektor \vec{a} prikazan kao linearna kombinacija vektora $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$.

Preslikavanje $k : V^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definirano sa

$$k(\vec{a}) = k(\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \alpha_3 \vec{a}_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$$

zovemo **koordinatizacija** prostora V^3 u odnosu na odabranu bazu B .

Propozicija 7.

Preslikavanje k je bijekcija.

Zbog prethodne propozicije, uz odabranu bazu

$B = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$, vektor $\vec{a} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \alpha_3 \vec{a}_3$

poistovjećujemo s uređenom trojkom realnih brojeva

$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ i pišemo $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Brojeve $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

zovemo **koordinate** vektora \vec{a} s obzirom na bazu B .

Uređenu trojku $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ zovemo **koordinatna trojka** ili

koordinatni slog vektora \vec{a} . Vektore $\alpha_1 \vec{a}_1, \alpha_2 \vec{a}_2, \alpha_3 \vec{a}_3$

zovemo **komponente** vektora \vec{a} u smjerovima koordinatnih
vektora.

Propozicija 8.

Neka su $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ i $\vec{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ vektori iz V^3 , dani svojim koordinatama u nekoj odabranoj bazi. Onda je u toj bazi

$$\vec{a} + \vec{b} = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \alpha_3 + \beta_3).$$

Dokaz.

Neka je $B = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ odabrana baza.

$$\begin{aligned} \vec{a} + \vec{b} &= (\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \alpha_3 \vec{a}_3) + (\beta_1 \vec{a}_1 + \beta_2 \vec{a}_2 + \beta_3 \vec{a}_3) = \\ &= (\alpha_1 + \beta_1) \vec{a}_1 + (\alpha_2 + \beta_2) \vec{a}_2 + (\alpha_3 + \beta_3) \vec{a}_3. \end{aligned}$$

Stoga je $\vec{a} + \vec{b} = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \alpha_3 + \beta_3)$.



Propozicija 9.

Neka je $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ vektor iz V^3 , a $\lambda \in \mathbb{R}$. Tada je

$$\lambda \vec{a} = (\lambda \alpha_1, \lambda \alpha_2, \lambda \alpha_3).$$

Specijalno je $-\vec{a} = (-\alpha_1, -\alpha_2, -\alpha_3)$.

Propozicija 10.

Neka su $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ i $\vec{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ vektori iz V^3 , različiti od nulvektora. Ti su vektori kolinearni akko su im koordinate proporcionalne, tj. vrijedi

$$\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 = \beta_1 : \beta_2 : \beta_3.$$

Zadatak 3.

Dokažite propoziciju 9 i propoziciju 10.

Skalarni produkt vektora

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

$\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$ bilo koja dva vektora iz V^3

$$\vec{a} = [\overrightarrow{OA}], \vec{b} = [\overrightarrow{OB}]$$

kut $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$ tih vektora definiramo kao mjerni broj
neorijentiranog kuta $\sphericalangle AOB$ koji je u intervalu $[0, \pi]$ Ako
je bar jedan od vektora \vec{a}, \vec{b} nulvektor, pojam kuta se ne
definira.

Pojam kuta je dobro definiran, tj. ne ovisi o izboru
predstavnik (kutovi s paralelnim kracima).

Iz definicije slijedi $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \sphericalangle(\vec{b}, \vec{a})$.

Klasična algebra vektora

Uvod

Orijentirana dužina

Vektor

Zbrajanje vektora

Množenje skalarom

Kol. i kompl. vektori

Baza i koord. od V^3

Skalarni produkt

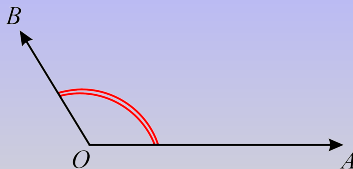
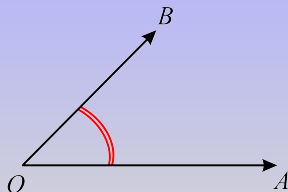
Koord. prikaz

Vektorski produkt

Koord. prikaz

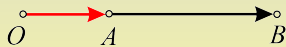
Mješoviti produkt



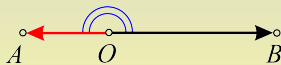


Ako je $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2}$ kažemo da su vektori \vec{a} i \vec{b} **okomiti** i pišemo $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Vektori \vec{a} i \vec{b} su **kolinearni** akko $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0$ (istih orijentacija) ili $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \pi$ (suprotnih orijentacija).



$$\angle(\vec{OA}, \vec{OB}) = 0$$



$$\angle(\vec{OA}, \vec{OB}) = \pi$$

Neka je

$$u : V^3 \times V^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

preslikavanje definirano na sljedeći način:

- ❶ ako je bar jedan od vektora \vec{a} i \vec{b} nulvektor, onda je $u(\vec{a}, \vec{b}) = 0$
- ❷ ako je $\vec{a} \neq \vec{0}$ i $\vec{b} \neq \vec{0}$, onda je

$$u(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \angle(\vec{a}, \vec{b})$$

Preslikavanje u se zove **skalarno množenje**, a $u(\vec{a}, \vec{b})$ **skalarni produkt** vektora \vec{a} i \vec{b}

Klasična algebra vektora

Uvod

Orijentirana dužina

Vektor

Zbrajanje vektora

Množenje skalarom

Kol. i kompl. vektori

Baza i koord. od V^3

Skalarni produkt

Koord. prikaz

Vektorski produkt

Koord. prikaz

Mješoviti produkt

Kraće oznake:

$$u(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \vec{b}$$

$$\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \cos(\vec{a}, \vec{b})$$

Propozicija 11.

Neka su $\vec{a} \neq \vec{0}$ i $\vec{b} \neq \vec{0}$ vektori iz V^3 . Ti su vektori okomiti
akko $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Dokaz.



$$\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \frac{\pi}{2} = 0$$



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0$$

Kako je $\vec{a} \neq \vec{0}$ i $\vec{b} \neq \vec{0}$, slijedi $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0$.

$$\angle(\vec{a}, \vec{b}) \in [0, \pi] \Rightarrow \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2}$$



$$\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0 = |\vec{a}|^2$$

Propozicija 12.

Za svaki izbor $\vec{a}, \vec{b} \in V^3$ vrijedi

$$(\vec{a} \pm \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \pm 2 \vec{a} \vec{b} + \vec{b}^2$$

Teorem 5.

Skalarno množenje vektora ima ova svojstva:

- ① komutativnost: $\vec{a} \vec{b} = \vec{b} \vec{a}$
- ② kvaziasocijativnost: $(\lambda \vec{a}) \vec{b} = \lambda (\vec{a} \vec{b})$
- ③ distributivnost prema zbrajanju:

$$\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \vec{b} + \vec{a} \vec{c}$$

- ④ pozitivna definitnost:

$$\vec{a}^2 \geq 0; \quad \vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$$

za svaki izbor $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3$ i $\lambda \in \mathbb{R}$.

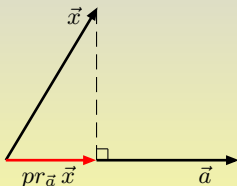
Korolar 1.

Za skalarno množenje vrijedi

$$\textcircled{5} \quad \vec{a}(\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \vec{b}) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall \vec{a}, \vec{b} \in V^3,$$

$$\textcircled{6} \quad (\vec{a} + \vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}, \quad \forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3.$$

Projekcija vektora na vektor



$$pr_{\vec{a}} \vec{x} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{x}}{|\vec{a}|^2} \vec{a}$$

Klasična algebra vektora

Uvod

Orijentirana dužina

Vektor

Zbrajanje vektora

Množenje skalarom

Kol. i kompl. vektori

Baza i koord. od V^3

Skalarni produkt

Koord. prikaz

Vektorski produkt

Koord. prikaz

Mješoviti produkt

Koordinatni prikaz skalarnog produkta

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Koordinatna baza $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ u V^3 je **ortonormirana** ako vrijedi:

$$\textcircled{1} \quad |\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1,$$

$$\textcircled{2} \quad \vec{i} \perp \vec{j}, \quad \vec{j} \perp \vec{k}, \quad \vec{k} \perp \vec{i}$$

Koordinate vektora s obzirom na ortonormiranu bazu zovemo **ortogonalne** ili **pravokutne** koordinate.

\cdot	\vec{i}	\vec{j}	\vec{k}
\vec{i}	1	0	0
\vec{j}	0	1	0
\vec{k}	0	0	1

Klasična algebra vektora

Uvod

Orijentirana dužina

Vektor

Zbrajanje vektora

Množenje skalarom

Kol. i kompl. vektori

Baza i koord. od V^3

Skalarni produkt

Koord. prikaz

Vektorski produkt

Koord. prikaz

Mješoviti produkt



Propozicija 13.

Neka su $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ i $\vec{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ vektori iz V^3 dani svojim pravokutnim koordinatama. Onda je

$$\vec{a} \vec{b} = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3.$$

Dokaz.

$$\begin{aligned} \vec{a} \vec{b} &= (\alpha_1 \vec{i} + \alpha_2 \vec{j} + \alpha_3 \vec{k})(\beta_1 \vec{i} + \beta_2 \vec{j} + \beta_3 \vec{k}) = \\ &= \alpha_1 \beta_1 \vec{i}^2 + \alpha_1 \beta_2 \vec{i} \vec{j} + \alpha_1 \beta_3 \vec{i} \vec{k} + \alpha_2 \beta_1 \vec{j} \vec{i} + \alpha_2 \beta_2 \vec{j}^2 + \\ &+ \alpha_2 \beta_3 \vec{j} \vec{k} + \alpha_3 \beta_1 \vec{k} \vec{i} + \alpha_3 \beta_2 \vec{k} \vec{j} + \alpha_3 \beta_3 \vec{k}^2 = \\ &= \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3 \end{aligned}$$



Korolar 2.

Neka je $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ bilo koji vektor dan svojim pravokutnim koordinatama. Onda je

$$|\vec{a}| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}.$$

Korolar 3.

Neka su $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ i $\vec{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ vektori iz V^3 dani svojim pravokutnim koordinatama različiti od nulvektora. Tada je

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2} \cdot \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2}}.$$

Korolar 4.

Vektori $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ i $\vec{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ iz V^3 dani svojim pravokutnim koordinatama su okomiti akko vrijedi $\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = 0$.

Neka je $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ortonormirana baza u V^3 te $\vec{a} \neq \vec{0}$ proizvoljni vektor, $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.

$$\varphi_1 = \angle(\vec{a}, \vec{i}), \quad \varphi_2 = \angle(\vec{a}, \vec{j}), \quad \varphi_3 = \angle(\vec{a}, \vec{k})$$

Tada je

$$\cos \varphi_1 = \frac{\alpha_1}{|\vec{a}|}, \quad \cos \varphi_2 = \frac{\alpha_2}{|\vec{a}|}, \quad \cos \varphi_3 = \frac{\alpha_3}{|\vec{a}|}$$

Brojeve $\cos \varphi_1, \cos \varphi_2, \cos \varphi_3$ zovemo **kosinusi smjera vektora \vec{a}** .

Propozicija 14.

Za kosinuse smjera bilo kojeg vektora \vec{a} vrijedi

$$\cos^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_2 + \cos^2 \varphi_3 = 1.$$

Propozicija 15.

Kosinusi smjera vektora $\vec{a} \in V^3$ jednaki su pravokutnim koordinatama jediničnog vektora \vec{a}_0 u smjeru tog vektora.

Vektorski produkt vektora

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Neka je $v : V^3 \times V^3 \rightarrow V^3$ preslikavanje kod kojeg je za svaki izbor $\vec{a}, \vec{b} \in V^3$ vektor $v(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{c}$ definiran na sljedeći način:

- ① Ako su \vec{a} i \vec{b} kolinearni vektori, tada je $\vec{c} = \vec{0}$
- ② Ako \vec{a} i \vec{b} nisu kolinearni, tada:
 - (a) duljina od \vec{c} dana je sa $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\angle(\vec{a}, \vec{b}))$
 - (b) smjer od \vec{c} je okomit na smjer od \vec{a} i na smjer od \vec{b}
 - (c) orijentacija od \vec{c} je takva da uređena trojka $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ predstavlja jednu desnu bazu u V^3

Klasična algebra vektora

Uvod

Orijentirana dužina

Vektor

Zbrajanje vektora

Množenje skalarom

Kol. i kompl. vektori

Baza i koord. od V^3

Skalarni produkt

Koord. prikaz

Vektorski produkt

Koord. prikaz

Mješoviti produkt



Preslikavanje v se zove **vektorsko množenje**, a

$v(\vec{a}, \vec{b}) \in V^3$ **vektorski produkt** vektora \vec{a} i \vec{b} .

Kratko pišemo: $v(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \times \vec{b}$.

Propozicija 16.

Vektorsko množenje je antikomutativno, tj. vrijedi

$$\vec{b} \times \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{b})$$

za sve $\vec{a}, \vec{b} \in V^3$.

Propozicija 17.

$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a}$ i \vec{b} su kolinearni.

Dokaz.



Ako su \vec{a} i \vec{b} kolinearni, tada je po definiciji $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.



Neka je $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$. Tada je

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\angle(\vec{a}, \vec{b})) = 0$$

što povlači da je $\vec{a} = \vec{0}$ ili $\vec{b} = \vec{0}$ ili $\angle(\vec{a}, \vec{b}) \in \{0, \pi\}$.

Dakle, u svakom slučaju, \vec{a} i \vec{b} su kolinearni.



Propozicija 18.

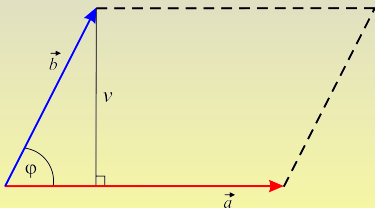
Za svaki vektor $\vec{a} \in V^3$ je $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$.

Propozicija 19.

Ako vektori \vec{a} i \vec{b} nisu kolinearni, tada je $|\vec{a} \times \vec{b}|$ jednak površini paralelograma razapetog tim vektorima.

Dokaz.

$$P = |\vec{a}|v = |\vec{a}||\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a} \times \vec{b}|$$



$$\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b})$$

$$v = |\vec{b}| \sin \varphi$$

Klasična algebra vektora

Uvod

Orijentirana dužina

Vektor

Zbrajanje vektora

Množenje skalarom

Kol. i kompl. vektori

Baza i koord. od V^3

Skalarni produkt

Koord. prikaz

Vektorski produkt

Koord. prikaz

Mješoviti produkt



Teorem 6.

Vektorsko množenje ima ova osnovna svojstva:

① *kvaziasocijativnost:*

$$(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b}), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall \vec{a}, \vec{b} \in V^3$$

$$\vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b}), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall \vec{a}, \vec{b} \in V^3$$

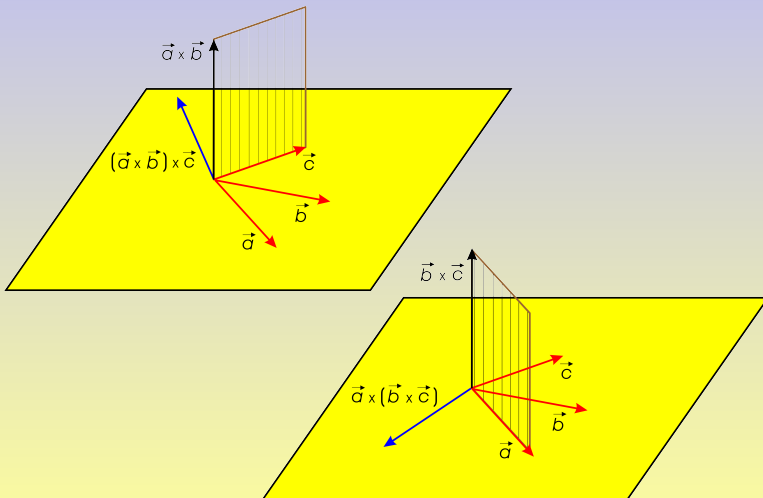
② *distributivnost:*

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c}), \quad \forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{c}) + (\vec{b} \times \vec{c}), \quad \forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3$$

Vektorsko množenje nije asociativno:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$$



Vektorsko množenje ne posjeduje jedinicu, tj. vektor $\vec{e} \in V^3$ takav da je

$$\vec{e} \times \vec{a} = \vec{a} \times \vec{e} = \vec{a}$$

za svaki $\vec{a} \in V^3$. **Objasnite zašto!**

Teorem 7.

Za svaki izbor $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3$ vrijedi:

$$\textcircled{1} \quad (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} \vec{c})\vec{a}$$

$$\textcircled{2} \quad \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \vec{b})\vec{c}$$

Korolar 5.

Za svaki izbor $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3$ vrijedi tzv. *Jacobijev identitet*

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} + (\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a} + (\vec{c} \times \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{0}.$$

Lagrangeov identitet

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 + (\vec{a} \times \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2$$

Napomena

Vektorski prostor V^3 je uz vektorsko množenje realna
Liejeva algebra.

Koordinatni prikaz vektorskog produkta

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Neka je $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ortonormirana baza u V^3 .

\times	\vec{i}	\vec{j}	\vec{k}
\vec{i}	$\vec{0}$	\vec{k}	$-\vec{j}$
\vec{j}	$-\vec{k}$	$\vec{0}$	\vec{i}
\vec{k}	\vec{j}	$-\vec{i}$	$\vec{0}$

Propozicija 20.

Neka su $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ i $\vec{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ vektori zadani svojim koordinatama u nekoj ortonormiranoj bazi u V^3 .

Tada je

$$\vec{a} \times \vec{b} = (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2, \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3, \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1).$$

Klasična algebra vektora

Uvod

Orijentirana dužina

Vektor

Zbrajanje vektora

Množenje skalarom

Kol. i kompl. vektori

Baza i koord. od V^3

Skalarni produkt

Koord. prikaz

Vektorski produkt

Koord. prikaz

Mješoviti produkt



Dokaz.

$$\begin{aligned}
 \vec{a} \times \vec{b} &= (\alpha_1 \vec{i} + \alpha_2 \vec{j} + \alpha_3 \vec{k}) \times (\beta_1 \vec{i} + \beta_2 \vec{j} + \beta_3 \vec{k}) = \\
 &= \alpha_1 \beta_1 \underbrace{(\vec{i} \times \vec{i})}_{\vec{0}} + \alpha_1 \beta_2 \underbrace{(\vec{i} \times \vec{j})}_{\vec{k}} + \alpha_1 \beta_3 \underbrace{(\vec{i} \times \vec{k})}_{-\vec{j}} + \\
 &+ \alpha_2 \beta_1 \underbrace{(\vec{j} \times \vec{i})}_{-\vec{k}} + \alpha_2 \beta_2 \underbrace{(\vec{j} \times \vec{j})}_{\vec{0}} + \alpha_2 \beta_3 \underbrace{(\vec{j} \times \vec{k})}_{\vec{i}} + \\
 &+ \alpha_3 \beta_1 \underbrace{(\vec{k} \times \vec{i})}_{\vec{j}} + \alpha_3 \beta_2 \underbrace{(\vec{k} \times \vec{j})}_{-\vec{i}} + \alpha_3 \beta_3 \underbrace{(\vec{k} \times \vec{k})}_{\vec{0}} = \\
 &= (\alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2) \vec{i} + (\alpha_3 \beta_1 - \alpha_1 \beta_3) \vec{j} + (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) \vec{k}
 \end{aligned}$$



Klasična algebra vektora

Uvod

Orijentirana dužina

Vektor

Zbrajanje vektora

Množenje skalarom

Kol. i kompl. vektori

Baza i koord. od V^3

Skalarni produkt

Koord. prikaz

Vektorski produkt

Koord. prikaz

Mješoviti produkt

Korolar 6.

Neka su $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ i $\vec{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ vektori zadani svojim koordinatama u nekoj ortonormiranoj bazi u V^3 .

Tada je

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}.$$

Dokaz.

Razvije se determinanta po prvom retku.



Klasična algebra vektora

Uvod

Orijentirana dužina

Vektor

Zbrajanje vektora

Množenje skalarom

Kol. i kompl. vektori

Baza i koord. od V^3

Skalarni produkt

Koord. prikaz

Vektorski produkt

Koord. prikaz

Mješoviti produkt



Mješoviti produkt vektora

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Neka je

$$m : V^3 \times V^3 \times V^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

preslikavanje definirano sa

$$m(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c},$$

za sve $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3$. Preslikavanje m zovemo **mješovito** ili **vektorskoskalarno množenje** u V^3 , a $m(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ **mješoviti produkt** vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Kratko pišemo $m(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

Klasična algebra vektora

Uvod

Orijentirana dužina

Vektor

Zbrajanje vektora

Množenje skalarom

Kol. i kompl. vektori

Baza i koord. od V^3

Skalarni produkt

Koord. prikaz

Vektorski produkt

Koord. prikaz

Mješoviti produkt



Propozicija 21.

Mješoviti produkt triju vektora je jednak nuli akko su ti vektori komplanarni.

Dokaz.



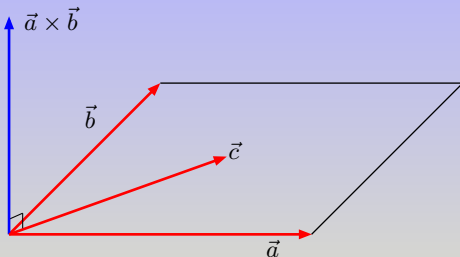
► SLIKA

Neka su $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3$ komplanarni. Ako je neki od vektora $\vec{a} \times \vec{b}$ i \vec{c} nulvektor, tada je očito $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$. Ako to nije slučaj, onda su dani vektori paralelni s ravninom Π razapetom vektorima \vec{a} i \vec{b} . Tada je $\vec{a} \times \vec{b} \perp \Pi$, pa je $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{c}$. Dakle, $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = 0$.



Neka je $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$. To znači da je $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ ili $\vec{c} = \vec{0}$ ili pak je $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{c}$, tj. vektor \vec{c} je paralelan s ravninom razapetom vektorima \vec{a} i \vec{b} . U svakom slučaju, vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ su komplanarni.





Propozicija 22.

Neka su $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\vec{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ i $\vec{c} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ vektori dani svojim pravokutnim koordinatama u ortonormiranoj bazi. Tada je

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}.$$

Dokaz.

Kako je $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c}$, koriste se formule za koordinatni zapis vektorskog i skalarnog produkta i na kraju se uoči da je dobiveni zapis navedena determinanta.



Korolar 7.

Tri su vektora $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\vec{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ i $\vec{c} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ komplanarna akko vrijedi

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Propozicija 23.

Parnom permutacijom trojke vektora, mješoviti produkt $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ se ne mijenja, dok neparnom permutacijom mješoviti produkt mijenja predznak.



Dokaz.

$$\begin{aligned}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) &= (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = \\ &= -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}) = -(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c})\end{aligned}$$

Slijedi iz činjenice da determinanta pri zamjeni dvaju redaka mijenja predznak.



Korolar 8.

$$(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = \vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}).$$

Dokaz.

Prema prethodnoj propoziciji imamo

$$\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{b} \times \vec{c})\vec{a} = (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c}$$



Teorem 8.


Volumen paralelepipeda razapetog vektorima $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ jednak je mješovitom produktu $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ tih vektora ili njemu suprotan, već prema tome da li vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ u tom poretku čine desnu ili lijevu bazu.

► SLIKA

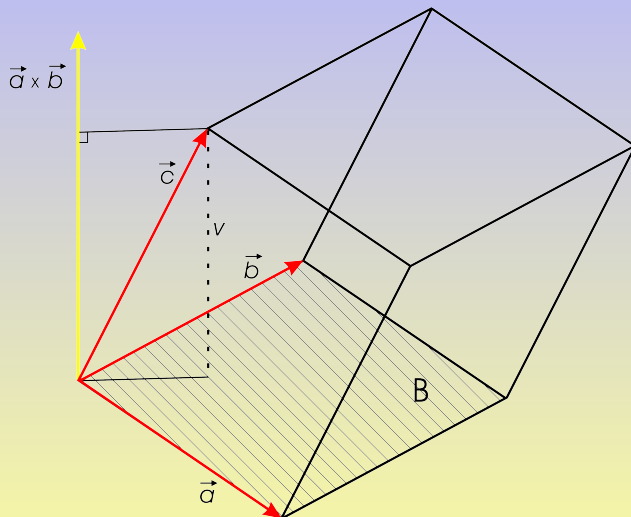
Dokaz.

Pretpostavimo da je $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ desna baza. Kako je $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}\}$ uvijek desna baza, to su vektori \vec{c} i $\vec{a} \times \vec{b}$ s iste strane ravnine razapete vektorima \vec{a} i \vec{b} , pa je $\angle(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) < \frac{\pi}{2}$, tj. $\cos(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) > 0$.

$$\begin{aligned} V = B \cdot v &= |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot v = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) = \\ &= (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) > 0. \end{aligned}$$

Ako je $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ lijeva baza, tada je $\{\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}\}$ desna baza, pa prema dokazanom $V = (\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = -(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) > 0$. 

◀ DOKAZ



Klasična algebra vektora

Uvod

Orijentirana dužina

Vektor

Zbrajanje vektora

Množenje skalarom

Kol. i kompl. vektori

Baza i koord. od V^3

Skalarni produkt

Koord. prikaz

Vektorski produkt

Koord. prikaz

Mješoviti produkt

Korolar 9.

Ako su vektori $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\vec{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ i $\vec{c} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ koji razapinju paralelepiped dani svojim pravokutnim koordinatama, tada je volumen paralelepipeda jednak

$$V = \pm \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}.$$

Klasična algebra vektora

Uvod

Orijentirana dužina

Vektor

Zbrajanje vektora

Množenje skalarom

Kol. i kompl. vektori

Baza i koord. od V^3

Skalarni produkt

Koord. prikaz

Vektorski produkt

Koord. prikaz

Mješoviti produkt



Dio II

Analitička geometrija prostora

Anal. geom. prostora

Stereometrija

Koordinatni sustav

Jednadžba ravnine

$d(T_0, \Pi)$

Koeficijent A, B, C, D

Segmentni oblik

Položaj dviju ravnina

Jednadžba pravca

Kut dvaju pravaca

Kut pravca i ravnine

$d(T_0, p)$

Mimosmjerni pravci

Udalj. mimo. pravaca

Pramen ravnina

Snop ravnina



● Analitička geometrija prostora

- Stereometrija. Euklidski prostor
- Kartezijev koordinatni sustav
- Jednadžba ravnine
- Udaljenost točke od ravnine
- Geometrijska interpretacija koeficijenata A, B, C, D
- Segmentni oblik jednadžbe ravnine
- Položaj dviju ravnina
- Jednadžba pravca
- Kut dvaju pravaca
- Kut pravca i ravnine
- Udaljenost točke od pravca
- Mimosmjerni pravci
- Udaljenost mimosmjernih pravaca
- Pramen ravnina
- Snop ravnina

Anal. geom. prostora

Stereometrija

Koordinatni sustav

Jednadžba ravnine

$d(T_0, \Pi)$

Koeficijent A, B, C, D

Segmentni oblik

Položaj dviju ravnina

Jednadžba pravca

Kut dvaju pravaca

Kut pravca i ravnine

$d(T_0, p)$

Mimosmjerni pravci

Udalj. mimo. pravaca

Pramen ravnina

Snop ravnina

Stereometrija. Euklidski prostor

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Osnovni objekti (euklidske) geometrije: **točke, pravci i ravnine**. Oni se ne definiraju, nego su njihova svojstva i međusobni odnosi opisani pomoću aksioma.

Euklidski prostor je skup E^3 čije elemente zovemo točkama, a neke njegove istaknute podskupove zovemo pravcima, odnosno ravninama. Svojstva tih istaknutih podskupova su opisana sljedećim aksiomima:

- aksiomi planimetrije (kroz svake dvije točke prostora može se povući jedan jedini pravac, za svaki pravac postoji točka koja mu pripada i ona koja mu ne pripada...)

Anal. geom. prostora

Stereometrija

Koordinatni sustav

Jednadžba ravnine

$d(T_0, \Pi)$

Koeficijent A, B, C, D

Segmentni oblik

Položaj dviju ravnina

Jednadžba pravca

Kut dvaju pravaca

Kut pravca i ravnine

$d(T_0, p)$

Mimosmjerni pravci

Udalj. mimo. pravaca

Pramen ravnina

Snop ravnina



- 3 aksioma geometrije prostora

- Za svaku ravninu $\alpha \subset E^3$ postoje točke prostora koje joj pripadaju i one koje joj ne pripadaju
- Ako dvije ravnine imaju zajedničku točku, onda imaju zajednički cijeli pravac
- Ako dva pravca imaju zajedničku točku, tada postoji jedinstvena ravnina koja sadrži te pravce

- (aksiomi metrike) postoji funkcija

$$d : E^3 \times E^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

koja zadovoljava:

- $d(A, B) \geq 0, \quad \forall A, B \in E^3$
 $d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$
- $d(A, B) = d(B, A), \quad \forall A, B \in E^3$
- $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B), \quad \forall A, B, C \in E^3$

(E^3, d) je metrički prostor

Neke posljedice aksioma

Propozicija 24.

Postoji jedinstvena ravnina incidentna sa zadanim pravcem i točkom izvan njega.

Propozicija 25.

Postoji jedinstvena ravnina incidentna sa tri nekolinearne točke.

Propozicija 26.

Svakom točkom ravnine moguće je položiti samo jedan pravac okomit na tu ravninu.

Propozicija 27.

Pravci okomiti na istu ravninu su paralelni.

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Anal. geom. prostora

Stereometrija

Koordinatni sustav

Jednadžba ravnine

$d(T_0, \Pi)$

Koeficijent A, B, C, D

Segmentni oblik

Položaj dviju ravnina

Jednadžba pravca

Kut dvaju pravaca

Kut pravca i ravnine

$d(T_0, p)$

Mimosmjerni pravci

Udalj. mimo. pravaca

Pramen ravnina

Snop ravnina



Primjer 1.

Zadani su vektori $\vec{a} = (1, 3, 2)$, $\vec{b} = (0, 4, 5)$,
 $\vec{c} = (-1, 4, 6)$. Izračunajte:

(a) $\vec{a} \vec{b}$, $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $\cos(\vec{a}, \vec{b})$

(b) $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{b} \times \vec{a}$

(c) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$

Rješenje

Primjer 1.

Zadani su vektori $\vec{a} = (1, 3, 2)$, $\vec{b} = (0, 4, 5)$,
 $\vec{c} = (-1, 4, 6)$. Izračunajte:

(a) $\vec{a} \vec{b}$, $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $\cos(\vec{a}, \vec{b})$

(b) $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{b} \times \vec{a}$

(c) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$

Rješenje

(a) $\vec{a} \vec{b} = 22$, $|\vec{a}| = \sqrt{14}$, $|\vec{b}| = \sqrt{41}$, $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{22}{\sqrt{574}}$

(b) $\vec{a} \times \vec{b} = (7, -5, 4)$, $\vec{b} \times \vec{a} = (-7, 5, -4)$

(c) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -3$

Kartezijev koordinatni sustav

$O \in E^3$ proizvoljna točka

Prostor radijvektora u točki O

$$V^3(O) = \{ \overrightarrow{OX} \mid X \in E^3 \}$$

Kratko pišemo $\overrightarrow{OX} = \vec{r}_X$

Kako su u V^3 sve operacije definirane preko predstavnika, u $V^3(O)$ znamo zbrajati radijvektore (pravilo paralelograma), množiti ih skalarom, skalarno i vektorski ih množiti...

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Anal. geom. prostora
Stereometrija

Koordinatni sustav

Jednadžba ravnine

$d(T_0, \Pi)$

Koeficijent A, B, C, D

Segmentni oblik

Položaj dviju ravnina

Jednadžba pravca

Kut dvaju pravaca

Kut pravca i ravnine

$d(T_0, p)$

Mimosmjerni pravci

Udalj. mimo. pravaca

Pramen ravnina

Snop ravnina



Odaberimo ortonormiranu bazu $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ u $V^3(O)$

$\{O; (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})\}$ – pravokutni ili **Kartezijev sustav** u E^3

O – ishodište

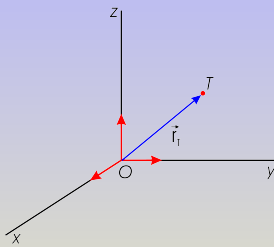
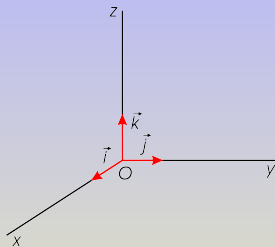
$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – koordinatni vektori

x -os **os apscisa** y -os **os ordinata** z -os **os aplikata**

–koordinatne ravnine:

xy -ravnina, yz -ravnina, xz -ravnina

–oktanti



Točke iz E^3 možemo karakterizirati uređenim trojkama realnih brojeva

$$T \mapsto \vec{r}_T = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (x, y, z)$$

Preslikavanje $k : E^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dano sa

$$T \mapsto \vec{r}_T = (x, y, z)$$

zove se koordinatizacija prostora E^3 .

Koordinate točke podudaraju se s koordinatama
radijvektora te točke.

$\{O; (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})\}$ je **lijevi** odnosno **desni** koordinatni sustav
ako je $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ lijeva odnosno desna baza.

Propozicija 28.

Ako su $A = (x_1, y_1, z_1)$ i $B = (x_2, y_2, z_2)$ točke iz E^3 ,
tada je $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ i

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

► SLIKA

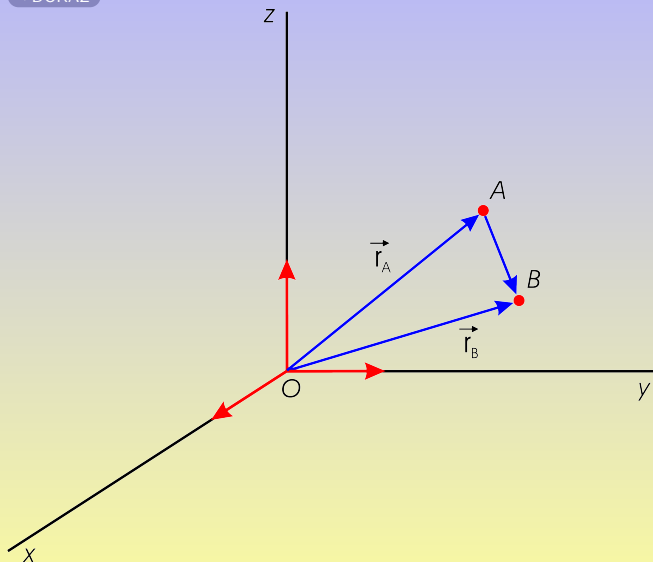
Dokaz.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = \\ &= (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) - (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) = \\ &= (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}\end{aligned}$$

Dakle, $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

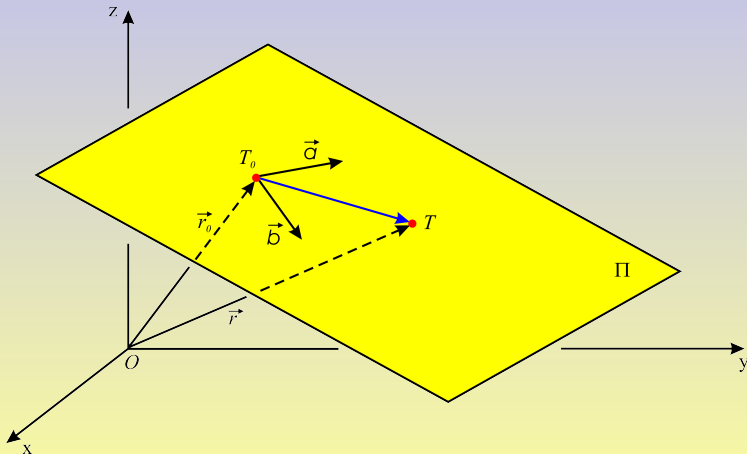
$$\begin{aligned}d(A, B) &= |AB| = |\overrightarrow{AB}| = \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.\end{aligned}$$





Jednadžba ravnine

$$\Pi \dots T_0(x_0, y_0, z_0), \vec{a} = (a_x, a_y, a_z), \vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$$



► DETERMINANTA

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Anal. geom. prostora
Stereometrija

Koordinatni sustav

Jednadžba ravnine

$d(T_0, \Pi)$

Koeficijent A, B, C, D

Segmentni oblik

Položaj dviju ravnina

Jednadžba pravca

Kut dvaju pravaca

Kut pravca i ravnine

$d(T_0, p)$

Mimosmjerni pravci

Udalj. mimo. pravaca

Pramen ravnina

Snop ravnina



Vektori $\overrightarrow{T_0T}$, \vec{a} , \vec{b} su komplanarni, pa postoje $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$\overrightarrow{T_0T} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b},$$

odnosno

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b},$$

i konačno

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}. \quad (\blacktriangle)$$

(\blacktriangle) se zove **vektorski oblik jednadžbe ravnine**

Mijenjamo li parametre λ i μ , dobit ćemo sve točke ravnine Π i samo te točke.

Raspišemo li jednadžbu (▲) po koordinatama, dobivamo
parametarske jednadžbe ravnine

$$x = x_0 + \lambda a_x + \mu b_x$$

$$y = y_0 + \lambda a_y + \mu b_y$$

$$z = z_0 + \lambda a_z + \mu b_z$$

Eliminiramo li parametre λ i μ dobivamo implicitni (opći)
oblik jednadžbe ravnine

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

pri čemu vrijedi $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Kako su vektori $\vec{r} - \vec{r}_0$, \vec{a} i \vec{b} komplanarni, njihov mješovit produkt mora biti nula, tj.

$$(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{a}, \vec{b}) = 0,$$

odnosno koordinatno

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = 0. \quad (\blacksquare)$$

(\blacksquare) se zove **jednadžba ravnine određena fiksnom točkom i dva nekolinearna vektora**.

Anal. geom. prostora

Stereometrija

Koordinatni sustav

Jednadžba ravnine

$d(T_0, \Pi)$

Koeficijent A, B, C, D

Segmentni oblik

Položaj dviju ravnina

Jednadžba pravca

Kut dvaju pravaca

Kut pravca i ravnine

$d(T_0, p)$

Mimosmjerni pravci

Udalj. mimo. pravaca

Pramen ravnina

Snop ravnina



Primjer 2.

Zadana je točka $A(1, -2, 5)$ i vektori $\vec{a} = (3, 1, 1)$,
 $\vec{b} = (1, -3, 1)$. Odredite vektorski, parametarski i opći
oblik jednadžbe ravnine.

Rješenje

Anal. geom. prostora
Stereometrija

Koordinatni sustav

Jednadžba ravnine

$d(T_0, \Pi)$

Koeficijent A, B, C, D

Segmentni oblik

Položaj dviju ravnina

Jednadžba pravca

Kut dvaju pravaca

Kut pravca i ravnine

$d(T_0, p)$

Mimosmjerni pravci

Udalj. mimo. pravaca

Pramen ravnina

Snop ravnina

Primjer 2.

Zadana je točka $A(1, -2, 5)$ i vektori $\vec{a} = (3, 1, 1)$,
 $\vec{b} = (1, -3, 1)$. Odredite vektorski, parametarski i opći
oblik jednadžbe ravnine.

Rješenje

vektorski oblik: $\overrightarrow{AT} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$

$$(x - 1, y + 2, z - 5) = \lambda(3, 1, 1) + \mu(1, -3, 1)$$

$$\begin{cases} x = 1 + 3\lambda + \mu \\ y = -2 + \lambda - 3\mu \\ z = 5 + \lambda + \mu \end{cases} \quad \text{parametarske jednadžbe}$$

Anal. geom. prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
 $d(T_0, \Pi)$
Koeficijent A, B, C, D
Segmentni oblik
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Kut dvaju pravaca
Kut pravca i ravnine
 $d(T_0, p)$
Mimosmjerni pravci
Udalj. mimo. pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina

Eliminiramo li parametre dobivamo opći oblik

$$2x - y - 5z + 21 = 0.$$

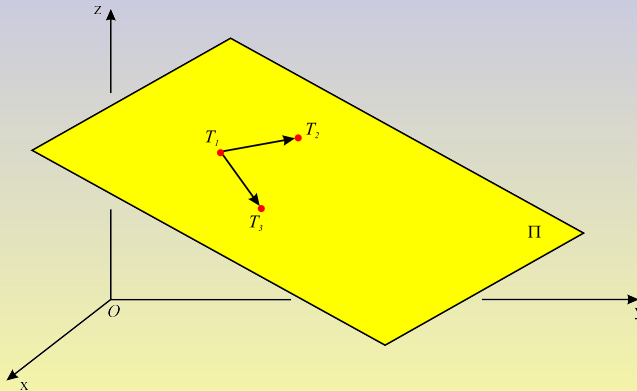
Koristeći (■) možemo dobiti isto opći oblik

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-5 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

tako da izračunamo determinantu na lijevoj strani.

$T_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, 3$ tri nekolinearne točke

$$\vec{a} = \overrightarrow{T_1T_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \quad \vec{b} = \overrightarrow{T_1T_3} = \vec{r}_3 - \vec{r}_1$$



Anal. geom. prostora
Stereometrija

Koordinatni sustav

Jednadžba ravnine

$d(T_0, \Pi)$

Koeficijent A, B, C, D

Segmentni oblik

Položaj dviju ravnina

Jednadžba pravca

Kut dvaju pravaca

Kut pravca i ravnine

$d(T_0, p)$

Mimosmjerni pravci

Udalj. mimo. pravaca

Pramen ravnina

Snop ravnina

Sada je Π ravnina koja prolazi točkom T_1 i razapeta je vektorima \vec{a} i \vec{b} . Prema (■) dobivamo

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (\star)$$

(★) se zove **jednadžba ravnine kroz tri točke**

Primjer 3.

Odredite jednadžbu ravnine koja prolazi točkama $T_1(1, 1, -1)$, $T_2(3, -4, -2)$, $T_3(-3, 0, 1)$.

Rješenje

Anal. geom. prostora

Stereometrija

Koordinatni sustav

Jednadžba ravnine

$d(T_0, \Pi)$

Koeficijent A, B, C, D

Segmentni oblik

Položaj dviju ravnina

Jednadžba pravca

Kut dvaju pravaca

Kut pravca i ravnine

$d(T_0, p)$

Mimosmjerni pravci

Udalj. mimo. pravaca

Pramen ravnina

Snop ravnina



Sada je Π ravnina koja prolazi točkom T_1 i razapeta je vektorima \vec{a} i \vec{b} . Prema (■) dobivamo

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (\star)$$

(★) se zove **jednadžba ravnine kroz tri točke**

Primjer 3.

Odredite jednadžbu ravnine koja prolazi točkama $T_1(1, 1, -1)$, $T_2(3, -4, -2)$, $T_3(-3, 0, 1)$.

Rješenje

$$x + 2z + 1 = 0$$



(★) se može zapisati u ekvivalentnom obliku

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (★★)$$

Komentar za (★★)

Koordinate točaka $T(x, y, z)$, $T_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, 3$ zadovoljavaju homogeni sustav linearnih jednažbi

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ Ax_i + By_i + Cz_i + D = 0, \quad i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

gdje su A, B, C, D nepoznanice. Kako taj sustav ima i netrivialnih rješenja, onda prema Roucheovom teoremu mora determinanta matrice sustava biti jednaka 0, a to je baš (★★).

Udaljenost točke od ravnine

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Anal. geom. prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine

$d(T_0, \Pi)$

Koeficijent A, B, C, D

Segmentni oblik

Položaj dviju ravnina

Jednadžba pravca

Kut dvaju pravaca

Kut pravca i ravnine

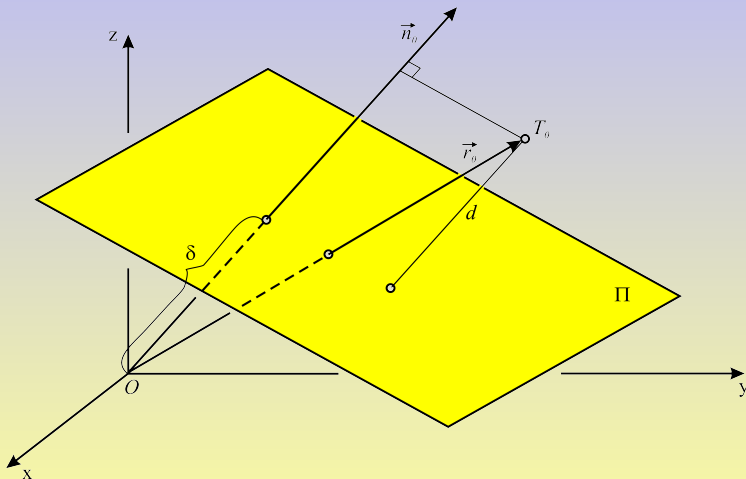
$d(T_0, p)$

Mimosmjerni pravci

Udalj. mimo. pravaca

Pramen ravnina

Snop ravnina



\vec{n}_0 ... jedinični vektor normale ravnine Π

δ ... udaljenost ravnine od ishodišta

d ... udaljenost točke T_0 od ravnine Π

Sa slike vidimo da vrijedi

$$\vec{r}_0 \vec{n}_0 = |\vec{r}_0| \cdot |\vec{n}_0| \cdot \cos(\vec{r}_0, \vec{n}_0) = |\vec{r}_0| \cdot \cos(\vec{r}_0, \vec{n}_0) = d + \delta,$$

pa dobivamo

$$d = \vec{r}_0 \vec{n}_0 - \delta.$$

Udaljenost je pozitivna ili negativna, već prema tome da li su točke T_0 i O s raznih ili s iste strane ravnine Π .

$$\vec{n}_0 = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma), \quad T_0(x_0, y_0, z_0)$$

$$d = x_0 \cos \alpha + y_0 \cos \beta + z_0 \cos \gamma - \delta$$

$$T \in \Pi \Leftrightarrow d(T, \Pi) = 0 \Leftrightarrow \vec{r} \vec{n}_0 - \delta = 0$$

odnosno u koordinatnom obliku, ako i samo ako je

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - \delta = 0. \quad (\text{Hes})$$

(Hes) se zove **normalni** ili **Hesseov** oblik jednadžbe ravnine.

Geometrijska interpretacija koeficijenata

A, B, C, D

$Ax + By + Cz + D = 0$ opći oblik

$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - \delta = 0$ normalni oblik

$$\begin{cases} \cos \alpha = \lambda A \\ \cos \beta = \lambda B \\ \cos \gamma = \lambda C \\ -\delta = \lambda D \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} 1 &= \lambda^2(A^2 + B^2 + C^2) \\ \lambda &= \frac{1}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \end{aligned}$$

Kako je uvijek $\delta \geq 0$, slijedi da je $\text{sign } \lambda = -\text{sign } D$.

Dakle,

$$\lambda = \frac{1}{-\text{sign } D \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Anal. geom. prostora
Stereometrija

Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
 $d(T_0, \Pi)$

Koeficijent A, B, C, D

Segmentni oblik

Položaj dviju ravnina

Jednadžba pravca

Kut dvaju pravaca

Kut pravca i ravnine

$d(T_0, p)$

Mimosmjerni pravci

Udalj. mimo. pravaca

Pramen ravnina

Snop ravnina



Ako je $Ax + By + Cz + D = 0$ opći oblik jednadžbe ravnine, tada je

$$\frac{Ax + By + Cz + D}{-\text{sign } D \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0 \quad (\clubsuit)$$

normalni oblik jednadžbe ravnine.

Dakle, (A, B, C) je **vektor normale** ravnine koji možda nije jedinične duljine.

Ako je \vec{n} normala ravnine, tada opći oblik možemo kratko pisati

$$\vec{n} \cdot \vec{r} + D = 0.$$

pri čemu je \vec{r} radijvektor točaka u ravnini.

Anal. geom. prostora
Stereometrija

Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
 $d(T_0, \Pi)$

Koeficijent A, B, C, D

Segmentni oblik

Položaj dviju ravnina

Jednadžba pravca

Kut dvaju pravaca

Kut pravca i ravnine

$d(T_0, p)$

Mimosmjerni pravci

Udalj. mimo. pravaca

Pramen ravnina

Snop ravnina

Jednadžba ravnine ako je zadana normala $\vec{n} = (A, B, C)$ i
točka $T_1(x_1, y_1, z_1)$

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0 \Rightarrow D = -Ax_1 - By_1 - Cz_1$$

$$Ax + By + Cz - Ax_1 - By_1 - Cz_1 = 0$$

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$$

Da bi se odredila udaljenost točke $T_0(x_0, y_0, z_0)$ od
ravnine, treba u normalni oblik jednadžbe ravnine uvrstiti
koordinate zadane točke. Iz (♣) slijedi

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Anal. geom. prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
 $d(T_0, \Pi)$

Koeficijent A, B, C, D

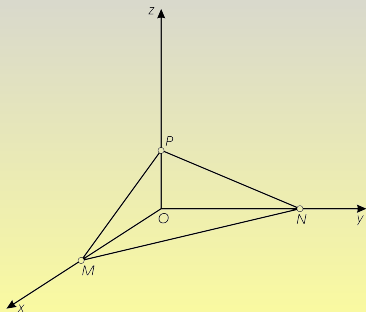
Segmentni oblik
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Kut dvaju pravaca
Kut pravca i ravnine
 $d(T_0, p)$
Mimosmjerni pravci
Udalj. mimo. pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina

Segmentni oblik jednadžbe ravnine

ravnina kroz točke $M(m, 0, 0)$, $N(0, n, 0)$, $P(0, 0, p)$

– uvrštavamo u opći oblik $Ax + By + Cz + D = 0$ i dobivamo

$$m = -\frac{D}{A}, \quad n = -\frac{D}{B}, \quad p = -\frac{D}{C}$$



$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} = 1$$

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Anal. geom. prostora

Stereometrija

Koordinatni sustav

Jednadžba ravnine

$d(T_0, \Pi)$

Koeficijent A, B, C, D

Segmentni oblik

Položaj dviju ravnina

Jednadžba pravca

Kut dvaju pravaca

Kut pravca i ravnine

$d(T_0, p)$

Mimosmjerni pravci

Udalj. mimo. pravaca

Pramen ravnina

Snop ravnina



Primjeri

Primjer 4.

Nađite udaljenost točke $T(1, -2, 4)$ od ravnine

$$\pi \dots 2x - y + 3z - 10 = 0.$$

Rješenje

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Anal. geom. prostora

Stereometrija

Koordinatni sustav

Jednadžba ravnine

$d(T_0, \Pi)$

Koeficijent A, B, C, D

Segmentni oblik

Položaj dviju ravnina

Jednadžba pravca

Kut dvaju pravaca

Kut pravca i ravnine

$d(T_0, p)$

Mimosmjerni pravci

Udalj. mimo. pravaca

Pramen ravnina

Snop ravnina



Primjeri

Primjer 4.

Nađite udaljenost točke $T(1, -2, 4)$ od ravnine

$$\pi \dots 2x - y + 3z - 10 = 0.$$

Rješenje

$$d(T, \pi) = \frac{6}{\sqrt{14}}$$

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Anal. geom. prostora

Stereometrija

Koordinatni sustav

Jednadžba ravnine

$d(T_0, \Pi)$

Koeficijent A, B, C, D

Segmentni oblik

Položaj dviju ravnina

Jednadžba pravca

Kut dvaju pravaca

Kut pravca i ravnine

$d(T_0, p)$

Mimosmjerni pravci

Udalj. mimo. pravaca

Pramen ravnina

Snop ravnina



Primjeri

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Primjer 4.

Nađite udaljenost točke $T(1, -2, 4)$ od ravnine $\pi \dots 2x - y + 3z - 10 = 0$.

Rješenje

$$d(T, \pi) = \frac{6}{\sqrt{14}}$$

Primjer 5.

Nađite jednadžbu ravnine koja prolazi točkom $T(0, 0, a)$ i okomita je na ravnine $x - y - z = 0$ i $2y = x$.

Rješenje

Anal. geom. prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
 $d(T_0, \Pi)$
Koeficijent A, B, C, D
Segmentni oblik
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Kut dvaju pravaca
Kut pravca i ravnine
 $d(T_0, p)$
Mimosmjerni pravci
Udalj. mimo. pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina



Primjeri

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Primjer 4.

Nađite udaljenost točke $T(1, -2, 4)$ od ravnine
 $\pi \dots 2x - y + 3z - 10 = 0$.

Rješenje

$$d(T, \pi) = \frac{6}{\sqrt{14}}$$

Primjer 5.

Nađite jednadžbu ravnine koja prolazi točkom $T(0, 0, a)$ i
okomita je na ravnine $x - y - z = 0$ i $2y = x$.

Rješenje

$$2x + y + z - a = 0$$

Anal. geom. prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
 $d(T_0, \Pi)$
Koeficijent A, B, C, D
Segmentni oblik
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Kut dvaju pravaca
Kut pravca i ravnine
 $d(T_0, p)$
Mimosmjerni pravci
Udalj. mimo. pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina



Položaj dviju ravnina

Kut dviju ravnina

$$\pi_i \dots A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0 \quad i = 1, 2$$

$$\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1), \quad \vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$$

$$\sphericalangle(\pi_1, \pi_2) = \begin{cases} \sphericalangle(\vec{n}_1, \vec{n}_2), & \text{ako je } \sphericalangle(\vec{n}_1, \vec{n}_2) \leq \frac{\pi}{2} \\ \pi - \sphericalangle(\vec{n}_1, \vec{n}_2), & \text{ako je } \sphericalangle(\vec{n}_1, \vec{n}_2) > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}, \quad \varphi = \sphericalangle(\pi_1, \pi_2)$$

$$\cos \varphi = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Uvjet okomitosti

$$\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \vec{n}_2 = 0 \Leftrightarrow A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$$

Uvjet paralelnosti

$$\pi_1 \parallel \pi_2 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \vec{n}_1 = \lambda \vec{n}_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

Presjek dviju neparalelnih ravnina je pravac.

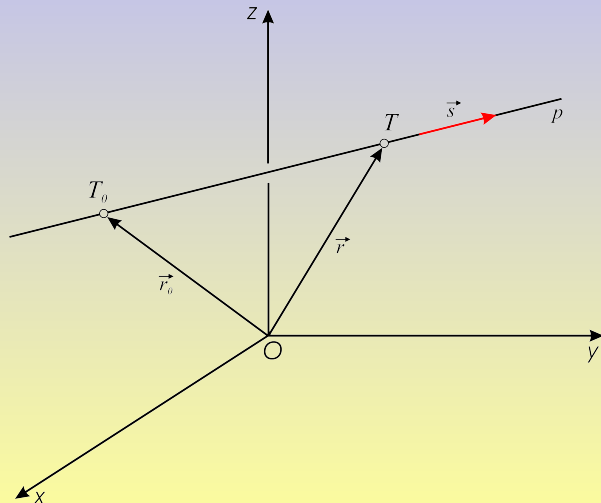
$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases}$$

– prema Kronecker-Capellijevom teoremu linearni sustav od dvije jednačbe s tri nepoznanice ili nema rješenja ili ima beskonačno mnogo rješenja

Anal. geom. prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
 $d(T_0, \Pi)$
Koeficijent A, B, C, D
Segmentni oblik
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Kut dvaju pravaca
Kut pravca i ravnine
 $d(T_0, p)$
Mimosmjerni pravci
Udalj. mimo. pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina

Jednadžba pravca

$$p \dots T_0(x_0, y_0, z_0), \vec{s} = (\alpha, \beta, \gamma)$$



Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Anal. geom. prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
 $d(T_0, \Pi)$
Koeficijent A, B, C, D
Segmentni oblik
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Kut dvaju pravaca
Kut pravca i ravnine
 $d(T_0, p)$
Mimosmjerni pravci
Udalj. mimo. pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina



$$\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OT_0} + \overrightarrow{T_0T}$$

Kako su $\overrightarrow{T_0T}$ i \vec{s} kolinearni vektori, tada $\exists \lambda \in \mathbb{R}$

$$\overrightarrow{T_0T} = \lambda \vec{s}.$$

Konačno imamo

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda \vec{s}.$$



Mijenjajući λ dobivamo sve točke pravca p i samo te točke. (♠) zovemo **vektorski oblik** jednadžbe pravca.

Uvrstimo li koordinate pojedinih elemenata u (♠)
dobivamo

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda\alpha \\ y = y_0 + \lambda\beta \\ z = z_0 + \lambda\gamma \end{cases} \quad (\diamond)$$

(♦) zovemo **parametarske** **jednadžbe** pravca p .

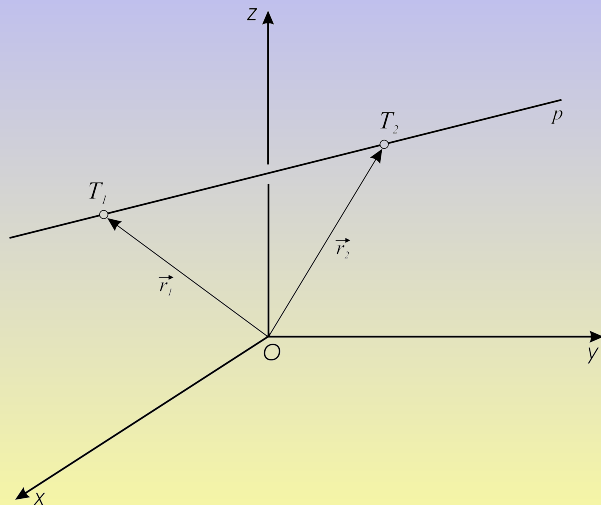
Eliminacijom parametra λ dobivamo

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma} \quad (\nabla)$$

(▼) zovemo **kanonski oblik** **jednadžbe** pravca

Anal. geom. prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
 $d(T_0, \Pi)$
Koeficijent A, B, C, D
Segmentni oblik
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Kut dvaju pravaca
Kut pravca i ravnine
 $d(T_0, p)$
Mimosmjerni pravci
Udalj. mimo. pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina

$$p \dots T_1(x_1, y_1, z_1), T_2(x_2, y_2, z_2)$$



$$\vec{s} = \overrightarrow{T_1 T_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

pa prema (♥) dobivamo

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \lambda(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

odnosno

$$\vec{r} = (1 - \lambda)\vec{r}_1 + \lambda\vec{r}_2 \quad (\boxtimes)$$

(\boxtimes) je vektorska jednadžba pravca kroz dvije zadane točke.

Ako (\boxtimes) zapišemo koordinatno, dobivamo

$$\begin{cases} x = (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2 \\ y = (1 - \lambda)y_1 + \lambda y_2 \\ z = (1 - \lambda)z_1 + \lambda z_2 \end{cases} \quad (\boxplus)$$

(\boxplus) zovemo parametarske jednadžbe pravca kroz dvije točke.

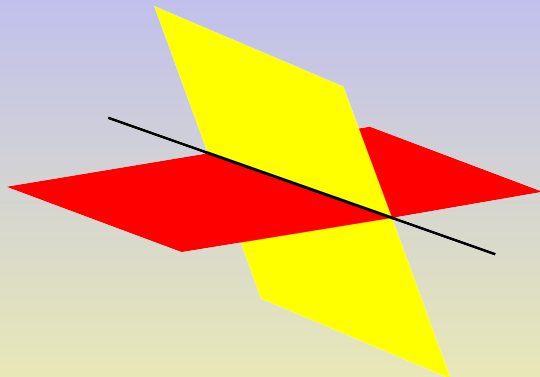
Eliminacijom parametra λ dobivamo,

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \quad (\boxdot)$$

(\boxdot) je kanonska jednadžba pravca kroz dvije točke

Anal. geom. prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
$d(T_0, \Pi)$
Koeficijent A, B, C, D
Segmentni oblik
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Kut dvaju pravaca
Kut pravca i ravnine
$d(T_0, p)$
Mimosmjerni pravci
Udalj. mimo. pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina

Pravac – presječnica dviju neparalelnih ravnina



$$p \dots \begin{cases} \vec{n}_1 \vec{r} + D_1 = 0 \\ \vec{n}_2 \vec{r} + D_2 = 0 \end{cases} \quad (\ominus)$$

(\ominus) je vektorski oblik općih jednadžbi pravca

Koordinatno (\ominus) možemo zapisati

$$p \dots \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \quad (*)$$

$(*)$ su **opće jednadžbe** pravca, pri čemu je

$$A_1 : B_1 : C_1 \neq A_2 : B_2 : C_2.$$

Primjer 6.

Odredite parametarske jednadžbe pravca koji je zadan kao presječnica dviju ravnina

$$\begin{cases} 3x + 2y - 4z + 13 = 0 \\ 5x - 3y + 2z - 2 = 0 \end{cases}.$$

Anal. geom. prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
 $d(T_0, \Pi)$
Koeficijent A, B, C, D
Segmentni oblik
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Kut dvaju pravaca
Kut pravca i ravnine
 $d(T_0, p)$
Mimosmjerni pravci
Udalj. mimo. pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina

Rješenje

Prvi način

Riješimo li sustav dobivamo parametarske jednadžbe pravca

$$p \dots \begin{cases} x = t \\ y = \frac{13}{4}t + \frac{9}{4} \\ z = \frac{19}{8}t + \frac{35}{8} \end{cases}$$

Drugi način

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (3, 2, -4) \times (5, -3, 2)$$

$$\vec{s} = (-8, -26, -19)$$

Nađemo još jedno rješenje sustava,

npr. uzmemo $x = 0$ i dobijemo da mora biti

$$y = \frac{9}{4}, \quad z = \frac{35}{8}$$

Anal. geom. prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
 $d(T_0, \Pi)$
Koeficijent A, B, C, D
Segmentni oblik
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Kut dvaju pravaca
Kut pravca i ravnine
 $d(T_0, p)$
Mimosmjerni pravci
Udalj. mimo. pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina

Kut dvaju pravaca

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Anal. geom. prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
 $d(T_0, \Pi)$
Koeficijent A, B, C, D
Segmentni oblik
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca

Kut dvaju pravaca

Kut pravca i ravnine

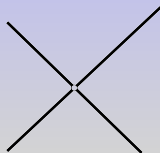
$d(T_0, p)$

Mimosmjerni pravci

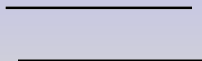
Udalj. mimo. pravaca

Pramen ravnina

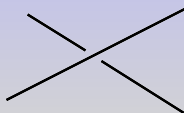
Snop ravnina



sijeku se



paralelni



mimosmjerni

$$p_i \dots \vec{r} = \vec{r}_i + \lambda \vec{s}_i, \quad i = 1, 2; \quad \psi = \sphericalangle(p_1, p_2)$$

$$\psi = \begin{cases} \sphericalangle(\vec{s}_1, \vec{s}_2), & \text{ako je } \sphericalangle(\vec{s}_1, \vec{s}_2) \leq \frac{\pi}{2} \\ \pi - \sphericalangle(\vec{s}_1, \vec{s}_2), & \text{ako je } \sphericalangle(\vec{s}_1, \vec{s}_2) > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\cos \psi = \frac{|\vec{s}_1 \vec{s}_2|}{|\vec{s}_1| |\vec{s}_2|}$$

Ako je $\vec{s}_i = (\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$, $i = 1, 2$, tada je

$$\cos \psi = \frac{|\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2|}{\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2} \sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2}}$$

$$p_1 \perp p_2 \Leftrightarrow \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2 = 0$$

$$p_1 \parallel p_2 \Leftrightarrow \alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1 = \alpha_2 : \beta_2 : \gamma_2$$

Primjer 7.

Da li su pravci

$$p_1 \dots \begin{cases} x = 2t + 5 \\ y = -t + 2 \\ z = t - 7 \end{cases} \quad i \quad p_2 \dots \begin{cases} x + 3y + z + 2 = 0 \\ x - y - 3z - 2 = 0 \end{cases}$$

paralelni?

Rješenje

Primjer 7.

Da li su pravci

$$p_1 \dots \begin{cases} x = 2t + 5 \\ y = -t + 2 \\ z = t - 7 \end{cases} \quad i \quad p_2 \dots \begin{cases} x + 3y + z + 2 = 0 \\ x - y - 3z - 2 = 0 \end{cases}$$

paralelni?

Rješenje

$$\vec{s}_1 = (2, -1, 1)$$

$$\vec{s}_2 = (1, 3, 1) \times (1, -1, -3) = (-8, 4, -4)$$

$$\vec{s}_2 = -4\vec{s}_1 \Rightarrow p_1 \parallel p_2$$

Anal. geom. prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
 $d(T_0, \Pi)$
Koeficijent A, B, C, D
Segmentni oblik
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca

Kut dvaju pravaca

Kut pravca i ravnine

$d(T_0, p)$

Mimosmjerni pravci

Udalj. mimo. pravaca

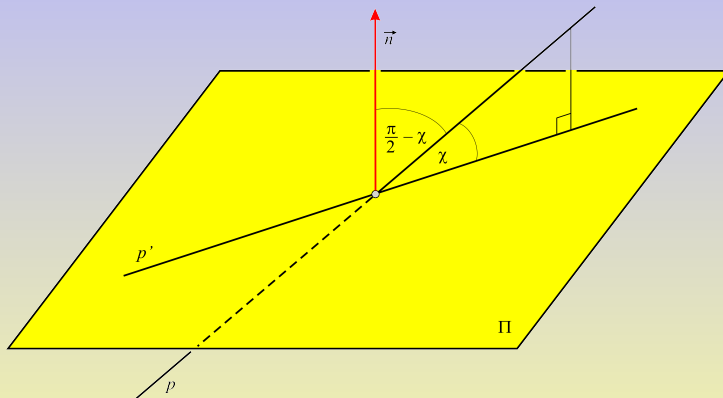
Pramen ravnina

Snop ravnina

Kut pravca i ravnine

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat



$$\chi = \angle(p, \Pi) \stackrel{\text{def}}{=} \angle(p, p')$$

Anal. geom. prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
 $d(T_0, \Pi)$
Koeficijent A, B, C, D
Segmentni oblik
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Kut dvaju pravaca
Kut pravca i ravnine
 $d(T_0, p)$
Mimosmjerni pravci
Udalj. mimo. pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina



$$p \dots \vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda \vec{s}$$
$$\Pi \dots \vec{n} \vec{r} + D = 0$$

Tada je

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \chi\right) = |\cos(\vec{s}, \vec{n})| = \frac{|\vec{s} \vec{n}|}{|\vec{s}| |\vec{n}|}$$

odnosno

$$\sin \chi = \frac{|\vec{s} \vec{n}|}{|\vec{s}| |\vec{n}|}$$

Anal. geom. prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
 $d(T_0, \Pi)$
Koeficijent A, B, C, D
Segmentni oblik
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Kut dvaju pravaca
Kut pravca i ravnine
 $d(T_0, p)$
Mimosmjerni pravci
Udalj. mimo. pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina

Ako je $\vec{s} = (\alpha, \beta, \gamma)$, $\vec{n} = (A, B, C)$, tada je

$$\sin \chi = \frac{|\alpha A + \beta B + \gamma C|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

$$p \parallel \Pi \Leftrightarrow \chi = 0 \Leftrightarrow \alpha A + \beta B + \gamma C = 0$$

$$p \perp \Pi \Leftrightarrow \alpha : \beta : \gamma = A : B : C$$

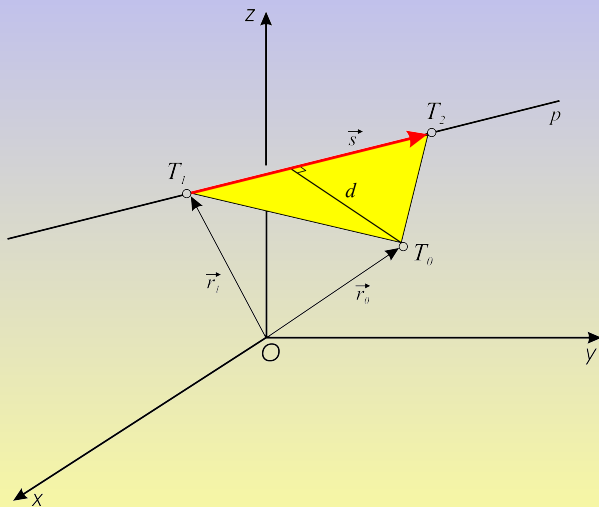
Anal. geom. prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
 $d(T_0, \Pi)$
Koeficijent A, B, C, D
Segmentni oblik
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Kut dvaju pravaca
Kut pravca i ravnine
 $d(T_0, p)$
Mimosmjerni pravci
Udalj. mimo. pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina

Udaljenost točke od pravca

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Anal. geom. prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
 $d(T_0, \Pi)$
Koeficijent A, B, C, D
Segmentni oblik
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Kut dvaju pravaca
Kut pravca i ravnine
 $d(T_0, p)$
Mimosmjerni pravci
Udalj. mimo. pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina



$$p \dots \vec{r} = \vec{r}_1 + \lambda \vec{s}$$

Tražimo formulu za $d(T_0, p)$.

Neka je $T_2 \in p$ takva da je $\overrightarrow{T_1 T_2} = \vec{s}$.

Računamo površinu trokuta $\triangle T_0 T_1 T_2$ na dva načina.

$$P = \frac{1}{2} |\vec{s}| \cdot d$$

$$P = \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{T_1 T_0} \times \overrightarrow{T_1 T_2} \right| = \frac{1}{2} |(\vec{r}_0 - \vec{r}_1) \times \vec{s}|$$

Dakle, dobivamo

$$d = \frac{|(\vec{r}_0 - \vec{r}_1) \times \vec{s}|}{|\vec{s}|}$$

Primjer 8.

Odredite udaljenost točke $T(2, 1, 3)$ od pravca koji prolazi točkama $A(1, 1, 1)$ i $B(2, 3, 4)$.

Rješenje

Anal. geom. prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
 $d(T_0, \Pi)$
Koeficijent A, B, C, D
Segmentni oblik
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Kut dvaju pravaca
Kut pravca i ravnine
 $d(T_0, p)$
Mimosmjerni pravci
Udalj. mimo. pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina

Primjer 8.

Odredite udaljenost točke $T(2, 1, 3)$ od pravca koji prolazi točkama $A(1, 1, 1)$ i $B(2, 3, 4)$.

Rješenje

(pomoću formule)

$$\vec{r}_0 = (2, 1, 3), \quad \vec{r}_1 = (1, 1, 1), \quad \vec{s} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = (1, 2, 3), \quad |\vec{s}| = \sqrt{14},$$

$$(\vec{r}_0 - \vec{r}_1) \times \vec{s} = (-4, -1, 2), \quad |(\vec{r}_0 - \vec{r}_1) \times \vec{s}| = \sqrt{21}, \quad d = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Anal. geom. prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
 $d(T_0, \Pi)$
Koeficijent A, B, C, D
Segmentni oblik
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Kut dvaju pravaca
Kut pravca i ravnine
 $d(T_0, p)$
Mimosmjerni pravci
Udalj. mimo. pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina

Primjer 8.

Odredite udaljenost točke $T(2, 1, 3)$ od pravca koji prolazi točkama $A(1, 1, 1)$ i $B(2, 3, 4)$.

Rješenje

(pomoću formule)

$$\vec{r}_0 = (2, 1, 3), \quad \vec{r}_1 = (1, 1, 1), \quad \vec{s} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = (1, 2, 3), \quad |\vec{s}| = \sqrt{14},$$

$$(\vec{r}_0 - \vec{r}_1) \times \vec{s} = (-4, -1, 2), \quad |(\vec{r}_0 - \vec{r}_1) \times \vec{s}| = \sqrt{21}, \quad d = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

(pomoću derivacije)

$$\text{pravac} \dots \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3} \Rightarrow x = t + 1, \quad y = 2t + 1, \quad z = 3t + 1$$

$$d^2 = (t + 1 - 2)^2 + (2t + 1 - 1)^2 + (3t + 1 - 3)^2, \quad \frac{d}{dt}(d^2) = 28t - 14$$

$$t_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow T_0\left(\frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}\right), \quad d(T, p) = d(T, T_0) = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Primjer 8.

Odredite udaljenost točke $T(2, 1, 3)$ od pravca koji prolazi točkama $A(1, 1, 1)$ i $B(2, 3, 4)$.

Rješenje

(pomoću formule)

$$\vec{r}_0 = (2, 1, 3), \quad \vec{r}_1 = (1, 1, 1), \quad \vec{s} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = (1, 2, 3), \quad |\vec{s}| = \sqrt{14},$$

$$(\vec{r}_0 - \vec{r}_1) \times \vec{s} = (-4, -1, 2), \quad |(\vec{r}_0 - \vec{r}_1) \times \vec{s}| = \sqrt{21}, \quad d = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

(pomoću derivacije)

$$\text{pravac} \dots \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3} \Rightarrow x = t + 1, \quad y = 2t + 1, \quad z = 3t + 1$$

$$d^2 = (t + 1 - 2)^2 + (2t + 1 - 1)^2 + (3t + 1 - 3)^2, \quad \frac{d}{dt}(d^2) = 28t - 14$$

$$t_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow T_0\left(\frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}\right), \quad d(T, p) = d(T, T_0) = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

(pomoću skalarnog produkta)

$P(t + 1, 2t + 1, 3t + 1)$ neka točka na pravcu

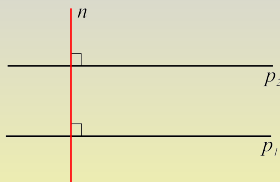
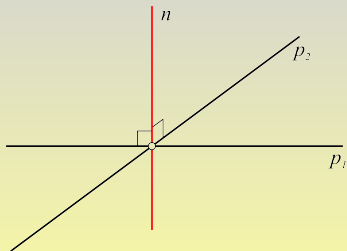
$$\overrightarrow{PT} \perp \vec{s} \Rightarrow \overrightarrow{PT} \cdot \vec{s} = 0 \Rightarrow t_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow P\left(\frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}\right)$$

$$d(T, p) = d(T, P) = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Mimosmjerni pravci

Zajednička normala dvaju pravaca p_1 i p_2 je pravac n koji siječe oba pravca i okomit je na njima.

Jasno je da pravci koji se sijeku i paralelni pravci imaju zajedničku normalu.



Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Anal. geom. prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
 $d(T_0, \Pi)$
Koeficijent A, B, C, D
Segmentni oblik
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Kut dvaju pravaca
Kut pravca i ravnine
 $d(T_0, p)$
Mimosmjerni pravci
Udalj. mimo. pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina

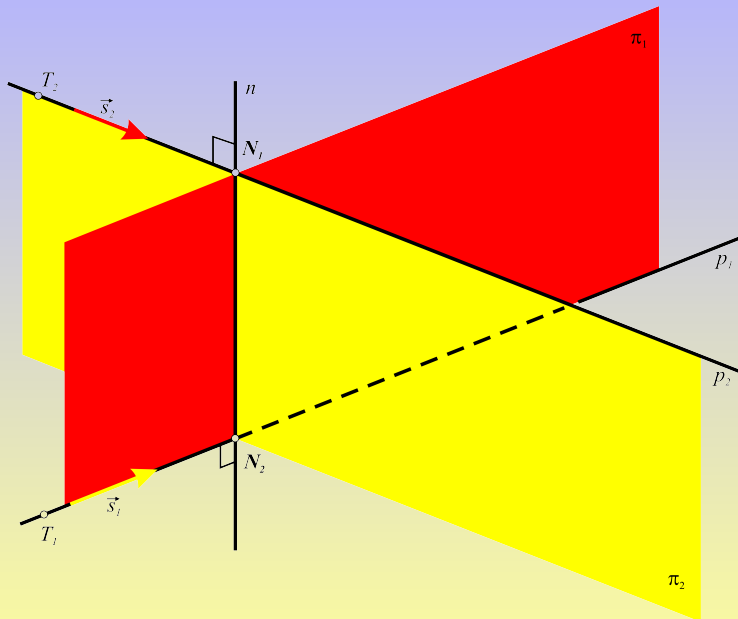
Zadatak 4.

Objasnite kako biste pronašli zajedničku normalu dvaju pravaca koji se sijeku, a kako dvaju paralelnih pravaca! Da li je zajednička normala dvaju paralelnih pravaca jedinstvena?

Dva mimosmjerna pravca p_1 i p_2 imaju jedinstvenu zajedničku normalu n .

Anal. geom. prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
 $d(T_0, \Pi)$
Koeficijent A, B, C, D
Segmentni oblik
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Kut dvaju pravaca
Kut pravca i ravnine
 $d(T_0, p)$
Mimosmjerni pravci
Udalj. mimo. pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina

Anal. geom. prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
$d(T_0, \Pi)$
Koeficijent A, B, C, D
Segmentni oblik
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Kut dvaju pravaca
Kut pravca i ravnine
$d(T_0, p)$
Mimosmjerni pravci
Udalj. mimo. pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina



Neka su pravci p_1 i p_2 zadani jednadžbama

$$p_i \dots \vec{r} = \vec{r}_i + \lambda \vec{s}_i, \quad i = 1, 2$$

Kako pravac n mora biti okomit na oba pravca p_1 i p_2 ,
njegov vektor smjera \vec{s} je dan sa

$$\vec{s} = \vec{s}_1 \times \vec{s}_2.$$

Pravci p_1 i n se sijeku pa određuju neku ravninu π_1 .

Ravnina π_1 prolazi točkom T_1 i razapeta je vektorima \vec{s}_1 i \vec{s} , pa ima jednadžbu

$$\pi_1 \dots (\vec{r} - \vec{r}_1, \vec{s}_1, \vec{s}) = 0.$$

Pravci p_2 i n se sijeku pa određuju neku ravninu π_2 .
Ravnina π_2 prolazi točkom T_2 i razapeta je vektorima \vec{s}_2 i \vec{s} , pa ima jednadžbu

$$\pi_2 \dots (\vec{r} - \vec{r}_2, \vec{s}_2, \vec{s}) = 0.$$

Iz konstrukcije je očito da je

$$n = \pi_1 \cap \pi_2,$$

tj. normala n je određena kao presjek dviju ravnina.

$$n \dots \begin{cases} (\vec{r} - \vec{r}_1, \vec{s}_1, \vec{s}_1 \times \vec{s}_2) = 0 \\ (\vec{r} - \vec{r}_2, \vec{s}_2, \vec{s}_1 \times \vec{s}_2) = 0 \end{cases}$$

Anal. geom. prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
 $d(T_0, \Pi)$
Koeficijent A, B, C, D
Segmentni oblik
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Kut dvaju pravaca
Kut pravca i ravnine
 $d(T_0, p)$
Mimosmjerni pravci
Udalj. mimo. pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina

Udaljenost mimosmjernih pravaca

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Najkraća udaljenost dvaju pravaca je broj

$d = d(p_1, p_2)$ definiran kao

$$d = \inf\{d(P_1, P_2) \mid P_1 \in p_1, P_2 \in p_2\}$$

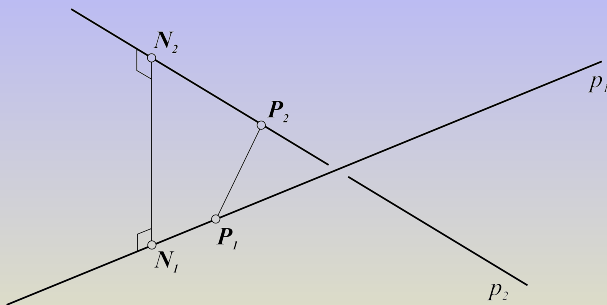
Neka su N_1 i N_2 nožista zajedničke normale n na pravcima p_1 i p_2 . Tada je

$$d(p_1, p_2) = d(N_1, N_2)$$

Zaista, neka su P_i , $i = 1, 2$ bilo koje dvije točke na pravcu p_1 , odnosno p_2 . Neka je \vec{r}_3 radijvektor točke N_1 , a \vec{r}_4 radijvektor točke N_2 .

Anal. geom. prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
 $d(T_0, \Pi)$
Koeficijent A, B, C, D
Segmentni oblik
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Kut dvaju pravaca
Kut pravca i ravnine
 $d(T_0, p)$
Mimosmjerni pravci
Udalj. mimo. pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina





$$\overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{ON_1} + \overrightarrow{N_1P_1} = \vec{r}_3 + \lambda_1 \vec{s}_1$$

$$\overrightarrow{OP_2} = \overrightarrow{ON_2} + \overrightarrow{N_2P_2} = \vec{r}_4 + \lambda_2 \vec{s}_2$$

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = (\vec{r}_4 + \lambda_2 \vec{s}_2) - (\vec{r}_3 + \lambda_1 \vec{s}_1)$$

$$d(P_1, P_2) = \left| \overrightarrow{P_1P_2} \right| = \left| (\vec{r}_4 - \vec{r}_3) + (\lambda_2 \vec{s}_2 - \lambda_1 \vec{s}_1) \right|$$

$$\begin{aligned} d(P_1, P_2)^2 &= (\vec{r}_4 - \vec{r}_3)^2 + 2\lambda_2(\vec{r}_4 - \vec{r}_3)\vec{s}_2 - \\ &\quad - 2\lambda_1(\vec{r}_4 - \vec{r}_3)\vec{s}_1 + (\lambda_2 \vec{s}_2 - \lambda_1 \vec{s}_1)^2 \end{aligned}$$

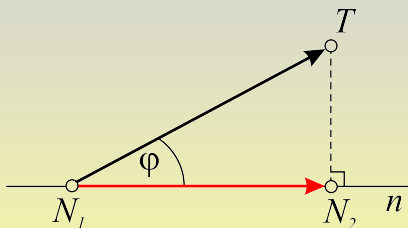
No, $\vec{r}_4 - \vec{r}_3 = \overrightarrow{N_1N_2} \perp \vec{s}_1, \vec{s}_2$, pa dobivamo

$$d(P_1, P_2)^2 = d(N_1, N_2)^2 + (\lambda_2 \vec{s}_2 - \lambda_1 \vec{s}_1)^2$$

pa je zaista, $d(P_1, P_2) \geq d(N_1, N_2)$

$$p_i \dots \vec{r} = \vec{r}_i + \lambda \vec{s}_i, \quad i = 1, 2$$

Uočimo da je N_i ortogonalna projekcija točke T_i na pravac n . Tada je $\overrightarrow{N_1 N_2}$ ortogonalna projekcija od $\overrightarrow{T_1 T_2}$ na pravac n . Neka je T takva da je $\overrightarrow{N_1 T} = \overrightarrow{T_1 T_2}$.



Anal. geom. prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
 $d(T_0, \Pi)$
Koeeficijent A, B, C, D
Segmentni oblik
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Kut dvaju pravaca
Kut pravca i ravnine
 $d(T_0, p)$
Mimosmjerni pravci
Udalj. mimo. pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina

Tada imamo,

$$\begin{aligned} d &= d(N_1, N_2) = |\overrightarrow{N_1 N_2}| = |\overrightarrow{N_1 T}| \cos \varphi = \\ &= |\overrightarrow{N_1 T}| \cdot |\vec{s}_0| \cos \varphi = |\overrightarrow{T_1 T_2}| \cdot |\vec{s}_0| \cos \varphi = \\ &= \overrightarrow{T_1 T_2} \cdot \vec{s}_0 = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \cdot \vec{s}_0, \end{aligned}$$

gdje je \vec{s}_0 jedinični vektor u smjeru pravca n ,

$$\vec{s}_0 = \frac{\vec{s}_1 \times \vec{s}_2}{|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2|}.$$

- Anal. geom. prostora
- Stereometrija
- Koordinatni sustav
- Jednadžba ravnine
- $d(T_0, \Pi)$
- Koeficijent A, B, C, D
- Segmentni oblik
- Položaj dviju ravnina
- Jednadžba pravca
- Kut dvaju pravaca
- Kut pravca i ravnine
- $d(T_0, p)$
- Mimosmjerni pravci
- Udalj. mimo. pravaca**
- Pramen ravnina
- Snop ravnina

Stoga imamo,

$$d = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \cdot \frac{\vec{s}_1 \times \vec{s}_2}{|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2|},$$

i konačno

$$d = \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{s}_1, \vec{s}_2)}{|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2|}$$

Ako je $\vec{s}_i = (\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$, $T_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2$, tada u koordinatnom obliku izvedena formula glasi

$$d = \frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{(\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2)(\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2) - (\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2)^2}}$$

gdje je nazivnik pojednostavljen pomoću Lagrangeovog identiteta. ◀ LAGRANGE

Komplanarnost dvaju pravaca

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Ako se pravci p_1 i p_2 sijeku, bit će $d = 0$, odnosno $(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{s}_1, \vec{s}_2) = 0$. Ako je $p_1 \parallel p_2$, tada je $\vec{s}_1 = \lambda \vec{s}_2$, pa je opet $(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{s}_1, \vec{s}_2) = 0$.

Obratno, ako je $(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{s}_1, \vec{s}_2) = 0$, tada su vektori $\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{s}_1, \vec{s}_2$ komplanarni, pa slijedi da pravci p_1 i p_2 leže u istoj ravnini.

Stoga je

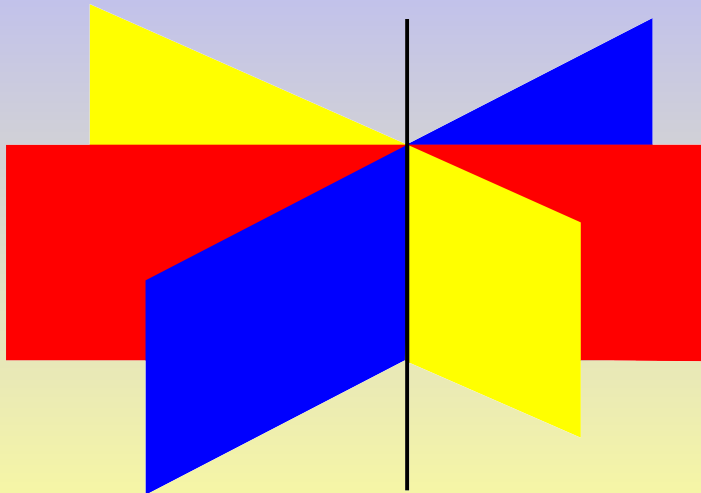
$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0$$

nužan i dovoljan uvjet za **komplanarnost dvaju pravaca**.

Anal. geom. prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
 $d(T_0, \Pi)$
Koeficijent A, B, C, D
Segmentni oblik
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Kut dvaju pravaca
Kut pravca i ravnine
 $d(T_0, p)$
Mimosmjerni pravci
Udalj. mimo. pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina



Pramen ravnina



Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Anal. geom. prostora

Stereometrija

Koordinatni sustav

Jednadžba ravnine

$d(T_0, \Pi)$

Koeficijent A, B, C, D

Segmentni oblik

Položaj dviju ravnina

Jednadžba pravca

Kut dvaju pravaca

Kut pravca i ravnine

$d(T_0, p)$

Mimosmjerni pravci

Udalj. mimo. pravaca

Pramen ravnina

Snop ravnina

Pramen (svezak) ravnina je skup svih ravnina prostora koje prolaze istim pravcem kojeg zovemo **os pramena**.

Svaki pramen ravnina je određen s dvije svoje ravnine Π_1 i Π_2 . Neka su te ravnine dane jednadžbama

$$\Pi_i \dots A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0, \quad i = 1, 2.$$

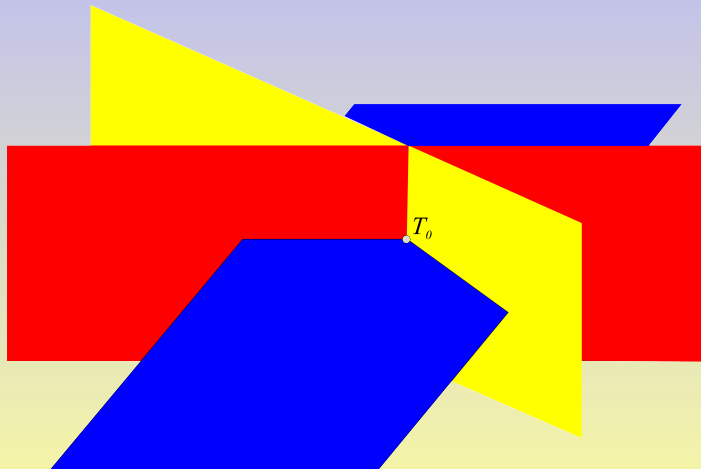
Tada je jednadžba pramena određenog tim ravninama

$$\lambda_1(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \lambda_2(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0,$$

gdje su $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ varijabilni parametri takvi da je

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 \neq 0.$$

Snop ravnina



Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Anal. geom. prostora

Stereometrija

Koordinatni sustav

Jednadžba ravnine

$d(T_0, \Pi)$

Koeficijent A, B, C, D

Segmentni oblik

Položaj dviju ravnina

Jednadžba pravca

Kut dvaju pravaca

Kut pravca i ravnine

$d(T_0, p)$

Mimosmjerni pravci

Udalj. mimo. pravaca

Pramen ravnina

Snop ravnina



Snop (svežanj) ravnina je skup svih ravnina prostora koje prolaze istom točkom T_0 koju zovemo **vrhom svežnja**.

Jednadžba snopa koji prolazi točkom $T_0(x_0, y_0, z_0)$ glasi

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

gdje su $A, B, C \in \mathbb{R}$ varijabilni, $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Snop ravnina određen je i sa svoje tri ravnine. Ako su

$$\Pi_i \dots A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

jednadžbe tih ravnina, tada je jednadžba snopa

$$\lambda_1(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \lambda_2(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) + \lambda_3(A_3x + B_3y + C_3z + D_3) = 0,$$

gdje su $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ varijabilni parametri i

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \neq 0.$$

Dio III

Vektorski ili linearni prostori

Vektorski prostori
Algebarske strukture
Binarna operacija
Grupoid. Polugrupa
Monoid
Grupa
Primjeri grupa
Prsten
Primjeri prstena
Polje
Primjeri polja
Vektorski prostor
Primjeri vekt. pr.
Lin. zav. i nezav.
Linearni omotač
Potprostor
Primjeri potprostora
Baza
Baza i dimenzija
Koordinatizacija
Transf. koordinata

Sadržaj

● Vektorski prostori

- Algebarske strukture
- Binarna operacija
- Grupoid. Polugrupa
- Monoid
- Grupa
- Primjeri grupa
- Prsten
- Primjeri prstena
- Polje
- Primjeri polja
- Vektorski ili linearni prostor
- Primjeri vektorskih prostora
- Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
- Linearni omotač skupa
- Potprostor vektorskog prostora
- Primjeri vektorskih potprostora
- Baza vektorskog prostora
- Egzistencija baze i dimenzija
- Koordinatizacija vektorskog prostora
- Transformacija koordinata

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Vektorski prostori

Algebarske strukture
Binarna operacija
Grupoid. Polugrupa
Monoid
Grupa
Primjeri grupa
Prsten
Primjeri prstena
Polje
Primjeri polja
Vektorski prostor
Primjeri vekt. pr.
Lin. zav. i nezav.
Linearni omotač
Potprostor
Primjeri potprostora
Baza
Baza i dimenzija
Koordinatizacija
Transf. koordinata



Algebra je dio matematike koja izučava algebarske operacije i strukture. **Algebarska operacija** \circ je svako preslikavanje

$$\circ : A^n \rightarrow A$$

pri čemu je A^n Kartezijev produkt $A \times A \times \dots \times A$ (n puta). Operacija tako pridružuje svakoj n -torki $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in A^n$ jedan element skupa A .

Vektorski prostori

Algebarske strukture

Binarna operacija

Grupoid. Polugrupa

Monoid

Grupa

Primjeri grupa

Prsten

Primjeri prstena

Polje

Primjeri polja

Vektorski prostor

Primjeri vekt. pr.

Lin. zav. i nezav.

Linearni omotač

Potprostor

Primjeri potprostora

Baza

Baza i dimenzija

Koordinatizacija

Transf. koordinata



Neprazan skup A zajedno sa skupom operacija O i skupom relacija R definiranim na tom skupu zovemo **algebarskom strukturom**, a označavamo sa $\mathcal{A} = (A, O, R)$.

Skup A zovemo skupom nosiocem algebarske strukture, a njegove elemente osnovnim elementima algebarske strukture.

Vektorski prostori

Algebarske strukture

Binarna operacija

Grupoid. Polugrupa

Monoid

Grupa

Primjeri grupa

Prsten

Primjeri prstena

Polje

Primjeri polja

Vektorski prostor

Primjeri vekt. pr.

Lin. zav. i nezav.

Linearni omotač

Potprostor

Primjeri potprostora

Baza

Baza i dimenzija

Koordinatizacija

Transf. koordinata



Primjeri algebarskih struktura

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Vektorski prostori

Algebarske strukture

Binarna operacija

Grupoid. Polugrupa

Monoid

Grupa

Primjeri grupa

Prsten

Primjeri prstena

Polje

Primjeri polja

Vektorski prostor

Primjeri vekt. pr.

Lin. zav. i nezav.

Linearni omotač

Potprostor

Primjeri potprostora

Baza

Baza i dimenzija

Koordinatizacija

Transf. koordinata

Univerzalna algebra ili **algebra** je algebarska struktura s praznim skupom R .

Algebra logike je algebra $(S, \{\vee, \wedge, \neg\})$, gdje je S skup sudova.

Algebra skupova je algebra $(\mathcal{P}(A), \{\cup, \cap, \complement\})$, uz uniju, presjek i komplement, gdje je $\mathcal{P}(A)$ partitivni skup skupa A .



Binarna operacija

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Binarna operacija na skupu $G \neq \emptyset$ je preslikavanje

$$\circ : G \times G \rightarrow G,$$

koje dvama elementima skupa G pridružuje opet neki element iz tog skupa. Umjesto $\circ(a, b)$ kratko pišemo $a \circ b$.

Primjeri binarnih operacija su $+$, $-$, \cdot na skupovima \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} i \mathbb{C} .

Zadatak 5.

Da li su $+$ i $-$ binarne operacije na skupu \mathbb{N} ? Objasnite!

Vektorski prostori
Algebarske strukture
Binarna operacija
Grupoid. Polugrupa
Monoid
Grupa
Primjeri grupa
Prsten
Primjeri prstena
Polje
Primjeri polja
Vektorski prostor
Primjeri vekt. pr.
Lin. zav. i nezav.
Linearni omotač
Potprostor
Primjeri potprostora
Baza
Baza i dimenzija
Koordinatizacija
Transf. koordinata



Grupoid. Polugrupa

Grupoid je uređeni par (G, \circ) koji se sastoji od nepraznog skupa G i binarne operacije \circ definirane na tom skupu.

Grupoid (G, \circ) kod kojeg je binarna operacija \circ asocijativna, tj. vrijedi

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c), \quad \forall a, b, c \in G$$

zove se **polugrupa**.

Primjer 9.

$(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, (\mathbb{R}, \cdot) su polugrupe.

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Vektorski prostori
Algebarske strukture
Binarna operacija
Grupoid. Polugrupa

Monoid
Grupa
Primjeri grupa
Prsten
Primjeri prstena
Polje
Primjeri polja
Vektorski prostor
Primjeri vekt. pr.
Lin. zav. i nezav.
Linearni omotač
Potprostor
Primjeri potprostora
Baza
Baza i dimenzija
Koordinatizacija
Transf. koordinata



Zadatak 6.

Da li je $(\mathbb{N}, -)$ grupoid? Da li je $(\mathbb{Z}, -)$ grupoid? Da li je $(\mathbb{Z}, -)$ polugrupa? Objasnite!

Zadatak 7.

Navedite još neke primjere polugrupa!

Grupoid (G, \circ) kod kojeg je binarna operacija \circ asocijativna i posjeduje jedinicu (neutralni element), tj.

$$\exists e \in G, \forall a \in G (e \circ a = a \circ e = a)$$

zove se **monoid**.

Primjer 10.

$(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, (\mathbb{Q}, \cdot) , (\mathbb{C}, \cdot) su monoidi. Što su neutralni elementi, odnosno jedinice u tim monoidima?

Zadatak 8.

Da li je (\mathbb{N}, \cdot) monoid? Da li je (\mathbb{Z}, \cdot) monoid? Objasnite!

Zadatak 9.

Navedite još neke primjere monoida!

Grupoid (G, \circ) je **grupa** ako su zadovoljeni sljedeći aksiomi grupe:

(G1) operacija \circ je asocijativna, tj.

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c), \quad \forall a, b, c \in G$$

(G2) postoji neutralni element, tj.

$$\exists e \in G, \forall a \in G (e \circ a = a \circ e = a)$$

(G3) svaki element iz G ima inverzni element, tj.

$$\forall a \in G, \exists a^{-1} \in G, a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$$

Vektorski prostori
Algebarske strukture
Binarna operacija
Grupoid. Polugrupa
Monoid

Grupa

Primjeri grupa
Prsten
Primjeri prstena
Polje
Primjeri polja
Vektorski prostor
Primjeri vekt. pr.
Lin. zav. i nezav.
Linearni omotač
Potprostor
Primjeri potprostora
Baza
Baza i dimenzija
Koordinatizacija
Transf. koordinata

Ako još vrijedi i

(G4) operacija \circ je komutativna, tj.

$$a \circ b = b \circ a, \forall a, b \in G$$

tada se (G, \circ) zove **komutativna** ili **Abelova grupa**.

Napomena

U svakoj grupi neutralni element je jedinstven. Isto tako, u grupi je inverz svakog elementa jedinstven. **Dokažite to za vježbu!**

Teorem 9.

Neka je (G, \cdot) grupa i neka su $a, b \in G$ proizvoljni elementi. Tada jednađžbe $ax = b$ i $xa = b$ imaju jedinstveno rješenje u grupi G .

Dokaz.

$x = a^{-1}b$ u prvom slučaju, odnosno $x = ba^{-1}$ u drugom slučaju.



Zadatak 10.

Da li prethodni teorem vrijedi u slučaju da je (G, \cdot) monoid? Objasnite! Navedite protuprimjer!

Primjeri grupa

- ① Najpoznatiji primjeri grupa su različiti skupovi brojeva uz operacije **množenja i zbrajanja**.

Komutativne grupe su

$$(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot).$$

- ② **Grupa permutacija** (simetrična grupa) je skup svih bijekcija na konačnom skupu $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ uz operaciju kompozicije funkcija. Red grupe je $n!$, a oznaka je S_n . Kompozicija funkcija nije komutativna operacija.

- ③ Općenito, neka je na skupu T definiran skup funkcija $F = \{f : T \rightarrow T \mid f \text{ je bijekcija}\}$. Na elementima skupa F dana je operacija \circ **kompozicije funkcija**. Znamo da je operacija kompozicije zatvorena i asocijativna. Nadalje, identiteta je funkcija $e(x) = x, \forall x \in T$. Budući da su elementi skupa F bijekcije, za svaku funkciju $f \in F$, postoji inverzna funkcija f^{-1} , takva da je $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = e$. Zaključujemo da je (F, \circ) grupa. Ta grupa nije Abelova.

- Vektorski prostori
- Algebarske strukture
- Binarna operacija
- Grupoid. Polugrupa
- Monoid
- Grupa
- Primjeri grupa**
- Prsten
- Primjeri prstena
- Polje
- Primjeri polja
- Vektorski prostor
- Primjeri vekt. pr.
- Lin. zav. i nezav.
- Linearni omotač
- Potprostor
- Primjeri potprostora
- Baza
- Baza i dimenzija
- Koordinatizacija
- Transf. koordinata

- ④ Skup matrica tipa (m, n) uz operaciju **zbrajanja matrica** je komutativna grupa.
- ⑤ Skup M_n kvadratnih regularnih matrica reda n uz operaciju **množenja matrica** je grupa (nije komutativna). Uočite da kao posljedica ◀ teorema 9 vrijedi da svaka matrična jednadžba $AX = B$, gdje su $A, B \in M_n$, ima jedinstveno rješenje, tj. postoji jedinstvena matrica $C \in M_n$ takva da je $AC = B$.

Vektorski prostori
Algebarske strukture
Binarna operacija
Grupoid. Polugrupa
Monoid
Grupa

Primjeri grupa

Prsten
Primjeri prstena
Polje
Primjeri polja
Vektorski prostor
Primjeri vekt. pr.
Lin. zav. i nezav.
Linearni omotač
Potprostor
Primjeri potprostora
Baza
Baza i dimenzija
Koordinatizacija
Transf. koordinata

6 Neka je $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$. Definiramo

$$+_n : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n$$

sa, $a +_n b = (a + b) \bmod n$.

Na primjer, za $n = 4$ imamo

$+_4$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Vektorski prostori
Algebarske strukture
Binarna operacija
Grupoid. Polugrupa
Monoid
Grupa

Primjeri grupa

Prsten
Primjeri prstena
Polje
Primjeri polja
Vektorski prostor
Primjeri vekt. pr.
Lin. zav. i nezav.
Linearni omotač
Potprostor
Primjeri potprostora
Baza
Baza i dimenzija
Koordinatizacija
Transf. koordinata

7 Neka je $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$. Definiramo

$$\cdot_n : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n$$

sa, $a \cdot_n b = (a \cdot b) \bmod n$.

Na primjer, za $n = 4$ imamo

\cdot_4	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

Vektorski prostori
Algebarske strukture
Binarna operacija
Grupoid. Polugrupa
Monoid
Grupa
Primjeri grupa
Prsten
Primjeri prstena
Polje
Primjeri polja
Vektorski prostor
Primjeri vekt. pr.
Lin. zav. i nezav.
Linearni omotač
Potprostor
Primjeri potprostora
Baza
Baza i dimenzija
Koordinatizacija
Transf. koordinata

Zadatak 11.

- *Pokažite da je skup matrica oblika $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, gdje su $a, b \in \mathbb{Z}_3$ i $a \neq 0$, uz operaciju množenja matrica grupa.*
- *Ispišite sve matrice koje pripadaju gornjoj grupi.*

Na danom skupu moguće je definirati više različitih operacija. Pri tome te operacije, mogu, ali i ne moraju, imati strukturu grupe. Tako se na skupu realnih brojeva može osim operacije zbrajanja definirati i operacija množenja realnih brojeva. Izbacimo li nulu iz skupa realnih brojeva i operacija množenja ima svojstva grupe.

$(\mathbb{R}, +)$ je grupa

$(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ je grupa

S druge strane definiramo li množenje na skupu cijelih brojeva, tada $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$ nije grupa, jer ne postoji inverzni element za množenje u skupu cijelih brojeva. Inverzni element cijelog broja n bio bi $\frac{1}{n}$, a to općenito nije cijeli broj. Međutim (\mathbb{Z}, \cdot) ima svojstvo zatvorenosti, asocijativnosti, a postoji i jedinica (neutralni element za množenje). Takvu strukturu općenito zovemo prsten. $(\mathbb{Z}, +)$ je grupa, ali $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$ je samo monoid

- Vektorski prostori
- Algebarske strukture
- Binarna operacija
- Grupoid. Polugrupa
- Monoid
- Grupa
- Primjeri grupa
- Prsten**
- Primjeri prstena
- Polje
- Primjeri polja
- Vektorski prostor
- Primjeri vekt. pr.
- Lin. zav. i nezav.
- Linearni omotač
- Potprostor
- Primjeri potprostora
- Baza
- Baza i dimenzija
- Koordinatizacija
- Transf. koordinata

Prsten je uređena trojka (S, \circ, \times) koja se sastoji od nepraznog skupa S i dviju binarnih operacija \circ i \times na tom skupu koje zadovoljavaju sljedeća svojstva:

- ❶ (S, \circ) je komutativna grupa.
- ❷ (S, \times) je monoid.
- ❸ Vrijede svojstva distributivnosti, tj. za svaki $a, b, c \in S$ vrijedi

$$\begin{aligned} a \times (b \circ c) &= (a \times b) \circ (a \times c), \\ (a \circ b) \times c &= (a \times c) \circ (b \times c). \end{aligned}$$

Vektorski prostori
Algebarske strukture
Binarna operacija
Grupoid. Polugrupa
Monoid
Grupa
Primjeri grupa

Prsten

Primjeri prstena
Polje
Primjeri polja
Vektorski prostor
Primjeri vekt. pr.
Lin. zav. i nezav.
Linearni omotač
Potprostor
Primjeri potprostora
Baza
Baza i dimenzija
Koordinatizacija
Transf. koordinata

Često se umjesto $a \times b$ piše ab , ali treba imati na umu da to može označavati bilo kakvu operaciju na bilo kojem skupu. Nadalje, neutralni element za operaciju \circ ćemo označavati sa 0, a neutralni element od \times sa 1.

Propozicija 29.

U svakom prstenu (S, \circ, \times) vrijedi

$$a \times 0 = 0 \times a = 0.$$

- Vektorski prostori
- Algebarske strukture
- Binarna operacija
- Grupoid. Polugrupa
- Monoid
- Grupa
- Primjeri grupa
- Prsten**
- Primjeri prstena
- Polje
- Primjeri polja
- Vektorski prostor
- Primjeri vekt. pr.
- Lin. zav. i nezav.
- Linearni omotač
- Potprostor
- Primjeri potprostora
- Baza
- Baza i dimenzija
- Koordinatizacija
- Transf. koordinata

Primjeri prstena

- 1 Struktura $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ je prsten cijelih brojeva uz operacije standardnog zbrajanja i množenja.
- 2 Skup kvadratnih matrica drugog reda čiji su elementi cijeli brojevi uz operacije zbrajanja matrica i množenja matrica je prsten. Primijetite da operacija množenja matrica nije komutativna.
- 3 $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$ je komutativni prsten.
- 4 Skup svih polinoma nad poljem realnih brojeva je komutativni prsten.

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Vektorski prostori
Algebarske strukture
Binarna operacija
Grupoid. Polugrupa
Monoid
Grupa
Primjeri grupa
Prsten

Primjeri prstena

Polje
Primjeri polja
Vektorski prostor
Primjeri vekt. pr.
Lin. zav. i nezav.
Linearni omotač
Potprostor
Primjeri potprostora
Baza
Baza i dimenzija
Koordinatizacija
Transf. koordinata



Ako umjesto skupa cijelih brojeva promatramo skup realnih brojeva i na njemu opet operacije standardnog zbrajanja i množenja, uočavamo da svaki realni broj osim 0 ima multiplikativni inverz. Dakle, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ je grupa i to komutativna. Sada strukturu $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ zovemo polje realnih brojeva. Polje realnih brojeva najpoznatiji je primjer polja. Definirajmo polje u općenitom slučaju.

Polje je uređena trojka (S, \circ, \times) koja se sastoji od nepraznog skupa S i dviju binarnih operacija \circ i \times na tom skupu koje zadovoljavaju sljedeća svojstva:

- ❶ (S, \circ) je komutativna grupa (nazivamo je aditivna grupa).
- ❷ $(S \setminus \{0\}, \times)$ je komutativna grupa (nazivamo je multiplikativna grupa).
- ❸ Vrijedi svojstvo distributivnosti, tj.

$$a \times (b \circ c) = (a \times b) \circ (a \times c).$$

Vektorski prostori
Algebarske strukture
Binarna operacija
Grupoid. Polugrupa
Monoid
Grupa
Primjeri grupa
Prsten
Primjeri prstena
Polje
Primjeri polja
Vektorski prostor
Primjeri vekt. pr.
Lin. zav. i nezav.
Linearni omotač
Potprostor
Primjeri potprostora
Baza
Baza i dimenzija
Koordinatizacija
Transf. koordinata

Primjeri polja

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

❶ U diskretnoj matematici je posebno važno polje $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$ gdje je n prim broj. Ukoliko n nije prim broj, \mathbb{Z}_n nije polje.

❷ Neka je $S_2(\mathbb{Z}_3)$ skup kososimetričnih kvadratnih matrica drugog reda. Matrice su oblika $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$, gdje su $a, b \in \mathbb{Z}_3$. Uz standardno zbrajanje i množenje matrica $S_2(\mathbb{Z}_3)$ je polje.

Vektorski prostori
Algebarske strukture
Binarna operacija
Grupoid. Polugrupa
Monoid
Grupa
Primjeri grupa
Prsten
Primjeri prstena
Polje

Primjeri polja

Vektorski prostor
Primjeri vekt. pr.
Lin. zav. i nezav.
Linearni omotač
Potprostor
Primjeri potprostora
Baza
Baza i dimenzija
Koordinatizacija
Transf. koordinata



3 **Tijelo** je nekomutativno polje. Prvo tijelo u povijesti matematike je tijelo kvaterniona. Kvaternioni su brojevi oblika

$$a + bi + cj + dk, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R},$$

pri čemu vrijedi

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = -ji = k,$$

$$jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j$$

Vektorski prostori
Algebarske strukture
Binarna operacija
Grupoid. Polugrupa
Monoid
Grupa
Primjeri grupa
Prsten
Primjeri prstena
Polje

Primjeri polja

Vektorski prostor
Primjeri vekt. pr.
Lin. zav. i nezav.
Linearni omotač
Potprostor
Primjeri potprostora
Baza
Baza i dimenzija
Koordinatizacija
Transf. koordinata

Vektorski ili linearni prostor

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Vektorski prostor \mathcal{V} nad poljem F je svaka uređena četvorka (V, F, \oplus, \odot) sastavljena od

- 1 Skupa $V = \{x, y, z, \dots\}$ čije elemente zovemo *vektori*, a V je nosioc vektorskog prostora \mathcal{V} ,
- 2 Skupa $F = \{\alpha, \beta, \gamma, \dots\}$ čije elemente zovemo *skalari*, a F je polje s obzirom na operacije $+$ i \cdot ,
- 3 Operacije $\oplus : V \times V \rightarrow V$, *zbrajanje vektora*,
- 4 Operacije $\odot : F \times V \rightarrow V$, *množenje vektora skalarom (vanjsko ili hibridno množenje)*

Vektorski prostori
Algebarske strukture
Binarna operacija
Grupoid. Polugrupa
Monoid
Grupa
Primjeri grupa
Prsten
Primjeri prstena
Polje
Primjeri polja
Vektorski prostor
Primjeri vekt. pr.
Lin. zav. i nezav.
Linearni omotač
Potprostor
Primjeri potprostora
Baza
Baza i dimenzija
Koordinatizacija
Transf. koordinata



Pri tome trebaju biti zadovoljeni aksiomi vektorskog prostora:

❶ (V, \oplus) je komutativna grupa s obzirom na zbrajanje vektora.

❷ Za sve skalare $\alpha, \beta \in F$ i vektore $x, y \in V$ vrijedi:

$$(a) \quad \alpha \odot (x \oplus y) = \alpha \odot x \oplus \alpha \odot y$$

$$(b) \quad (\alpha + \beta) \odot x = \alpha \odot x + \beta \odot x$$

$$(c) \quad \alpha \odot (\beta \odot x) = (\alpha\beta) \odot x$$

$$(d) \quad 1 \odot x = x$$

◀ Teorem 2

Vektorski prostori
Algebarske strukture
Binarna operacija
Grupoid. Polugrupa
Monoid
Grupa
Primjeri grupa
Prsten
Primjeri prstena
Polje
Primjeri polja
Vektorski prostor
Primjeri vekt. pr.
Lin. zav. i nezav.
Linearni omotač
Potprostor
Primjeri potprostora
Baza
Baza i dimenzija
Koordinatizacija
Transf. koordinata

Konkretan primjer vektorskog prostora je realizacija ili model vektorskog prostora. Na primjer, skup svih rješenja homogenog sustava linearnih jednadžbi je vektorski prostor.

Najčešći primjeri polja nad kojima se definira vektorski prostor su polje realnih brojeva \mathbb{R} i polje kompleksnih brojeva \mathbb{C} .

Radi jednostavnosti često pišemo $x + y$ umjesto $x \oplus y$, te αx umjesto $\alpha \odot x$.

- Vektorski prostori
- Algebarske strukture
- Binarna operacija
- Grupoid. Polugrupa
- Monoid
- Grupa
- Primjeri grupa
- Prsten
- Primjeri prstena
- Polje
- Primjeri polja
- Vektorski prostor**
- Primjeri vekt. pr.
- Lin. zav. i nezav.
- Linearni omotač
- Potprostor
- Primjeri potprostora
- Baza
- Baza i dimenzija
- Koordinatizacija
- Transf. koordinata

Primjeri vektorskih prostora

- 1 Svako polje F je vektorski prostor nad samim sobom. Specijalno, polje realnih brojeva je vektorski prostor.
- 2 Skup svih usmjerenih dužina ravnine i prostora su vektorski prostori.
- 3 Skup \mathcal{P}_n svih polinoma u jednoj varijabli stupnja $< n$ s realnim ili kompleksnim koeficijentima je vektorski prostor.
- 4 Skup svih polinoma \mathcal{P} u jednoj varijabli je vektorski prostor.

- 5 Skup svih n -torki elemenata polja F je vektorski prostor nad F .

Zbrajanje

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, \dots, x_n) \oplus (y_1, y_2, \dots, y_n) &= \\ &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)\end{aligned}$$

Množenje skalarom:

$$\alpha \odot (x_1, x_2, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$$

Provjerite aksiome!

- Vektorski prostori
- Algebarske strukture
- Binarna operacija
- Grupoid. Polugrupa
- Monoid
- Grupa
- Primjeri grupa
- Prsten
- Primjeri prstena
- Polje
- Primjeri polja
- Vektorski prostor
- Primjeri vekt. pr.**
- Lin. zav. i nezav.
- Linearni omotač
- Potprostor
- Primjeri potprostora
- Baza
- Baza i dimenzija
- Koordinatizacija
- Transf. koordinata

- ⑥ Specijalno, \mathbb{R}^n skup svih n -torki realnih brojeva je vektorski prostor, kojeg zovemo realni n -dimenzionalni koordinatni prostor.
- ⑦ Skup M_{mn} matrica tipa (m, n) je vektorski prostor.
- ⑧ Skup neprekidnih realnih funkcija realne varijable je vektorski prostor.

Vektorski prostori
Algebarske strukture
Binarna operacija
Grupoid. Polugrupa
Monoid
Grupa
Primjeri grupa
Prsten
Primjeri prstena
Polje
Primjeri polja
Vektorski prostor
Primjeri vekt. pr.
Lin. zav. i nezav.
Linearni omotač
Potprostor
Primjeri potprostora
Baza
Baza i dimenzija
Koordinatizacija
Transf. koordinata

Linearna zavisnost i nezavisnost vektora

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

V – vektorski prostor nad poljem F

$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ – vektori iz V

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ – skalari iz polja F

Vektor

$$\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{x}_n$$

zovemo **linearna kombinacija** ili linearna forma vektora

$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$

– ovisi o vektorima $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$

Vektorski prostori
Algebarske strukture
Binarna operacija
Grupoid. Polugrupa
Monoid
Grupa
Primjeri grupa
Prsten
Primjeri prstena
Polje
Primjeri polja
Vektorski prostor
Primjeri vekt. pr.
Lin. zav. i nezav.
Linearni omotač
Potprostor
Primjeri potprostora
Baza
Baza i dimenzija
Koordinatizacija
Transf. koordinata



Neka je V vektorski prostor nad poljem F . Kažemo da su vektori $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n \in V$ **linearno nezavisni** ako iz jednakosti

$$\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{x}_n = \mathbf{0}_V$$

slijedi da je $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ su **linearno zavisni** ako je jednakost

$$\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{x}_n = \mathbf{0}_V$$

moguća ako je barem jedan $\alpha_i \neq 0$, za neko $i = 1, 2, \dots, n$.

- Vektorski prostori
- Algebarske strukture
- Binarna operacija
- Grupoid. Polugrupa
- Monoid
- Grupa
- Primjeri grupa
- Prsten
- Primjeri prstena
- Polje
- Primjeri polja
- Vektorski prostor
- Primjeri vekt. pr.
- Lin. zav. i nezav.**
- Linearni omotač
- Potprostor
- Primjeri potprostora
- Baza
- Baza i dimenzija
- Koordinatizacija
- Transf. koordinata

Primjer 11.

Pokažimo da su sljedeći skupovi linearno nezavisni:

(a) $\{(1, 2, 3), (0, 1, -1), (2, 0, 1)\} \text{ u } \mathbb{R}^3$

(b) $\{(1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1)\} \text{ u } \mathbb{R}^n$

(c) $\{1, x, x^2, \dots, x^k\} \text{ u skupu svih polinoma stupnja}$
 $< n, \text{ ako je } k \leq n - 1$

- Vektorski prostori
- Algebarske strukture
- Binarna operacija
- Grupoid. Polugrupa
- Monoid
- Grupa
- Primjeri grupa
- Prsten
- Primjeri prstena
- Polje
- Primjeri polja
- Vektorski prostor
- Primjeri vekt. pr.
- Lin. zav. i nezav.**
- Linearni omotač
- Potprostor
- Primjeri potprostora
- Baza
- Baza i dimenzija
- Koordinatizacija
- Transf. koordinata

Propozicija 30.

Podskup linearno nezavisnog skupa je linearno nezavisan skup. Nadskup linearno zavisnog skupa je linearno zavisan skup.

Propozicija 31.

Svaki skup vektora koji sadrži nulvektor je linearno zavisan skup.

Propozicija 32.

Skup vektora $S = \{a_1, \dots, a_s\}$ je linearno zavisan akko se bar jedan od vektora iz S može prikazati kao linearna kombinacija preostalih vektora iz S .

Vektorski prostori
Algebarske strukture
Binarna operacija
Grupoid. Polugrupa
Monoid
Grupa
Primjeri grupa
Prsten
Primjeri prstena
Polje
Primjeri polja
Vektorski prostor
Primjeri vekt. pr.
Lin. zav. i nezav.
Linearni omotač
Potprostor
Primjeri potprostora
Baza
Baza i dimenzija
Koordinatizacija
Transf. koordinata

Linearni omotač skupa

$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ – fiksirani vektori

Skup vektora oblika

$$\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{x}_n,$$

gdje se skalari $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ mijenjaju zovemo **linearni omotač** (ovojnica) vektora $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ i označavamo $\mathcal{L}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$.

– to je skup svih linearnih kombinacija vektora

$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Vektorski prostori
Algebarske strukture
Binarna operacija
Grupoid. Polugrupa
Monoid
Grupa
Primjeri grupa
Prsten
Primjeri prstena
Polje
Primjeri polja
Vektorski prostor
Primjeri vekt. pr.
Lin. zav. i nezav.
Linearni omotač
Potprostor
Primjeri potprostora
Baza
Baza i dimenzija
Koordinatizacija
Transf. koordinata



Lema 1.

$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ – fiksirani vektori

$$(L1) \quad \mathbf{x} \in \mathcal{L}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) \Rightarrow \alpha \mathbf{x} \in \mathcal{L}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$$

$$(L2) \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{L}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) \Rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathcal{L}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$$

Dokaz.

Trivijalan.



(L1) & (L2)

$$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{L}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) \Rightarrow \alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y} \in \mathcal{L}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$$

- Vektorski prostori
- Algebarske strukture
- Binarna operacija
- Grupoid. Polugrupa
- Monoid
- Grupa
- Primjeri grupa
- Prsten
- Primjeri prstena
- Polje
- Primjeri polja
- Vektorski prostor
- Primjeri vekt. pr.
- Lin. zav. i nezav.
- Linearni omotač**
- Potprostor
- Primjeri potprostora
- Baza
- Baza i dimenzija
- Koordinatizacija
- Transf. koordinata

Potprostor vektorskog prostora

V – vektorski prostor nad poljem F

$$Y \subseteq V, \quad Y \neq \emptyset$$

Kažemo da je Y **vektorski potprostor** prostora V , ako je Y i sam vektorski prostor nad poljem F s obzirom na iste operacije zbrajanja i množenja skalarom koje su već definirane u V .

Pišemo: $Y < V$.

Trivijalni potprostori: $Y = \{\Theta_V\}$ i $Y = V$.

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Vektorski prostori
Algebarske strukture
Binarna operacija
Grupoid. Polugrupa
Monoid
Grupa
Primjeri grupa
Prsten
Primjeri prstena
Polje
Primjeri polja
Vektorski prostor
Primjeri vekt. pr.
Lin. zav. i nezav.
Linearni omotač

Potprostor

Primjeri potprostora
Baza
Baza i dimenzija
Koordinatizacija
Transf. koordinata



Propozicija 33.

Neprazan podskup $Y \subseteq V$ je potprostor od V akko za svaki izbor $a, b \in Y$ i $\alpha, \beta \in F$ je također $\alpha a + \beta b \in Y$.

Propozicija 34.

$\mathcal{L}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$ je potprostor od V , i to je najmanji potprostor koji sadrži vektore $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$.

Vektorski prostori
Algebarske strukture
Binarna operacija
Grupoid. Polugrupa
Monoid
Grupa
Primjeri grupa
Prsten
Primjeri prstena
Polje
Primjeri polja
Vektorski prostor
Primjeri vekt. pr.
Lin. zav. i nezav.
Linearni omotač

Potprostor

Primjeri potprostora
Baza
Baza i dimenzija
Koordinatizacija
Transf. koordinata

Primjeri vektorskih potprostora

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

- $V^2 < V^3$

- Ako je F polje, tada je

$$F < F^2 < F^3 < \dots < F^n < \dots < F^\infty$$

- Specijalno, ako je $F = \mathbb{R}$,

$$\mathbb{R} < \mathbb{R}^2 < \mathbb{R}^3 < \dots < \mathbb{R}^n < \dots < \mathbb{R}^\infty$$

- Ako je \mathcal{P}_n skup svih polinoma u jednoj varijabli stupnja $< n$, tada je

$$\mathcal{P}_1 < \mathcal{P}_2 < \mathcal{P}_3 < \dots < \mathcal{P}_n < \dots < \mathcal{P}$$

Vektorski prostori
Algebarske strukture
Binarna operacija
Grupoid. Polugrupa
Monoid
Grupa
Primjeri grupa
Prsten
Primjeri prstena
Polje
Primjeri polja
Vektorski prostor
Primjeri vekt. pr.
Lin. zav. i nezav.
Linearni omotač
Potprostor
Primjeri potprostora
Baza
Baza i dimenzija
Koordinatizacija
Transf. koordinata



Zadatak 12.

Da li je skup

$$A = \{ (a_1, \dots, a_2) : a_1 = 2a_2 \}$$

potprostor od \mathbb{R}^n ?

Vektorski prostori
Algebarske strukture
Binarna operacija
Grupoid. Polugrupa
Monoid
Grupa
Primjeri grupa
Prsten
Primjeri prstena
Polje
Primjeri polja
Vektorski prostor
Primjeri vekt. pr.
Lin. zav. i nezav.
Linearni omotač
Potprostor
Primjeri potprostora
Baza
Baza i dimenzija
Koordinatizacija
Transf. koordinata

Baza vektorskog prostora

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

V – vektorski prostor nad poljem F

$Y \subseteq V$

Kažemo da je Y **skup izvodnica** za prostor V ako je **svaki** vektor iz tog prostora moguće prikazati kao linearnu kombinaciju (konačnog broja) vektora iz skupa Y .

$\mathbf{x} \in V \Rightarrow \exists \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_k \in Y$ takvi da je

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{y}_i$$

za neke $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in F$.

Vektorski prostori
Algebarske strukture
Binarna operacija
Grupoid. Polugrupa
Monoid
Grupa
Primjeri grupa
Prsten
Primjeri prstena
Polje
Primjeri polja
Vektorski prostor
Primjeri vekt. pr.
Lin. zav. i nezav.
Linearni omotač
Potprostor
Primjeri potprostora
Baza
Baza i dimenzija
Koordinatizacija
Transf. koordinata



Kažemo još da je Y **skup generatora** za prostor V ,
odnosno da Y **razapinje** ili **generira** prostor V .

Svaki vektorski prostor V ima skup izvodnica, npr.
možemo uzeti $Y = V$.

– zanimaju nas minimalni skupovi izvodnica, što nas
dovodi do pojma baze

- Vektorski prostori
- Algebarske strukture
- Binarna operacija
- Grupoid. Polugrupa
- Monoid
- Grupa
- Primjeri grupa
- Prsten
- Primjeri prstena
- Polje
- Primjeri polja
- Vektorski prostor
- Primjeri vekt. pr.
- Lin. zav. i nezav.
- Linearni omotač
- Potprostor
- Primjeri potprostora
- Baza**
- Baza i dimenzija
- Koordinatizacija
- Transf. koordinata

Za uređeni podskup $B \subseteq V$ prostora V kažemo da je
baza prostora V ako vrijedi:

- B je skup izvodnica za V ,
- B je linearno nezavisan skup u V .

Propozicija 35.

Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:

- (a) Y je minimalan skup generatora,
- (b) Y je maksimalan skup linearno nezavisnih vektora,
- (c) Y je baza vektorskog prostora V .

Vektorski prostori
Algebarske strukture
Binarna operacija
Grupoid. Polugrupa
Monoid
Grupa
Primjeri grupa
Prsten
Primjeri prstena
Polje
Primjeri polja
Vektorski prostor
Primjeri vekt. pr.
Lin. zav. i nezav.
Linearni omotač
Potprostor
Primjeri potprostora
Baza
Baza i dimenzija
Koordinatizacija
Transf. koordinata

Primjeri baza

- $\{(1, 2, 3), (0, 1, -1), (2, 0, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$
- $\{(1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1)\} \subset \mathbb{R}^n$
- $\{1, x, x^2, \dots, x^{n-1}\}$ u skupu svih polinoma stupnja $< n$
- svaka uređena trojka $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ nekomplanarnih vektora u V^3 je baza za V^3
- $\{1, x, \dots, x^k, \dots\}$ je baza za prostor svih polinoma u jednoj varijabli

Egzistencija baze i dimenzija

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Teorem 10.

Svaki netrivialni vektorski prostor ima bazu.

Teorem 11 (Steinitz).

Svake dvije baze danog vektorskog prostora V su ekvipotentne.

Dimenzija netrivialnog vektorskog prostora $V \neq \{\mathbf{0}_V\}$ je kardinalni broj neke njegove baze. Dimenzija trivialnog vektorskog prostora je po definiciji jednaka nuli.

Oznaka: $\dim V$, odnosno $\dim_F V$ kada želimo naglasiti nad kojim poljem.

Vektorski prostori
Algebarske strukture
Binarna operacija
Grupoid. Polugrupa
Monoid
Grupa
Primjeri grupa
Prsten
Primjeri prstena
Polje
Primjeri polja
Vektorski prostor
Primjeri vekt. pr.
Lin. zav. i nezav.
Linearni omotač
Potprostor
Primjeri potprostora
Baza

Baza i dimenzija

Koordinatizacija

Transf. koordinata



Zbog Steinizovog teorema pojam dimenzije je dobro definiran.

Za vektorski prostor V kažemo da je **konačnodimenzionalan** ako ima bar jedan konačan skup izvodnica, tj. ako je konačne dimenzije. U protivnom kažemo da je **beskonačnodimenzionalan**.

$$\dim V^3 = \dim \mathbb{R}^3 = 3, \quad \dim \mathbb{R}^n = \dim F^n = n$$

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2, \quad \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1, \quad \dim \mathcal{P}_n = n$$

$$\dim \mathcal{P} = \aleph_0, \quad \dim \mathbb{R}^{\mathbb{R}} = c$$

Vektorski prostori
Algebarske strukture
Binarna operacija
Grupoid. Polugrupa
Monoid
Grupa
Primjeri grupa
Prsten
Primjeri prstena
Polje
Primjeri polja
Vektorski prostor
Primjeri vekt. pr.
Lin. zav. i nezav.
Linearni omotač
Potprostor
Primjeri potprostora
Baza

Baza i dimenzija
Koordinatizacija
Transf. koordinata



Teorem 12.

Neka je $S = \{a_1, \dots, a_s\} \subseteq V$ linearno nezavisan skup vektora u V . Onda je S podskup neke baze prostora V .

Korolar 10.

Neka je V n -dimenzionalni vektorski prostor. Onda je svaki linearno nezavisan skup u V koji se sastoji od n vektora, baza za prostor V . Nadalje, bilo koji skup vektora iz V koji sadrži više od n vektora je linearno zavisn.

Vektorski prostori
Algebarske strukture
Binarna operacija
Grupoid. Polugrupa
Monoid
Grupa
Primjeri grupa
Prsten
Primjeri prstena
Polje
Primjeri polja
Vektorski prostor
Primjeri vekt. pr.
Lin. zav. i nezav.
Linearni omotač
Potprostor
Primjeri potprostora
Baza

Baza i dimenzija

Koordinatizacija

Transf. koordinata

Teorem 13.

Neka je $B \subseteq V$ baza prostora V . Tada je prikaz svakog vektora iz V u toj bazi jedinstven.

Dokaz.

Neka je $B = \{a_1, \dots, a_n\}$ i neka je $x \in V$ proizvoljni vektor.

Kako je B skup izvodnica za V , vektor $x \in V$ se može prikazati kao linearna kombinacija vektora iz B . Pretpostavimo da postoje dva takva prikaza

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i, \quad x = \sum_{i=1}^n \beta_i a_i$$

za neke $\alpha_i, \beta_i \in F$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Vektorski prostori
Algebarske strukture
Binarna operacija
Grupoid. Polugrupa
Monoid
Grupa
Primjeri grupa
Prsten
Primjeri prstena
Polje
Primjeri polja
Vektorski prostor
Primjeri vekt. pr.
Lin. zav. i nezav.
Linearni omotač
Potprostor
Primjeri potprostora
Baza

Baza i dimenzija
Koordinatizacija
Transf. koordinata

Oduzimanjem dobivamo

$$\sum_{i=1}^n (\alpha_i - \beta_i) a_i = \Theta_V.$$

Kako su vektori a_1, \dots, a_n linearno nezavisni, mora biti

$$\alpha_i - \beta_i = 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n,$$

odnosno, $\alpha_i = \beta_i$ za svaki $i = 1, 2, \dots, n$.



- Vektorski prostori
- Algebarske strukture
- Binarna operacija
- Grupoid. Polugrupa
- Monoid
- Grupa
- Primjeri grupa
- Prsten
- Primjeri prstena
- Polje
- Primjeri polja
- Vektorski prostor
- Primjeri vekt. pr.
- Lin. zav. i nezav.
- Linearni omotač
- Potprostor
- Primjeri potprostora
- Baza
- Baza i dimenzija**
- Koordinatizacija
- Transf. koordinata

Koordinatizacija vektorskog prostora

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

V – vektorski prostor nad poljem F

$\dim V = n$, $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ odabrana baza

Bazu B zovemo **koordinatna baza** ili **koordinatni sustav** u prostoru V .

Svaki vektor $a \in V$ ima jednoznačan prikaz u toj bazi

$$a = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i.$$

Vektorski prostori
Algebarske strukture
Binarna operacija
Grupoid. Polugrupa
Monoid
Grupa
Primjeri grupa
Prsten
Primjeri prstena
Polje
Primjeri polja
Vektorski prostor
Primjeri vekt. pr.
Lin. zav. i nezav.
Linearni omotač
Potprostor
Primjeri potprostora
Baza
Baza i dimenzija
Koordinatizacija
Transf. koordinata



Koeficijente $\alpha_i \in F$ zovemo **koordinatama**, uređenu n -torku

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \text{kraće} = (\alpha_i)$$

koordinatnim slogom, a matricu

$$X = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \text{kraće} = [\alpha_i]$$

koordinatnom matricom vektora a u bazi B .

- Vektorski prostori
- Algebarske strukture
- Binarna operacija
- Grupoid. Polugrupa
- Monoid
- Grupa
- Primjeri grupa
- Prsten
- Primjeri prstena
- Polje
- Primjeri polja
- Vektorski prostor
- Primjeri vekt. pr.
- Lin. zav. i nezav.
- Linearni omotač
- Potprostor
- Primjeri potprostora
- Baza
- Baza i dimenzija
- Koordinatizacija**
- Transf. koordinata

Neka je

$$k : V \rightarrow F^n$$

preslikavanje definirano sa

$$k(a) = (\alpha_i).$$

Neka je

$$h : V \rightarrow M_{n1}(F)$$

preslikavanje definirano sa

$$h(a) = [\alpha_i].$$

- Vektorski prostori
- Algebarske strukture
- Binarna operacija
- Grupoid. Polugrupa
- Monoid
- Grupa
- Primjeri grupa
- Prsten
- Primjeri prstena
- Polje
- Primjeri polja
- Vektorski prostor
- Primjeri vekt. pr.
- Lin. zav. i nezav.
- Linearni omotač
- Potprostor
- Primjeri potprostora
- Baza
- Baza i dimenzija
- Koordinatizacija**
- Transf. koordinata

Svako od preslikavanja k i h zovemo **koordinatizacija prostora** V s obzirom na odabranu bazu B .

Propozicija 36.

Preslikavanja k i h imaju sljedeća svojstva:

❶ k i h su bijekcije

◀ klasični vektori

❷ $k(a + b) = k(a) + k(b), \quad h(a + b) = h(a) + h(b)$

◀ klasični vektori

❸ $k(\alpha a) = \alpha k(a), \quad h(\alpha a) = \alpha h(a)$

◀ klasični vektori

za sve $a, b \in V$ i za svaki $\alpha \in F$.

Preko preslikavanja k i h vršimo identifikaciju

$$a = k(a) = h(a)$$

i pišemo kratko

$$a = (\alpha_i), \quad \text{odnosno} \quad a = [\alpha_i].$$

Napomena

Ove identifikacije ovise o odabranoj bazi!

Vektorski prostori
Algebarske strukture
Binarna operacija
Grupoid. Polugrupa
Monoid
Grupa
Primjeri grupa
Prsten
Primjeri prstena
Polje
Primjeri polja
Vektorski prostor
Primjeri vekt. pr.
Lin. zav. i nezav.
Linearni omotač
Potprostor
Primjeri potprostora
Baza
Baza i dimenzija
Koordinatizacija
Transf. koordinata

Neka je $S = \{x_1, \dots, x_s\}$ uređeni skup vektora u prostoru V dimenzije n . Neka su

$$x_k = (x_k^{(1)}, x_k^{(2)}, \dots, x_k^{(n)}), \quad k = 1, 2, \dots, s$$

koordinate tih vektora u odabranoj bazi B . Skupu S tada pridružujemo matricu

$$M(S) = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & \dots & x_s^{(1)} \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & \dots & x_s^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{(n)} & x_2^{(n)} & \dots & x_s^{(n)} \end{bmatrix}$$

tipa (n, s) kojoj se stupci podudaraju s koordinatama vektora x_1, x_2, \dots, x_s .

- Vektorski prostori
- Algebarske strukture
- Binarna operacija
- Grupoid. Polugrupa
- Monoid
- Grupa
- Primjeri grupa
- Prsten
- Primjeri prstena
- Polje
- Primjeri polja
- Vektorski prostor
- Primjeri vekt. pr.
- Lin. zav. i nezav.
- Linearni omotač
- Potprostor
- Primjeri potprostora
- Baza
- Baza i dimenzija
- Koordinatizacija**
- Transf. koordinata

$M(S)$ zovemo **matrica skupa vektora** S s obzirom na bazu B .

Dimenzija skupa $S = \{x_1, x_2, \dots, x_s\}$ je maksimalni broj linearno nezavisnih vektora iz skupa S .

Propozicija 37.

Dimenzija skupa S jednaka je rangu matrice $M(S)$.

Korolar 11.

Skup S je linearno nezavisan akko $M(S)$ ima maksimalni rang.

Korolar 12.

Skup $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ je baza za vektorski prostor V dimenzije n akko $\det M(S) \neq 0$.

- Vektorski prostori
- Algebarske strukture
- Binarna operacija
- Grupoid. Polugrupa
- Monoid
- Grupa
- Primjeri grupa
- Prsten
- Primjeri prstena
- Polje
- Primjeri polja
- Vektorski prostor
- Primjeri vekt. pr.
- Lin. zav. i nezav.
- Linearni omotač
- Potprostor
- Primjeri potprostora
- Baza
- Baza i dimenzija
- Koordinatizacija**
- Transf. koordinata

Zadatak 13.

Dokažite korolar 12, koristeći definiciju linearne nezavisnosti vektora i Roucheov teorem.

- Vektorski prostori
- Algebarske strukture
- Binarna operacija
- Grupoid. Polugrupa
- Monoid
- Grupa
- Primjeri grupa
- Prsten
- Primjeri prstena
- Polje
- Primjeri polja
- Vektorski prostor
- Primjeri vekt. pr.
- Lin. zav. i nezav.
- Linearni omotač
- Potprostor
- Primjeri potprostora
- Baza
- Baza i dimenzija
- Koordinatizacija**
- Transf. koordinata

Transformacija koordinata

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Neka su $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ i $B' = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$
dvije koordinatne baze vektorskog prostora V .

Neka su

$$X = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad X' = \begin{bmatrix} \alpha'_1 \\ \vdots \\ \alpha'_n \end{bmatrix}$$

koordinatne matrice vektora $a \in V$ u bazi B odnosno B' .

U kakvom su odnosu matrice X i X' ?

Vektorski prostori
Algebarske strukture
Binarna operacija
Grupoid. Polugrupa
Monoid
Grupa
Primjeri grupa
Prsten
Primjeri prstena
Polje
Primjeri polja
Vektorski prostor
Primjeri vekt. pr.
Lin. zav. i nezav.
Linearni omotač
Potprostor
Primjeri potprostora
Baza
Baza i dimenzija
Koordinatizacija
Transf. koordinata



Neka su

$$f_k = \begin{bmatrix} \beta_{1k} \\ \vdots \\ \beta_{nk} \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

koordinatne matrice vektora baze B' u bazi B .

$$T = M(B') = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \cdots & \beta_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_{n1} & \cdots & \beta_{nn} \end{bmatrix}$$

- Vektorski prostori
- Algebarske strukture
- Binarna operacija
- Grupoid. Polugrupa
- Monoid
- Grupa
- Primjeri grupa
- Prsten
- Primjeri prstena
- Polje
- Primjeri polja
- Vektorski prostor
- Primjeri vekt. pr.
- Lin. zav. i nezav.
- Linearni omotač
- Potprostor
- Primjeri potprostora
- Baza
- Baza i dimenzija
- Koordinatizacija
- Transf. koordinata

T je matrica skupa B' u bazi B i zovemo ju **matrica prijelaza** ili **matrica transformacije** baze B u bazu B' .

Pišemo

$$B \xrightarrow{T} B'.$$

Kako je B' također baza, prema ◀ korolaru 12 slijedi da je T uvijek regularna matrica, tj. $\det T \neq 0$.

Teorem 14.

Neka su X i X' koordinatne matrice vektora $a \in V$ u bazama B , odnosno B' , a T neka je matrica prijelaza iz prve baze u drugu. Onda je $X = TX'$, odnosno $X' = T^{-1}X$.

▶ Preskoči dokaz

- Vektorski prostori
- Algebarske strukture
- Binarna operacija
- Grupoid. Polugrupa
- Monoid
- Grupa
- Primjeri grupa
- Prsten
- Primjeri prstena
- Polje
- Primjeri polja
- Vektorski prostor
- Primjeri vekt. pr.
- Lin. zav. i nezav.
- Linearni omotač
- Potprostor
- Primjeri potprostora
- Baza
- Baza i dimenzija
- Koordinatizacija
- Transf. koordinata

Dokaz.

$$B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}, \quad B' = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$$

U bazi B vektor a ima prikaz

$$a = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i, \quad (\clubsuit)$$

a u bazi B'

$$a = \sum_{k=1}^n \alpha'_k f_k = \sum_{k=1}^n \alpha'_k \left(\sum_{i=1}^n \beta_{ik} e_i \right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \beta_{ik} \alpha'_k \right) e_i. \quad (\spadesuit)$$

Uspoređivanjem (\clubsuit) i (\spadesuit) zbog jedinstvenosti prikaza u bazi, slijedi

$$\alpha_i = \sum_{k=1}^n \beta_{ik} \alpha'_k, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

pa je $X = TX'$.



Linearni operatori

Definicija

Primjeri lin. op.

Zadavanje lin. op.

Izomorfizam

Rang i defekt

Matrica lin. op.

Primjeri matr. zapisa

$$Y = FX$$

$$M_{mn} \cong \text{Hom}(U, V)$$

odnos matr. zapisa

Karakteristični polinom

Minimalni polinom

Invarijantni potprostori

Svojstvene vrijednosti

Dio IV

Linearni operatori



• Linearni operatori

- Definicija linearnog operatora
- Primjeri linearnih operatora
- Zadavanje linearnog operatora
- Izomorfizam vektorskih prostora
- Rang i defekt
- Matrični zapis linearnog operatora
- Primjeri matričnih zapisa
- Računanje slike vektora
- Izomorfizam matrica i linearnih operatora
- Odnos matričnih zapisa istog operatora
- Karakteristični polinom
- Minimalni polinom
- Invarijantni potprostori
- Svojstvene vrijednosti

Linearni operatori

Definicija

Primjeri lin. op.

Zadavanje lin. op.

Izomorfizam

Rang i defekt

Matrica lin. op.

Primjeri matr. zapisa

$Y = FX$

$M_{mn} \cong \text{Hom}(U, V)$

odnos matr. zapisa

Karakteristični polinom

Minimalni polinom

Invarijantni potprostori

Svojstvene vrijednosti

Definicija linearnog operatora

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Neka su U i V vektorski prostori nad istim poljem F .

Kažemo da je preslikavanje

$$f : U \rightarrow V$$

linearni operator, ako zadovoljava:

① **aditivnost**, tj.

$$f(a + b) = f(a) + f(b), \quad \forall a, b \in U$$

② **homogenost**, tj.

$$f(\alpha a) = \alpha f(a), \quad \forall \alpha \in F, a \in U$$

Linearni operatori

Definicija

Primjeri lin. op.

Zadavanje lin. op.

Izomorfizam

Rang i defekt

Matrica lin. op.

Primjeri matr. zapisa

$Y = FX$

$M_{mn} \cong \text{Hom}(U, V)$

odnos matr. zapisa

Karakteristični polinom

Minimalni polinom

Invarijantni potprostori

Svojstvene vrijednosti



Propozicija 38.

Neka je $f : U \rightarrow V$ linearni operator. Tada je

$$f(\Theta_U) = \Theta_V \quad i \quad f(-a) = -f(a), \quad \forall a \in U.$$

Dokaz.

$$f(a) = f(a + \Theta_U) \stackrel{(1)}{=} f(a) + f(\Theta_U) \Rightarrow f(\Theta_U) = \Theta_V$$

$$f(-a) = f((-1) \cdot a) \stackrel{(2)}{=} -1 \cdot f(a) = -f(a)$$



Propozicija 39.

Preslikavanje $f : U \rightarrow V$ je linearni operator akko za svaki izbor $\alpha, \beta \in F$ i svaki izbor $a, b \in U$ vrijedi

$$f(\alpha a + \beta b) = \alpha f(a) + \beta f(b).$$

Dokaz.



$$f(\alpha a + \beta b) \stackrel{(1)}{=} f(\alpha a) + f(\beta b) \stackrel{(2)}{=} \alpha f(a) + \beta f(b)$$



Za $\alpha = \beta = 1$ dobivamo (1), a za $b = \Theta_U$ dobivamo (2)
jer je $f(\Theta_U) = \Theta_V$.



Propozicija 40.

Neka su $a_i \in U$ bilo koji vektori, a $\alpha_i \in F$ skalari,
 $i = 1, \dots, k$. Tada za linearni operator f vrijedi

$$f\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i a_i\right) = \sum_{i=1}^k \alpha_i f(a_i).$$

Dokaz.

Indukcijom po k .

Za $k = 1$ to je uvjet (2) iz definicije.

Pretpostavimo da je tvrdnja istinita za $k - 1$ vektora.

Linearni operatori

Definicija

Primjeri lin. op.

Zadavanje lin. op.

Izomorfizam

Rang i defekt

Matrica lin. op.

Primjeri matr. zapisa

$Y = FX$

$M_{mn} \cong \text{Hom}(U, V)$

odnos matr. zapisa

Karakteristični polinom

Minimalni polinom

Invarijantni potprostori

Svojstvene vrijednosti

$$f\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i a_i\right) = f\left(\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i a_i + \alpha_k a_k\right) =$$

$$= f\left(\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i a_i\right) + f(\alpha_k a_k) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i f(a_i) + \alpha_k f(a_k) = \sum_{i=1}^k \alpha_i f(a_i)$$



Propozicija 41.

Kompozicija linearnih operatora je linearni operator.

Dokaz.

$f : U \rightarrow V$ i $g : V \rightarrow W$ linearni operatori

$\alpha, \beta \in F, \quad a, b \in U$ proizvoljni

$$\begin{aligned}(g \circ f)(\alpha a + \beta b) &= g(f(\alpha a + \beta b)) = \\&= g(\alpha f(a) + \beta f(b)) = \alpha g(f(a)) + \beta g(f(b)) = \\&= \alpha(g \circ f)(a) + \beta(g \circ f)(b)\end{aligned}$$



Primjeri linearnih operatora

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Linearni operatori
Definicija

Primjeri lin. op.

Zadavanje lin. op.

Izomorfizam

Rang i defekt

Matrica lin. op.

Primjeri matr. zapisa

$Y = FX$

$M_{mn} \cong \text{Hom}(U, V)$

odnos matr. zapisa

Karakteristični polinom

Minimalni polinom

Invarijantni potprostori

Svojstvene vrijednosti

- \mathcal{P} – prostor polinoma

$$d : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}, \quad d(p) = p'$$

$$d(p) = d\left(\sum_{i=0}^k a_i t^i\right) = \sum_{i=1}^k i \cdot a_i t^{i-1}$$

- operator deriviranja na \mathcal{P}
- uočimo da $d|_{\mathcal{P}_n} : \mathcal{P}_n \rightarrow \mathcal{P}_{n-1}$



- \mathcal{P} – prostor polinoma

$$s : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}, \quad s(p) = \int_0^t p(x) \, dx$$

$$s(p) = s\left(\sum_{i=0}^k a_i t^i\right) = \sum_{i=0}^k \frac{a_i}{i+1} t^{i+1}$$

– operator integriranja na \mathcal{P}

– uočimo da $s|_{\mathcal{P}_n} : \mathcal{P}_n \rightarrow \mathcal{P}_{n+1}$

- Rotacija u \mathbb{R}^2 za kut α

$$r_\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$r_\alpha(x, y) = (x \cos \alpha - y \sin \alpha, x \sin \alpha + y \cos \alpha)$$

- Zrcaljenje

$$z : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad z(x, y) = (y, x)$$

- Koordinatizacija vektorskog prostora s obzirom na odabranu bazu

- V vektorski prostor nad poljem F , $\lambda \in F$

$$h : V \rightarrow V, \quad h(x) = \lambda x$$

- homotetija u prostoru V s koeficijentom λ

Za $\lambda = 0$ dobivamo **nuloperator**

$$n(x) = \Theta_V, \quad \forall x \in V$$

Za $\lambda = 1$ dobivamo **jedinični operator**

$$e(x) = x, \quad \forall x \in V$$

- **inkluzija:** $L < V$

$$i : L \rightarrow V, \quad i(x) = x, \quad \forall x \in L$$

- **konjugiranje:** \mathbb{C} vektorski prostor nad \mathbb{R}

$$k : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad k(x + yi) = x - yi$$

Da li je konjugiranje linearni operator ako gledamo
na \mathbb{C} kao vektorski prostor nad samim sobom?

Objasnite!

- F polje; $\forall i = 1, 2, \dots, n$ definiramo

$$p_i : F^n \rightarrow F, \quad p_i(\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n) = \alpha_i$$

– i -ta koordinatna funkcija ili projektor na i -tu koordinatu

- projekcija na xy -ravninu

$$p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad p(x, y, z) = (x, y, 0)$$

- projekcija na y -os

$$p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad p(x, y, z) = (0, y, 0)$$

- zrcaljenje s obzirom na xy -ravninu

$$z : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad z(x, y, z) = (x, y, -z)$$

- zrcaljenje s obzirom na x -os

$$z : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad z(x, y, z) = (x, -y, -z)$$

- centralna simetrija s obzirom na ishodište

$$s : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad s(x, y, z) = (-x, -y, -z)$$

Zadavanje linearnih operatora

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Teorem 15.

Neka je (a_1, \dots, a_k) linearno nezavisan skup vektora iz prostora U , a skup (b_1, \dots, b_k) bilo koji skup vektora iz prostora V . Tada postoji bar jedan linearni operator $f : U \rightarrow V$ takav da je $f(a_i) = b_i, \forall i = 1, \dots, k$.

Dokaz.

Ako skup (a_1, \dots, a_k) nije baza za U , tada ga možemo (i to na više načina) nadopuniti do baze prostora U . Neka je

$$(a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n)$$

jedna takva nadopuna do baze.

Linearni operatori

Definicija

Primjeri lin. op.

Zadavanje lin. op.

Izomorfizam

Rang i defekt

Matrica lin. op.

Primjeri matr. zapisa

$Y = FX$

$M_{mn} \cong \text{Hom}(U, V)$

odnos matr. zapisa

Karakteristični polinom

Minimalni polinom

Invarijantni potprostori

Svojstvene vrijednosti



Neka je

$$(b_1, \dots, b_k, b_{k+1}, \dots, b_n)$$

bilo koje proširenje danog skupa vektora (b_1, \dots, b_k) iz V .

Neka je $a \in U$ bilo koji vektor. On ima jedinstven prikaz u bazi

$$a = \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i,$$

pa definiramo operator $f : U \rightarrow V$ sa

$$f(a) = f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i a_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i. \quad (\blacktriangle)$$

Tvrdimo da je f linearni operator i da ima traženo svojstvo. Stavimo li u (\blacktriangle) $\alpha_i = 1$, $\alpha_j = 0$, $j \neq i$ dobivamo

$$f(a_i) = b_i, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

$$\begin{aligned} f(\alpha a + \beta b) &= f\left(\alpha \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i + \beta \sum_{i=1}^n \beta_i a_i\right) = \\ &= f\left(\sum_{i=1}^n (\alpha \alpha_i + \beta \beta_i) a_i\right) = \sum_{i=1}^n (\alpha \alpha_i + \beta \beta_i) b_i = \\ &= \alpha \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i + \beta \sum_{i=1}^n \beta_i b_i = \\ &= \alpha f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i a_i\right) + \beta f\left(\sum_{i=1}^n \beta_i a_i\right) = \\ &= \alpha f(a) + \beta f(b) \end{aligned}$$



Korolar 13.

Ako je (a_1, \dots, a_n) baza za U , a (b_1, \dots, b_n) bilo koji uređeni skup vektora iz V , onda postoji jedinstveni linearni operator $f : U \rightarrow V$ sa svojstvom $f(a_i) = b_i$, za svaki $i = 1, \dots, n$.

Dokaz.

Egzistencija od f je dokazana u prethodnom teoremu. Treba još dokazati jedinstvenost. Kada bi postojao još jedan linearni operator $g : U \rightarrow V$ sa svojstvom $g(a_i) = b_i$, $\forall i = 1, \dots, n$, tada bi za $a \in U$ imali

$$\begin{aligned} g(a) &= g\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i a_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i g(a_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i = \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i f(a_i) = f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i a_i\right) = f(a), \end{aligned}$$

pa bi zaista bilo $f = g$.



Korolar 14.

Neka je $B = (a_1, \dots, a_n)$ baza prostora U , a $f : B \rightarrow V$ bilo koje preslikavanje. Tada postoji jedinstveni linearni operator $g : U \rightarrow V$ koji proširuje f , tj. za koji vrijedi $g|_B = f$.

Dokaz.

Stavimo $f(a_i) = b_i$ i primijenimo korolar 13.



Linearni operator je dovoljno zadati na bazi prostora. Dva linearna operatora $U \rightarrow V$ su jednaka akko imaju isto djelovanje na bilo kojoj bazi prostora U .

Izomorfizam vektorskih prostora

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Linearni operatori

Definicija

Primjeri lin. op.

Zadavanje lin. op.

Izomorfizam

Rang i defekt

Matrica lin. op.

Primjeri matr. zapisa

$Y = FX$

$M_{mn} \cong \text{Hom}(U, V)$

odnos matr. zapisa

Karakteristični polinom

Minimalni polinom

Invarijantni potprostori

Svojstvene vrijednosti

Neka su U i V vektorski prostori nad istim poljem F .

Kažemo da je preslikavanje

$$f : U \rightarrow V$$

izomorfizam vektorskih prostora ako vrijedi

- ❶ f je linearni operator,
- ❷ f je bijekcija.

Izomorfizam $f : U \rightarrow U$ zove se **automorfizam** od U ili još **regularni operator**.

Propozicija 42.

Jedinični operator je izomorfizam. Inverz izomorfizma je izomorfizam. Kompozicija izomorfizama je izomorfizam.

Kažemo da je prostor U **izomorfan** s prostorom V i pišemo $U \cong V$, ako postoji bar jedan izomorfizam $f : U \rightarrow V$.

Teorem 16.

Relacija \cong , tj. relacija "biti izomorfan" je relacija ekvivalencije na klasi svih vektorskih prostora nad istim poljem.

Izomorfni vektorski prostori su iste apstraktne strukture, a mogu se razlikovati jedino u naravi svojih elemenata.

Propozicija 43.

Neka je $f : U \rightarrow V$ izomorfizam vektorskih prostora.

Neka je S bilo koji skup vektora iz U . Skup S je linearno nezavisan akko je $f(S)$ linearno nezavisan. Skup S razapinje U akko skup $f(S)$ razapinje V .

Dokažite za vježbu propoziciju 43.



Korolar 15.

*Neka je $f : U \rightarrow V$ izomorfizam vektorskih prostora.
Onda svaka baza od U prelazi po f u neku bazu prostora
 V , i obratno, svaka baza prostora V je slika neke baze
prostora U .*

Teorem 17.

*Dva vektorska prostora nad istim poljem F su izomorfna
akko imaju istu dimenziju.*

Korolar 16.

*Svaki vektorski prostor V dimenzije n nad poljem F je
izomorfan s koordinatnim prostorom F^n .*

Rang i defekt

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Propozicija 44.

Neka je $f : U \rightarrow V$ linearni operator. Ako je $L < U$, onda je $f(L) < V$. Ako je $M < V$, onda je $f^{-1}(M) < U$.

Dokaz.

Neka su $a, b \in f(L)$ bilo koji vektori, a $\alpha, \beta \in F$ proizvoljni skalari. Neka su $x, y \in L$ takvi da je $f(x) = a$, $f(y) = b$. Kako je $L < U$, onda je $\alpha x + \beta y \in L$. Sada imamo

$$\alpha a + \beta b = \alpha f(x) + \beta f(y) = f(\alpha x + \beta y) \in f(L),$$

pa je zaista $f(L) < V$.

Linearni operatori

Definicija

Primjeri lin. op.

Zadavanje lin. op.

Izomorfizam

Rang i defekt

Matrica lin. op.

Primjeri matr. zapisa

$Y = FX$

$M_{mn} \cong \text{Hom}(U, V)$

odnos matr. zapisa

Karakteristični polinom

Minimalni polinom

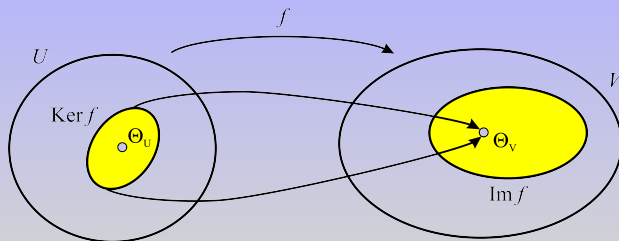
Invarijantni potprostori

Svojstvene vrijednosti



Neka su sada $x, y \in f^{-1}(M)$ bilo koji vektori, a $\alpha, \beta \in F$ proizvoljni skalari. Tada je $f(x) \in M$, $f(y) \in M$. Kako je $M < V$, slijedi da je $\alpha f(x) + \beta f(y) \in M$, odnosno da je $f(\alpha x + \beta y) \in M$. Tada je $\alpha x + \beta y \in f^{-1}(M)$, pa je zaista $f^{-1}(M) < U$.





Neka je $f : U \rightarrow V$ linearni operator.

Slika od f je skup

$$\text{Im } f = S(f) = f(U) = \{f(x) \mid x \in U\}$$

Jezgra ili **nulprostor** od f je skup

$$\text{Ker } f = \mathcal{N}(f) = f^{-1}(\Theta_V) = \{x \in U \mid f(x) = \Theta_V\}$$

Korolar 17.

Neka je $f : U \rightarrow V$ linearni operator. Tada je $\text{Im } f < V$ i
 $\text{Ker } f < U$.

Rang linearnog operatora f

$$r = r(f) = \dim (\text{Im } f)$$

Defekt linearnog operatora f

$$d = d(f) = \dim (\text{Ker } f)$$

Teorem 18 (Teorem o rangu i defektu).

Neka je $f : U \rightarrow V$ linearni operator. Tada je suma ranga i defekta od f jednaka dimenziji prostora U , tj.

$$r(f) + d(f) = \dim U.$$

Matrični zapis linearnog operatora

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

U i V vektorski prostori nad poljem F

$\dim U = n, \quad \dim V = m$

$A = \{a_1, \dots, a_n\}$ baza za U

$B = \{b_1, \dots, b_m\}$ baza za V

$f : U \rightarrow V$ linearni operator

$$f(a_k) = \sum_{i=1}^m \alpha_{ik} b_i$$

Kako je f jednoznačno određen svojim djelovanjem na bazi A , tada je on jednoznačno određen matricom

Linearni operatori

Definicija

Primjeri lin. op.

Zadavanje lin. op.

Izomorfizam

Rang i defekt

Matrica lin. op.

Primjeri matr. zapisa

$Y = FX$

$M_{mn} \cong \text{Hom}(U, V)$

odnos matr. zapisa

Karakteristični polinom

Minimalni polinom

Invarijantni potprostori

Svojstvene vrijednosti



$$F = F_{(A,B)} = \left[\begin{array}{c|c|c} f(a_1) & \cdots & f(a_n) \end{array} \right]$$

odnosno

$$F = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix}$$

Linearni operatori

Definicija

Primjeri lin. op.

Zadavanje lin. op.

Izomorfizam

Rang i defekt

Matrica lin. op.

Primjeri matr. zapisa

$Y = FX$

$M_{mn} \cong \text{Hom}(U, V)$

odnos matr. zapisa

Karakteristični polinom

Minimalni polinom

Invarijantni potprostori

Svojstvene vrijednosti



Matrica F je tipa (m, n) , a njezini stupci su koordinatne matrice slika $f(a_k)$ vektora baze A u bazi B . Matricu F zovemo **matrični zapis**, odnosno **matrični prikaz**, **matrična reprezentacija** ili, kratko, **matrica** operatora f u paru baza (A, B) . Ako je $U = V$, tada standardno uzimamo $A = B$ i govorimo o matrici operatora f u bazi A .

Linearni operatori

Definicija

Primjeri lin. op.

Zadavanje lin. op.

Izomorfizam

Rang i defekt

Matrica lin. op.

Primjeri matr. zapisa

$$Y = FX$$

$$M_{mn} \cong \text{Hom}(U, V)$$

odnos matr. zapisa

Karakteristični polinom

Minimalni polinom

Invarijantni potprostori

Svojstvene vrijednosti

Propozicija 45.

Rang linearnog operatora jednak je rangu matrice tog operatora.

Dokaz.

Po definiciji je rang linearnog operatora $f : U \rightarrow V$ jednak $r = \dim \mathcal{L}(f(a_1), \dots, f(a_n))$, a to je jednako rangu matrice $M(\{f(a_1), \dots, f(a_n)\}) = F$, pa je zaista $r = r(F)$.



Korolar 18.

Linearni operator je izomorfizam vektorskih prostora akko je matrica tog operatora regularna.



Primjeri matričnih zapisa

- operator deriviranja $d : \mathcal{P}_3 \rightarrow \mathcal{P}_2$ u paru kanonskih baza

$$A = \{1, t, t^2\}, \quad B = \{1, t\}$$

$$d(1) = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t$$

$$d(t) = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot t$$

$$d(t^2) = 2t = 0 \cdot 1 + 2 \cdot t$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Linearni operatori

Definicija

Primjeri lin. op.

Zadavanje lin. op.

Izomorfizam

Rang i defekt

Matrica lin. op.

Primjeri matr. zapisa

$Y = FX$

$M_{mn} \cong \text{Hom}(U, V)$

odnos matr. zapisa

Karakteristični polinom

Minimalni polinom

Invarijantni potprostori

Svojstvene vrijednosti



- operator deriviranja $d : \mathcal{P}_3 \rightarrow \mathcal{P}_2$ u paru baza

$$A = \{1 + t, 2, 3t^2\}, B = \{5, 3 - t\}$$

$$d(1 + t) = 1 = \frac{1}{5} \cdot 5 + 0 \cdot (3 - t)$$

$$d(2) = 0 = 0 \cdot 5 + 0 \cdot (3 - t)$$

$$d(3t^2) = 6t = \frac{18}{5} \cdot 5 + (-6) \cdot (3 - t)$$

$$D = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & \frac{18}{5} \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

Linearni operatori

Definicija

Primjeri lin. op.

Zadavanje lin. op.

Izomorfizam

Rang i defekt

Matrica lin. op.

Primjeri matr. zapisa

$Y = FX$

$M_{mn} \cong \text{Hom}(U, V)$

odnos matr. zapisa

Karakteristični polinom

Minimalni polinom

Invarijantni potprostori

Svojstvene vrijednosti

- operator integriranja $s : \mathcal{P}_3 \rightarrow \mathcal{P}_4$ u paru kanonskih baza $A = \{1, t, t^2\}$, $B = \{1, t, t^2, t^3\}$

$$s(1) = t = 0 \cdot 1 + 1 \cdot t + 0 \cdot t^2 + 0 \cdot t^3$$

$$s(t) = \frac{t^2}{2} = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot t^2 + 0 \cdot t^3$$

$$s(t^2) = \frac{t^3}{3} = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2 + \frac{1}{3} \cdot t^3$$

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Linearni operatori

Definicija

Primjeri lin. op.

Zadavanje lin. op.

Izomorfizam

Rang i defekt

Matrica lin. op.

Primjeri matr. zapisa

$Y = FX$

$M_{mn} \cong \text{Hom}(U, V)$

odnos matr. zapisa

Karakteristični polinom

Minimalni polinom

Invarijantni potprostori

Svojstvene vrijednosti

- zrcaljenje s obzirom na xy -ravninu u kanonskoj bazi

$$B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

$$z : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad z(x, y, z) = (x, y, -z)$$

$$z(1, 0, 0) = (1, 0, 0) = 1 \cdot (1, 0, 0) + 0 \cdot (0, 1, 0) + 0 \cdot (0, 0, 1)$$

$$z(0, 1, 0) = (0, 1, 0) = 0 \cdot (1, 0, 0) + 1 \cdot (0, 1, 0) + 0 \cdot (0, 0, 1)$$

$$z(0, 0, 1) = (0, 0, -1) = 0 \cdot (1, 0, 0) + 0 \cdot (0, 1, 0) + (-1) \cdot (0, 0, 1)$$

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Linearni operatori

Definicija

Primjeri lin. op.

Zadavanje lin. op.

Izomorfizam

Rang i defekt

Matrica lin. op.

Primjeri matr. zapisa

$Y = FX$

$M_{mn} \cong \text{Hom}(U, V)$

odnos matr. zapisa

Karakteristični polinom

Minimalni polinom

Invarijantni potprostori

Svojstvene vrijednosti

- projekcija na xy -ravninu u kanonskoj bazi

$$B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

$$p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad p(x, y, z) = (x, y, 0)$$

$$p(1, 0, 0) = (1, 0, 0) = \textcolor{red}{1} \cdot (1, 0, 0) + \textcolor{red}{0} \cdot (0, 1, 0) + \textcolor{red}{0} \cdot (0, 0, 1)$$

$$p(0, 1, 0) = (0, 1, 0) = \textcolor{blue}{0} \cdot (1, 0, 0) + \textcolor{blue}{1} \cdot (0, 1, 0) + \textcolor{blue}{0} \cdot (0, 0, 1)$$

$$p(0, 0, 1) = (0, 0, 0) = \textcolor{magenta}{0} \cdot (1, 0, 0) + \textcolor{magenta}{0} \cdot (0, 1, 0) + \textcolor{magenta}{0} \cdot (0, 0, 1)$$

$$P = \begin{bmatrix} \textcolor{red}{1} & \textcolor{blue}{0} & \textcolor{magenta}{0} \\ \textcolor{red}{0} & \textcolor{blue}{1} & \textcolor{magenta}{0} \\ \textcolor{red}{0} & \textcolor{blue}{0} & \textcolor{magenta}{0} \end{bmatrix}$$

Linearni operatori

Definicija

Primjeri lin. op.

Zadavanje lin. op.

Izomorfizam

Rang i defekt

Matrica lin. op.

Primjeri matr. zapisa

$Y = FX$

$M_{mn} \cong \text{Hom}(U, V)$

odnos matr. zapisa

Karakteristični polinom

Minimalni polinom

Invarijantni potprostori

Svojstvene vrijednosti

- projekcija na y -os u kanonskoj bazi

$$B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

$$p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad p(x, y, z) = (0, y, 0)$$

$$p(1, 0, 0) = (0, 0, 0) = 0 \cdot (1, 0, 0) + 0 \cdot (0, 1, 0) + 0 \cdot (0, 0, 1)$$

$$p(0, 1, 0) = (0, 1, 0) = 0 \cdot (1, 0, 0) + 1 \cdot (0, 1, 0) + 0 \cdot (0, 0, 1)$$

$$p(0, 0, 1) = (0, 0, 0) = 0 \cdot (1, 0, 0) + 0 \cdot (0, 1, 0) + 0 \cdot (0, 0, 1)$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Linearni operatori

Definicija

Primjeri lin. op.

Zadavanje lin. op.

Izomorfizam

Rang i defekt

Matrica lin. op.

Primjeri matr. zapisa

$Y = FX$

$M_{mn} \cong \text{Hom}(U, V)$

odnos matr. zapisa

Karakteristični polinom

Minimalni polinom

Invarijantni potprostori

Svojstvene vrijednosti

- zrcaljenje s obzirom na x -os u kanonskoj bazi

$$B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

$$z : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad z(x, y, z) = (x, -y, -z)$$

$$z(1, 0, 0) = (1, 0, 0) = 1 \cdot (1, 0, 0) + 0 \cdot (0, 1, 0) + 0 \cdot (0, 0, 1)$$

$$z(0, 1, 0) = (0, -1, 0) = 0 \cdot (1, 0, 0) + (-1) \cdot (0, 1, 0) + 0 \cdot (0, 0, 1)$$

$$z(0, 0, 1) = (0, 0, -1) = 0 \cdot (1, 0, 0) + 0 \cdot (0, 1, 0) + (-1) \cdot (0, 0, 1)$$

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Linearni operatori

Definicija

Primjeri lin. op.

Zadavanje lin. op.

Izomorfizam

Rang i defekt

Matrica lin. op.

Primjeri matr. zapisa

$Y = FX$

$M_{mn} \cong \text{Hom}(U, V)$

odnos matr. zapisa

Karakteristični polinom

Minimalni polinom

Invarijantni potprostori

Svojstvene vrijednosti

- V vektorski prostor nad poljem F , $\lambda \in F$

$$h : V \rightarrow V, \quad h(x) = \lambda x$$

U bilo kojoj bazi $B = \{a_1, \dots, a_n\}$ od V , h ima matrični prikaz

$$H = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix}$$

H je matrica tipa (n, n) .

- Specijalno, matrica nuloperatora je nulmatrica, a matrica identitete je jedinična matrica.

Linearni operatori

Definicija

Primjeri lin. op.

Zadavanje lin. op.

Izomorfizam

Rang i defekt

Matrica lin. op.

Primjeri matr. zapisa

$Y = FX$

$M_{mn} \cong \text{Hom}(U, V)$

odnos matr. zapisa

Karakteristični polinom

Minimalni polinom

Invarijantni potprostori

Svojstvene vrijednosti

- Rotacija u \mathbb{R}^2 oko ishodišta za kut φ

$$R_\varphi = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$$

- Rotacija u \mathbb{R}^3 oko z -osi za kut φ

$$R_\varphi = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Linearni operatori

Definicija

Primjeri lin. op.

Zadavanje lin. op.

Izomorfizam

Rang i defekt

Matrica lin. op.

Primjeri matr. zapisa

$Y = FX$

$M_{mn} \cong \text{Hom}(U, V)$

odnos matr. zapisa

Karakteristični polinom

Minimalni polinom

Invarijantni potprostori

Svojstvene vrijednosti

Računanje slike vektora

$f : U \rightarrow V$ linearni operator, $\dim U = n$, $\dim V = m$

$B_U = \{a_1, \dots, a_n\}$, $B_V = \{b_1, \dots, b_m\}$

$F = [\alpha_{ik}]$ matrica od f u paru baza (A, B)

$a \in U$, $X = [\alpha_i]$ matrica od a u bazi A

$Y = [\beta_i]$ matrica od $f(a) \in V$ u bazi B

Propozicija 46.

Uz gornje oznake vrijedi $Y = FX$.

►► Preskoči dokaz

Dokaz.

Po pretpostavci je

$$a = \sum_{k=1}^n \alpha_k a_k.$$

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Linearni operatori

Definicija

Primjeri lin. op.

Zadavanje lin. op.

Izomorfizam

Rang i defekt

Matrica lin. op.

Primjeri matr. zapisa

$Y = FX$

$M_{mn} \cong \text{Hom}(U, V)$

odnos matr. zapisa

Karakteristični polinom

Minimalni polinom

Invarijantni potprostori

Svojstvene vrijednosti



Tada je

$$\begin{aligned} f(a) &= f\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k a_k\right) = \sum_{k=1}^n \alpha_k f(a_k) = \\ &= \sum_{k=1}^n \alpha_k \left(\sum_{i=1}^m \alpha_{ik} b_i\right) = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{k=1}^n \alpha_{ik} \alpha_k\right) b_i. \quad (\square) \end{aligned}$$

S druge strane je

$$f(a) = \sum_{i=1}^m \beta_i b_i, \quad (\blacksquare)$$

Linearni operatori

Definicija

Primjeri lin. op.

Zadavanje lin. op.

Izomorfizam

Rang i defekt

Matrica lin. op.

Primjeri matr. zapisa

$Y = FX$

$M_{mn} \cong \text{Hom}(U, V)$

odnos matr. zapisa

Karakteristični polinom

Minimalni polinom

Invarijantni potprostor

Svojstvene vrijednosti

Linearni operatori

Definicija

Primjeri lin. op.

Zadavanje lin. op.

Izomorfizam

Rang i defekt

Matrica lin. op.

Primjeri matr. zapisa

$$Y = FX$$

$$M_{mn} \cong \text{Hom}(U, V)$$

odnos matr. zapisa

Karakteristični polinom

Minimalni polinom

Invarijantni potprostori

Svojstvene vrijednosti

pa zbog jedinstvenosti prikaza u bazi iz (\square) i (\blacksquare) slijedi

$$\beta_i = \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} \alpha_k, \quad \forall i = 1, \dots, m,$$

pa je zaista

$$Y = FX.$$



Izomorfizam matrica i linearnih operatora

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

$\text{Hom}(U, V)$ je skup svih linearnih operatora $U \rightarrow V$

$\text{Hom } V$ je skup svih linearnih operatora $V \rightarrow V$

Teorem 19.

Neka su $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ i $B = \{b_1, \dots, b_m\}$ baze za prostore U , odnosno V . Neka je

$$\Phi : \text{Hom}(U, V) \rightarrow M_{mn}$$

operator definiran s

$$\Phi(f) = F,$$

gdje je F matrica operatora f u paru baza (A, B) . Tada je Φ izomorfizam vektorskih prostora.

Linearni operatori

Definicija

Primjeri lin. op.

Zadavanje lin. op.

Izomorfizam

Rang i defekt

Matrica lin. op.

Primjeri matr. zapisa

$Y = FX$

$M_{mn} \cong \text{Hom}(U, V)$

odnos matr. zapisa

Karakteristični polinom

Minimalni polinom

Invarijantni potprostori

Svojstvene vrijednosti



Teorem 20.

Neka je $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ baza za prostor V . Neka je

$$\Phi : \text{Hom } V \rightarrow M_n$$

operator definiran s

$$\Phi(f) = F,$$

gdje je F matrica operatora f u bazi B . Tada je Φ izomorfizam algeabri.

Linearni operatori

Definicija

Primjeri lin. op.

Zadavanje lin. op.

Izomorfizam

Rang i defekt

Matrica lin. op.

Primjeri matr. zapisa

$Y = FX$

$M_{mn} \cong \text{Hom}(U, V)$

odnos matr. zapisa

Karakteristični polinom

Minimalni polinom

Invarijantni potprostori

Svojstvene vrijednosti

Napomena

Preslikavanje $\Phi : \text{Hom } V \rightarrow M_n$ je izomorfizam algeabri ako vrijedi

- ① Φ je izomorfizam vektorskih prostora
- ② $\Phi(g \circ f) = \Phi(g) \cdot \Phi(f)$

Napomena

Pomoću izomorfizma iz prethodna dva teorema, **uz odabrane baze**, je uspostavljena korespondencija

$$f + g \mapsto F + G$$

$$\lambda f \mapsto \lambda F$$

$$f \circ g \mapsto FG$$

Linearni operatori

Definicija

Primjeri lin. op.

Zadavanje lin. op.

Izomorfizam

Rang i defekt

Matrica lin. op.

Primjeri matr. zapisa

$$Y = FX$$

$$M_{mn} \cong \text{Hom}(U, V)$$

odnos matr. zapisa

Karakteristični polinom

Minimalni polinom

Invarijantni potprostori

Svojstvene vrijednosti

Dakle, **kada si fiksiramo baze**, tada možemo linearni operator poistovjetiti s njegovom matricom, i obratno, svaka matrica predstavlja točno jedan linearni operator. Nadalje, sumi linearnih operatora odgovara suma njihovih matrica, a kompoziciji linearnih operatora produkt njihovih matrica, i to je razlog zašto se matrice množe na onaj "čudni" način.

Važno je da to poistovjeđivanje ovisi o odabranim bazama jer će općenito, u različitim bazama ista matrica predstavljati različite linearne operatore, i obratno, u različitim bazama isti linearni operator ima općenito različite matrice.

Odnos matričnih zapisa istog operatora

$f : U \rightarrow V$ linearni operator

F matrica od f u paru baza (A, B)

F' matrica od f u paru baza (A', B')

Teorem 21.

Neka su F i F' matrice operatora f u paru baza (A, B) , odnosno (A', B') . Tada je

$$F' = T^{-1}FS,$$

gdje je S matrica prijelaza $A \xrightarrow{S} A'$, a T matrica prijelaza $B \xrightarrow{T} B'$.

► Preskoči dokaz

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Linearni operatori

Definicija

Primjeri lin. op.

Zadavanje lin. op.

Izomorfizam

Rang i defekt

Matrica lin. op.

Primjeri matr. zapisa

$Y = FX$

$M_{mn} \cong \text{Hom}(U, V)$

odnos matr. zapisa

Karakteristični polinom

Minimalni polinom

Invarijantni potprostori

Svojstvene vrijednosti



Dokaz.

Neka je $a \in U$ proizvoljni vektor, a X i X' njegove koordinatne matrice u bazama A , odnosno A' prostora U .

Neka su Y i Y' koordinatne matrice od $f(a)$ u bazama B , odnosno B' prostora V . Tada znamo da je ◀ Propoz. 46.

$$Y = FX, \quad Y' = F'X'.$$

Nadalje, isto tako znamo da je ◀ Teorem 14.

$$X = SX', \quad Y = TY'.$$

Primjenjujući gornje relacije, dobivamo

$$F'X' = Y' = T^{-1}Y = T^{-1}FX = T^{-1}FSX' = (T^{-1}FS)X'$$

Kako to vrijedi za svaku matricu $X' \in M_{n1}$, slijedi da je

$$F' = T^{-1}FS.$$



Zadatak 14.

Neka su $A, B \in M_{mn}$. Dokažite da ako je $AX = BX$ za svaku matricu $X \in M_{n1}$, da je tada $A = B$.

Za matrice $A, B \in M_{mn}$ kažemo da su **ekvivalentne**, i pišemo $A \sim B$, ako postoje regularne matrice $S \in M_m$ i $T \in M_n$ takve da je $B = SAT$.

Za matrice $A, B \in M_n$ kažemo da su **slične**, i pišemo $A \simeq B$, ako postoji regularna matrica $T \in M_n$ takva da je $B = T^{-1}AT$.

Korolar 19.

Matrični zapisi F i F' istog linearnog operatora $f : U \rightarrow V$ u različitim parovima baza su ekvivalentne matrice, tj. $F \sim F'$.

Korolar 20.

Neka su F i F' matrice operatora $f : V \rightarrow V$ u bazi B , odnosno B' . Tada je

$$F' = T^{-1}FT,$$

gdje je T matrica prijelaza $B \xrightarrow{T} B'$.

Korolar 21.

Matrični zapisi F i F' istog linearnog operatora $f : V \rightarrow V$ u različitim bazama prostora V su slične matrice, tj. $F \simeq F'$.

Linearni operatori

Definicija

Primjeri lin. op.

Zadavanje lin. op.

Izomorfizam

Rang i defekt

Matrica lin. op.

Primjeri matr. zapisa

$Y = FX$

$M_{mn} \cong \text{Hom}(U, V)$

odnos matr. zapisa

Karakteristični polinom

Minimalni polinom

Invarijantni potprostori

Svojstvene vrijednosti

Karakteristični polinom

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

A kvadratna matrica reda n nad poljem F

Matricu

$$C = A - \lambda I,$$

gdje je λ varijabilni parametar, zovemo **karakteristična matrica** ili **svojstvena matrica** za matricu A .

Ako je $A = [\alpha_{ik}]$, tada je

$$C = \begin{bmatrix} \alpha_{11} - \lambda & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - \lambda & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} - \lambda \end{bmatrix}$$

Linearni operatori

Definicija

Primjeri lin. op.

Zadavanje lin. op.

Izomorfizam

Rang i defekt

Matrica lin. op.

Primjeri matr. zapisa

$Y = FX$

$M_{mn} \cong \text{Hom}(U, V)$

odnos matr. zapisa

Karakteristični polinom

Minimalni polinom

Invarijantni potprostori

Svojstvene vrijednosti



Karakteristični ili svojstveni polinom matrice A je

$$k_A(\lambda) = \det(A - \lambda I),$$

i to je polinom n -tog stupnja u varijabli λ s koeficijentima iz polja F ,

$$k_A(\lambda) = k_n \lambda^n + k_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + k_0, \quad k_i \in F.$$

Pripadnu jednadžbu

$$k_A(\lambda) = 0$$

zovemo **karakteristična** ili **svojstvena jednadžba** za matricu A .

Linearni operatori

Definicija

Primjeri lin. op.

Zadavanje lin. op.

Izomorfizam

Rang i defekt

Matrica lin. op.

Primjeri matr. zapisa

$Y = FX$

$M_{mn} \cong \text{Hom}(U, V)$

odnos matr. zapisa

Karakteristični polinom

Minimalni polinom

Invarijantni potprostori

Svojstvene vrijednosti

Propozicija 47.

U karakterističnom polinomu matrice A su koeficijenti:

$$k_n = (-1)^n, \quad k_{n-1} = (-1)^{n-1} \operatorname{tr} A, \quad k_0 = \det A.$$

Propozicija 48.

Slične matrice imaju isti karakteristični polinom.

Dokaz.

$A \simeq B \Rightarrow B = T^{-1}AT$, gdje je T regularna matrica.

$$\begin{aligned} k_B(\lambda) &= \det(B - \lambda I) = \det(T^{-1}AT - \lambda(T^{-1}T)) = \\ &= \det(T^{-1}AT - T^{-1}(\lambda I)T) = \det(T^{-1}(A - \lambda I)T) = \\ &= \det T^{-1} \cdot \det(A - \lambda I) \cdot \det T = \\ &= \det T^{-1} \cdot \det T \cdot \det(A - \lambda I) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \det(T^{-1}T) \cdot \det(A - \lambda I) = \det I \cdot \det(A - \lambda I) = \\ &= \det(A - \lambda I) = k_A(\lambda) \end{aligned}$$



$f : V \rightarrow V$ linearni operator

Karakteristični ili svojstveni polinom k_f operatora f je

$$k_f(\lambda) = k_F(\lambda),$$

gdje je F bilo koji matrični prikaz operatora f .

Trag od f :

$$\text{tr } f = \text{tr } F.$$

Determinanta od f :

$$\det f = \det F.$$

Rang, defekt, karakteristični polinom, trag i determinanta su **invarijante** linearnog operatora jer ne ovise o njegovom matričnom prikazu.

Znamo da je $M_n(F)$ vektorski prostor nad poljem F ,
 $\dim M_n(F) = n^2$. Tada su

$$I, A, A^2, \dots, A^n, \dots, A^{n^2}$$

linearno zavisni vektori, pa postoje $\alpha_i \in F$ koji nisu svi jednaki nula, takvi da je

$$\alpha_0 I + \alpha_1 A + \dots + \alpha_n A^n + \dots + \alpha_{n^2} A^{n^2} = O.$$

Linearni operatori

Definicija

Primjeri lin. op.

Zadavanje lin. op.

Izomorfizam

Rang i defekt

Matrica lin. op.

Primjeri matr. zapisa

$Y = FX$

$M_{mn} \cong \text{Hom}(U, V)$

odnos matr. zapisa

Karakteristični polinom

Minimalni polinom

Invarijantni potprostori

Svojtvene vrijednosti

To zapravo znači da matrica A poništava polinom

$$p(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1\lambda + \cdots + \alpha_{n^2}\lambda^{n^2}.$$

Teorem 22 (Hamilton-Cayley).

Svaka kvadratna matrica A poništava svoj karakteristični polinom, tj. $k_A(A) = O$.

Linearni operatori

Definicija

Primjeri lin. op.

Zadavanje lin. op.

Izomorfizam

Rang i defekt

Matrica lin. op.

Primjeri matr. zapisa

$Y = FX$

$M_{mn} \cong \text{Hom}(U, V)$

odnos matr. zapisa

Karakteristični polinom

Minimalni polinom

Invarijantni potprostori

Svojstvene vrijednosti

Minimalni polinom

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

A kvadratna matrica nad poljem F

Minimalni polinom matrice A je polinom $m_A(\lambda) \neq 0$
najnižeg stupnja kojeg matrica A poništava, tj.
 $m_A(A) = O$.

Pripadnu jednadžbu $m_A(\lambda) = 0$ nazivamo **minimalna
jednadžba** matrice A .

Propozicija 49.

*Neka je $p(\lambda)$ bilo koji polinom s koeficijentima iz polja F
kojeg matrica A poništava. Tada je $p(\lambda)$ djeljiv sa svakim
minimalnim polinomom $m(\lambda)$ matrice A .*

Linearni operatori

Definicija

Primjeri lin. op.

Zadavanje lin. op.

Izomorfizam

Rang i defekt

Matrica lin. op.

Primjeri matr. zapisa

$Y = FX$

$M_{mn} \cong \text{Hom}(U, V)$

odnos matr. zapisa

Karakteristični polinom

Minimalni polinom

Invarijantni potprostori

Svojstvene vrijednosti



Dokaz.

Iz definicije minimalnog polinoma slijedi da je $\deg m \leq \deg p$. Prema teoremu o dijeljenju s ostatkom, postoje polinomi $q(\lambda)$ i $r(\lambda)$ takvi da je

$$p(\lambda) = m(\lambda) \cdot q(\lambda) + r(\lambda),$$

pri čemu je $q(\lambda)$ kvocijentni polinom, a $r(\lambda)$ je ostatak i $\deg r < \deg m$. Po pretpostavci je $p(A) = O$, pa imamo

$$p(A) = O = m(A) \cdot q(A) + r(A),$$

a odavde zbog $m(A) = O$, slijedi da je $r(A) = O$. No, zbog minimalnosti od $m(\lambda)$ mora biti $r(\lambda) = 0$.



Korolar 22.

Karakteristični polinom matrice je djeljiv s njezinim minimalnim polinomom.

Korolar 23.

Minimalni polinom dane matrice je jedinstven do na skalarni faktor različit od nule, tj. ako su $m_1(\lambda)$ i $m_2(\lambda)$ minimalni polinomi iste matrice, tada postoji $\alpha \in F$, $\alpha \neq 0$, takav da je $m_2(\lambda) = \alpha m_1(\lambda)$.

Linearni operatori

Definicija

Primjeri lin. op.

Zadavanje lin. op.

Izomorfizam

Rang i defekt

Matrica lin. op.

Primjeri matr. zapisa

$Y = FX$

$M_{mn} \cong \text{Hom}(U, V)$

odnos matr. zapisa

Karakteristični polinom

Minimalni polinom

Invarijantni potprostori

Svojstvene vrijednosti

Propozicija 50.

Slične matrice imaju iste minimalne polinome.

► Preskoči dokaz

Dokaz.

$$B = T^{-1}AT$$

$m_A(\lambda), m_B(\lambda)$ – minimalni polinomi od A i B

$$m_A(\lambda) = \alpha_m \lambda^m + \alpha_{m-1} \lambda^{m-1} + \dots + \alpha_0$$

Lako se vidi da je

$$B^j = (T^{-1}AT)^j = T^{-1}A^jT, \quad \forall j = 0, \dots, m$$

Sada imamo

Linearni operatori

Definicija

Primjeri lin. op.

Zadavanje lin. op.

Izomorfizam

Rang i defekt

Matrica lin. op.

Primjeri matr. zapisa

$Y = FX$

$M_{mn} \cong \text{Hom}(U, V)$

odnos matr. zapisa

Karakteristični polinom

Minimalni polinom

Invarijantni potprostor

Svojstvene vrijednosti

$$\begin{aligned} m_A(B) &= \alpha_m(T^{-1}AT)^m + \alpha_{m-1}(T^{-1}AT)^{m-1} + \dots + \alpha_0 I \\ &= T^{-1}(\alpha_m A^m)T + T^{-1}(\alpha_{m-1} A^{m-1})T + \dots + T^{-1}(\alpha_0 I)T = \\ &= T^{-1}(\alpha_m A^m + \alpha_{m-1} A^{m-1} + \dots + \alpha_0 I)T = T^{-1} \underbrace{m_A(A)}_{=O} T = \end{aligned}$$

Dakle, B poništava minimalni polinom od A , pa je

$$\deg m_B \leq \deg m_A.$$

Analogno, polazeći od $A = TBT^{-1}$, dobivamo

$$\deg m_A \leq \deg m_B,$$

pa zaključujemo da je

Linearni operatori

Definicija

Primjeri lin. op.

Zadavanje lin. op.

Izomorfizam

Rank i defekt

Matrica lin. op.

Primjeri matr. zapisa

$Y = FX$

$M_{mn} \cong \text{Hom}(U, V)$

odnos matr. zapisa

Karakteristični polinom

Minimalni polinom

Invarijantni potprostori

Svojstvene vrijednosti



Linearni operatori

Definicija

Primjeri lin. op.

Zadavanje lin. op.

Izomorfizam

Rang i defekt

Matrica lin. op.

Primjeri matr. zapisa

$$Y = FX$$

$$M_{mn} \cong \text{Hom}(U, V)$$

odnos matr. zapisa

Karakteristični polinom

Minimalni polinom

Invarijantni potprostori

Svojstvene vrijednosti

$$\deg m_B = \deg m_A.$$

Kako je $m_A(B) = O$, po ◀ propoziciji 49 mora biti

$$\frac{m_A(\lambda)}{m_B(\lambda)} = q(\lambda),$$

a kako je $\deg m_B = \deg m_A$, slijedi da je

$$q(\lambda) = \text{const.} = \alpha \neq 0$$

pa je $m_A(\lambda) = \alpha m_B(\lambda)$.



$f : V \rightarrow V$ linearni operator

Minimalni polinom m_f tog operatora je

$$m_f(\lambda) = m_F(\lambda),$$

gdje je F bilo koji matrični prikaz operatora f .

Minimalni polinom je isto jedna invarijanta linearnog operatora jer ne ovisi o njegovom matričnom prikazu.

Linearni operatori

Definicija

Primjeri lin. op.

Zadavanje lin. op.

Izomorfizam

Rang i defekt

Matrica lin. op.

Primjeri matr. zapisa

$Y = FX$

$M_{mn} \cong \text{Hom}(U, V)$

odnos matr. zapisa

Karakteristični polinom

Minimalni polinom

Invarijantni potprostor

Svojstvene vrijednosti

Propozicija 51.

Svaki ireducibilni faktor karakterističnog polinoma neke matrice je također ireducibilni faktor minimalnog polinoma te matrice.

Korolar 24.

Ako u karakterističnom polinomu nema istih ireducibilnih faktora, tada se taj polinom podudara s minimalnim polinomom matrice.

Linearni operatori

Definicija

Primjeri lin. op.

Zadavanje lin. op.

Izomorfizam

Rang i defekt

Matrica lin. op.

Primjeri matr. zapisa

$Y = FX$

$M_{mn} \cong \text{Hom}(U, V)$

odnos matr. zapisa

Karakteristični polinom

Minimalni polinom

Invarijantni potprostori

Svojstvene vrijednosti

Invarijantni potprostori

$f : V \rightarrow V$ linearni operator

$L \subset V$ potprostor sa svojstvom da je $f(L) \subseteq L$

Tada kažemo da je L **invarijantni potprostor** za operator f , ili kraće, da je L **f -invarijantan** potprostor od V .

Trivijalni invarijantni potprostori:

$$L = \{0_V\}, \quad L = V$$

– nas će zanimati jednodimenzionalni invarijantni potprostori danog linearnog operatora $f : V \rightarrow V$.

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Linearni operatori

Definicija

Primjeri lin. op.

Zadavanje lin. op.

Izomorfizam

Rang i defekt

Matrica lin. op.

Primjeri matr. zapisa

$Y = FX$

$M_{mn} \cong \text{Hom}(U, V)$

odnos matr. zapisa

Karakteristični polinom

Minimalni polinom

Invarijantni potprostori

Svojstvene vrijednosti



Svojstvene vrijednosti

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

V vektorski prostor nad poljem F , $\dim V = n$

$f : V \rightarrow V$ linearni operator

$L < V$ f -invarijantni potprostor, $\dim L = 1$

Neka je $\{a\}$ baza za L

L je f -invarijantan $\Rightarrow f(a) \in L$

$f(a) \in L \Rightarrow \exists \lambda \in F, f(a) = \lambda a$

Neka je $x \in L$. Tada je $x = \alpha a$ za neko $\alpha \in F$.

$$f(x) = f(\alpha a) = \alpha f(a) = \alpha(\lambda a) = \lambda(\alpha a) = \lambda x$$

Linearni operatori

Definicija

Primjeri lin. op.

Zadavanje lin. op.

Izomorfizam

Rang i defekt

Matrica lin. op.

Primjeri matr. zapisa

$Y = FX$

$M_{mn} \cong \text{Hom}(U, V)$

odnos matr. zapisa

Karakteristični polinom

Minimalni polinom

Invarijantni potprostori

Svojstvene vrijednosti



Problem određivanja skalara $\lambda \in F$ i vektora $x \in V$ za koje je

$$f(x) = \lambda x \quad (1)$$

naziva se **problem svojstvenih vrijednosti** za operator $f : V \rightarrow V$.

(1) je jednačžba s dvije nepoznanice: jedna od njih je skalar, a druga vektor.

Linearni operatori

Definicija

Primjeri lin. op.

Zadavanje lin. op.

Izomorfizam

Rang i defekt

Matrica lin. op.

Primjeri matr. zapisa

$Y = FX$

$M_{mn} \cong \text{Hom}(U, V)$

odnos matr. zapisa

Karakteristični polinom

Minimalni polinom

Invarijantni potprostor

Svojstvene vrijednosti

$f : V \rightarrow V$ linearni operator

Skalar $\lambda \in F$ zovemo **svojstvena vrijednost** operatora f ako postoji vektor $a \in V$, $a \neq \Theta_V$, takav da vrijedi

$$f(a) = \lambda a.$$

Svaki vektor a , $a \neq \Theta_V$, koji zadovoljava navedeni uvjet, naziva se **svojstveni vektor** operatora f pridružen svojstvenoj vrijednosti λ .

$$S(\lambda) = \{a \in V \mid f(a) = \lambda a\}$$

Linearni operatori

Definicija

Primjeri lin. op.

Zadavanje lin. op.

Izomorfizam

Rang i defekt

Matrica lin. op.

Primjeri matr. zapisa

$Y = FX$

$M_{mn} \cong \text{Hom}(U, V)$

odnos matr. zapisa

Karakteristični polinom

Minimalni polinom

Invarijantni potprostori

Svojstvene vrijednosti

Propozicija 52.

Skup $S(\lambda)$ je potprostor od V .

Dokaz.

$\alpha, \beta \in F$ proizvoljni skalari

$$a, b \in S(\lambda) \Rightarrow f(a) = \lambda a, f(b) = \lambda b$$

$$\begin{aligned} f(\alpha a + \beta b) &= \alpha f(a) + \beta f(b) = \alpha(\lambda a) + \beta(\lambda b) = \\ &= \lambda(\alpha a) + \lambda(\beta b) = \lambda(\alpha a + \beta b) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \alpha a + \beta b \in S(\lambda) \Rightarrow S(\lambda) < V.$$



Linearni operatori

Definicija

Primjeri lin. op.

Zadavanje lin. op.

Izomorfizam

Rang i defekt

Matrica lin. op.

Primjeri matr. zapisa

$Y = FX$

$M_{mn} \cong \text{Hom}(U, V)$

odnos matr. zapisa

Karakteristični polinom

Minimalni polinom

Invarijantni potprostori

Svojtvene vrijednosti

Potprostor $S(\lambda)$ zovemo **svojstveni potprostor** operatora f pridružen svojstvenoj vrijednosti λ , a njegovu dimenziju **geometrijska kratnost** od λ .

Spektar operatora f je skup svih svojstvenih vrijednosti operatora f . Označavamo ga sa $\sigma(f)$.

Propozicija 53.

Skalar $\lambda_0 \in F$ je svojstvena vrijednost operatora f akko je λ_0 nultočka karakterističnog polinoma $k_f(\lambda)$ tog operatora.

Linearni operatori

Definicija

Primjeri lin. op.

Zadavanje lin. op.

Izomorfizam

Rang i defekt

Matrica lin. op.

Primjeri matr. zapisa

$Y = FX$

$M_{mn} \cong \text{Hom}(U, V)$

odnos matr. zapisa

Karakteristični polinom

Minimalni polinom

Invarijantni potprostori

Svojstvene vrijednosti

Dokaz.

Neka je F matrični zapis operatora f .

\Rightarrow

$\lambda_0 \in \sigma(f) \Rightarrow \exists a \neq \Theta, f(a) = \lambda_0 a$, odnosno

$$(f - \lambda_0 e)(a) = \Theta$$

gdje je $e : V \rightarrow V$ jedinični operator.

Iz toga slijedi da operator

$$c = f - \lambda_0 e$$

ima netrivialnu jezgru, pa onda nije bijektivan, pa niti regularan. Kako je matrični zapis operatora c matrica

$C = F - \lambda_0 I$, mora biti

$$\det C = \det (F - \lambda_0 I) = 0,$$

što pokazuje da je λ_0 nultočka od $k_f(\lambda)$.



Neka je $\lambda_0 \in F$ takav da je $k_F(\lambda_0) = 0$, tj.

$\det (F - \lambda_0 I) = 0$. To znači da $f - \lambda_0 e$ nije regularni operator, pa postoji vektor $a \neq \Theta$ takav da je

$$(f - \lambda_0 e)(a) = \Theta,$$

dakle, $f(a) = \lambda_0 a$, a to pokazuje da je $\lambda_0 \in \sigma(f)$.



Napomena

Linearni operator koji djeluje na n -dimenzionalnom prostoru imat će najviše n svojstvenih vrijednosti, ali i manje (možda čak nijednu), u zavisnosti o tome koliko rješenja karakteristične jednadžbe pripada polju nad kojim je linearni operator definiran. Tih teškoća nema ako se promatraju **algebarski zatvorena** polja.

Linearni operatori

Definicija

Primjeri lin. op.

Zadavanje lin. op.

Izomorfizam

Rang i defekt

Matrica lin. op.

Primjeri matr. zapisa

$Y = FX$

$M_{mn} \cong \text{Hom}(U, V)$

odnos matr. zapisa

Karakteristični polinom

Minimalni polinom

Invarijantni potprostori

Svojstvene vrijednosti

Algebarski zatvorena polja

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Za polje F kažemo da je **algebarski zatvoreno** ako svaki polinom $p(\lambda)$, s koeficijentima iz tog polja, ima nultočku u polju F .

Teorem 23.

Svako polje je sadržano u nekom algebarski zatvorenom polju.

Polje \mathbb{C} je algebarski zatvoreno polje, dok, nažalost, polja \mathbb{Q} i \mathbb{R} nisu algebarski zatvorena.

Linearni operatori

Definicija

Primjeri lin. op.

Zadavanje lin. op.

Izomorfizam

Rang i defekt

Matrica lin. op.

Primjeri matr. zapisa

$Y = FX$

$M_{mn} \cong \text{Hom}(U, V)$

odnos matr. zapisa

Karakteristični polinom

Minimalni polinom

Invarijantni potprostori

Svojstvene vrijednosti



Svaki polinom $p(\lambda)$ stupnja $m \geq 1$ s koeficijentima iz algebarski zatvorenog polja F dopušta faktORIZACIJU u linearne faktore u tom polju, tj.

$$p(\lambda) = \alpha_m(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_m),$$

gdje su $\alpha_m, \lambda_1, \dots, \lambda_m \in F$.

Primjer 12.

Rotacija za kut φ u \mathbb{R}^2 nema svojstvenih vrijednosti ako je $\varphi \neq 0$ i $\varphi \neq \pi$, što je i geometrijski jasno. Rotacija u \mathbb{R}^3 je uvijek rotacija oko nekog pravca pa onda ona uvijek ima barem jednu svojstvenu vrijednost.

Primjer 13.

Neka je $f : V \rightarrow V$ linearni operator s matričnim prikazom

$$F = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Njegova karakteristična jednadžba je $\lambda^2 + 4 = 0$. Ako je V vektorski prostor nad poljem \mathbb{C} , onda f ima dvije svojstvene vrijednosti $\lambda_1 = 2i$ i $\lambda_2 = -2i$, a ako je V vektorski prostor nad poljem \mathbb{R} , tada f nema svojstvenih vrijednosti.

Linearni operatori

Definicija

Primjeri lin. op.

Zadavanje lin. op.

Izomorfizam

Rang i defekt

Matrica lin. op.

Primjeri matr. zapisa

$Y = FX$

$M_{mn} \cong \text{Hom}(U, V)$

odnos matr. zapisa

Karakteristični polinom

Minimalni polinom

Invarijantni potprostori

Svojstvene vrijednosti

Propozicija 54.

Linearni operator koji djeluje na n -dimenzionalnom vektorskom prostoru nad algebarski zatvorenim poljem ima točno n svojstvenih vrijednosti (među kojima može biti i jednakih).

Algebarska kratnost svojstvene vrijednosti λ je njezina kratnost kao nultočke karakterističnog polinoma.

Geometrijska kratnost svojstvene vrijednosti je uvijek manja ili jednaka od njezine algebarske kratnosti.

Linearni operatori

Definicija

Primjeri lin. op.

Zadavanje lin. op.

Izomorfizam

Rang i defekt

Matrica lin. op.

Primjeri matr. zapisa

$Y = FX$

$M_{mn} \cong \text{Hom}(U, V)$

odnos matr. zapisa

Karakteristični polinom

Minimalni polinom

Invarijantni potprostori

Svojstvene vrijednosti

Kako odrediti $S(\lambda_0)$ za operator $f : V \rightarrow V$?

Treba riješiti jednadžbu

$$f(a) = \lambda_0 a,$$

gdje je vektor $a \in V$ nepoznanica.

Neka je F matični prikaz operatora f u nekoj bazi, a X koordinatna matrica vektora a u toj istoj bazi. Tada gornju jednakost možemo matično zapisati kao

$$FX = \lambda_0 X,$$

ili

$$(F - \lambda_0 I)X = O.$$

Linearni operatori

Definicija

Primjeri lin. op.

Zadavanje lin. op.

Izomorfizam

Rang i defekt

Matrica lin. op.

Primjeri matr. zapisa

$Y = FX$

$M_{mn} \cong \text{Hom}(U, V)$

odnos matr. zapisa

Karakteristični polinom

Minimalni polinom

Invarijantni potprostori

Svojstvene vrijednosti



Ova matrična jednadžba je ekvivalentna s homogenim sustavom od n linearnih jednadžbi s n nepoznanica. Kako je $\det(F - \lambda_0 I) = 0$, prema Roucheovom teoremu taj će sustav imati netrivialnih rješenja i svako takvo rješenje predstavlja koordinate nekog svojstvenog vektora pridruženog svojstvenoj vrijednosti λ_0 .

Teorem 24.

Neka su $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ međusobno različite svojstvene vrijednosti operatora $f : V \rightarrow V$ i neka su $a_1, \dots, a_s \in V$ svojstveni vektori tog operatora, odabrani tako da je vektor a_i pridružen svojstvenoj vrijednosti λ_i , za svaki $i = 1, \dots, s$. Tada je skup $S = \{a_1, \dots, a_s\}$ linearno nezavisan u V .

►► Preskoči dokaz

Dokaz.

Pretpostavimo da je skup S linearno zavisan i da prvih k , $k < s$, vektora predstavlja maksimalni linearno nezavisan podskup od S .

Prema tome, preostali vektori u S su linearne kombinacije vektora a_1, \dots, a_k . Tada, npr. posljednji vektor a_s možemo na jednoznačan način prikazati u obliku

$$a_s = \sum_{i=1}^k \alpha_i a_i. \quad (\text{S1})$$

Pritom je bar jedan od $\alpha_i \neq 0$, jer bi u protivnom bilo $a_s = \Theta_V$, suprotno definiciji svojstvenog vektora. Primjenom operatora f na relaciju (S1) dobivamo

Linearni operatori

Definicija

Primjeri lin. op.

Zadavanje lin. op.

Izomorfizam

Rang i defekt

Matrica lin. op.

Primjeri matr. zapisa

$Y = FX$

$M_{mn} \cong \text{Hom}(U, V)$

odnos matr. zapisa

Karakteristični polinom

Minimalni polinom

Invarijantni potprostori

Svojstvene vrijednosti

Linearni operatori

Definicija

Primjeri lin. op.

Zadavanje lin. op.

Izomorfizam

Rang i defekt

Matrica lin. op.

Primjeri matr. zapisa

$Y = FX$

$M_{mn} \cong \text{Hom}(U, V)$

odnos matr. zapisa

Karakteristični polinom

Minimalni polinom

Invarijantni potprostori

Svojstvene vrijednosti

$$f(a_s) = \sum_{i=1}^k \alpha_i f(a_i),$$

odnosno, zbog $f(a_i) = \lambda_i a_i$,

$$\lambda_s a_s = \sum_{i=1}^k \alpha_i \lambda_i a_i.$$

Razlikujemo dva slučaja. Ako je $\lambda_s = 0$, nijedan od λ_i , $i \leq k$, ne može biti nula, jer su po pretpostavci svojstvene vrijednosti $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ različite.

Kako ni svi α_i nisu nula, u prikazu

$$\Theta_V = \sum_{i=1}^k \alpha_i \lambda_i a_i$$

bar je jedan od koeficijenata različit od 0, što znači da je skup $\{a_1, \dots, a_k\}$ linearno zavisn, protivno pretpostavci.

Ako pak je $\lambda_s \neq 0$, imamo

$$a_s = \sum_{i=1}^k \alpha_i \lambda_i \lambda_s^{-1} a_i. \quad (S2)$$

Kako je $\lambda_i \lambda_s^{-1} \neq 1$ za svaki $i \leq k$, i kako svi α_i nisu 0, (S2) je prikaz od a_s različit od (S1), što je kontradikcija s jedinstvenošću prikaza. U svakom smo slučaju dobili kontradikciju, pa skup S mora biti linearno nezavisan. ♥

Dio V

Polinomi

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Polinomi

Definicija polinoma

Prsten polinoma

Jednakost polinoma

Određenost polinoma

Dijeljenje polinoma

Hornerov algoritam

Razvoj po $x - a$

$M(f, g)$

Kompleksni brojevi

Nultočke polinoma

Cjelobrojne nultočke

Racionalne nultočke

Kompleksne nultočke

Simetrične jednadžbe

Cardanova formula

Ferrarijeva metoda

● Polinomi

- Definicija polinoma
- Prsten polinoma
- Jednakost polinoma
- Određenost polinoma
- Dijeljenje polinoma
- Hornerov algoritam
- Razvoj polinoma po potencijama od $x - a$
- Najveća zajednička mjera polinoma
- Kompleksni brojevi
- Nultočke polinoma
- Cjelobrojne nultočke
- Racionalne nultočke
- Kompleksne nultočke
- Simetrične jednadžbe
- Cardanova formula
- Ferrarijeva metoda

Polinomi

Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
 $M(f, g)$
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

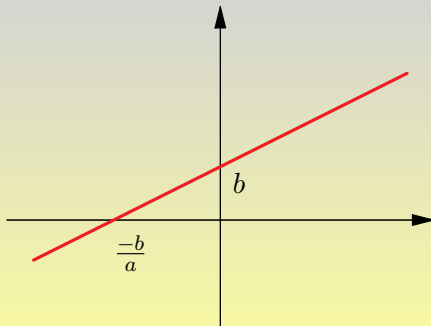
Definicija polinoma

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Polinom prvog stupnja je funkcija oblika

$$f(x) = ax + b, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0$$



Polinomi

Definicija polinoma

Prsten polinoma

Jednakost polinoma

Određenost polinoma

Dijeljenje polinoma

Hornerov algoritam

Razvoj po $x - a$

$M(f, g)$

Kompleksni brojevi

Nultočke polinoma

Cjelobrojne nultočke

Racionalne nultočke

Kompleksne nultočke

Simetrične jednačbe

Cardanova formula

Ferrarijeva metoda

Polinomi

Definicija polinoma

Prsten polinoma

Jednakost polinoma

Određenost polinoma

Dijeljenje polinoma

Hornerov algoritam

Razvoj po $x - a$

$M(f, g)$

Kompleksni brojevi

Nultočke polinoma

Cjelobrojne nultočke

Racionalne nultočke

Kompleksne nultočke

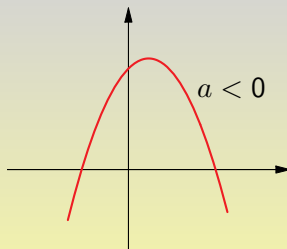
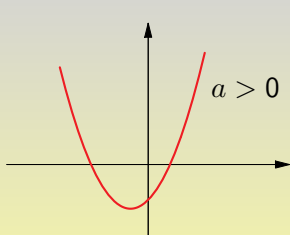
Simetrične jednadžbe

Cardanova formula

Ferrarijeva metoda

Polinom drugog stupnja je funkcija oblika

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0$$



Polinom u jednoj varijabli x s realnim koeficijentima je funkcija oblika

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

gdje su $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}, a_n \neq 0$.

stupanj polinoma: $\deg f = \text{st } f = n$

a_n – vodeći koeficijent a_0 – slobodni član

Sigma zapis polinoma:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

Polinom u jednoj varijabli x s kompleksnim koeficijentima je funkcija oblika

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

gdje su $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$.

$\mathbb{R}[x]$ – skup svih polinoma s realnim koeficijentima u jednoj varijabli

$\mathbb{C}[x]$ – skup svih polinoma s kompleksnim koeficijentima u jednoj varijabli

Polinomi

Definicija polinoma

Prsten polinoma

Jednakost polinoma

Određenost polinoma

Dijeljenje polinoma

Hornerov algoritam

Razvoj po $x - a$

$M(f, g)$

Kompleksni brojevi

Nultočke polinoma

Cjelobrojne nultočke

Racionalne nultočke

Kompleksne nultočke

Simetrične jednačbe

Cardanova formula

Ferrarijeva metoda

Polinomi

Definicija polinoma

Prsten polinoma

Jednakost polinoma

Određenost polinoma

Dijeljenje polinoma

Hornerov algoritam

Razvoj po $x - a$

$M(f, g)$

Kompleksni brojevi

Nultočke polinoma

Cjelobrojne nultočke

Racionalne nultočke

Kompleksne nultočke

Simetrične jednačbe

Cardanova formula

Ferrarijeva metoda

Normirani polinom je polinom čiji je vodeći koeficijent

$$a_n = 1.$$

Nulpolinom je polinom čiji su svi koeficijenti jednaki nula
i za njega se stupanj ne definira (ovisno o potrebama
ponekad se definira da je stupanj nulpolinoma -1 ili ∞)

Polinomi **nultog stupnja** su konstante različite od nule.

Zbrajanje i oduzimanje polinoma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

$$Q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

$$\begin{aligned}(P + Q)(x) &= P(x) + Q(x) = \\ &= a_n x^n + \cdots + (a_m + b_m) x^m + \cdots + (a_1 + b_1) x + (a_0 + b_0)\end{aligned}$$

pri čemu je $m \leq n$.

$$P - Q = P + (-Q)$$

Polinomi

Definicija polinoma

Prsten polinoma

Jednakost polinoma

Određenost polinoma

Dijeljenje polinoma

Hornerov algoritam

Razvoj po $x - a$

$M(f, g)$

Kompleksni brojevi

Nultočke polinoma

Cjelobrojne nultočke

Racionalne nultočke

Kompleksne nultočke

Simetrične jednačbe

Cardanova formula

Ferrarijeva metoda



Množenje polinoma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

$$Q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

$$(PQ)(x) = P(x)Q(x) = \sum_{k=0}^{n+m} c_k x^k$$

$$c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j, \quad k = 0, 1, \dots, n+m$$

Polinomi

Definicija polinoma

Prsten polinoma

Jednakost polinoma

Određenost polinoma

Dijeljenje polinoma

Hornerov algoritam

Razvoj po $x - a$

$M(f, g)$

Kompleksni brojevi

Nultočke polinoma

Cjelobrojne nultočke

Racionalne nultočke

Kompleksne nultočke

Simetrične jednačbe

Cardanova formula

Ferrarijeva metoda

Polinomi

Definicija polinoma

Prsten polinoma

Jednakost polinoma

Određenost polinoma

Dijeljenje polinoma

Hornerov algoritam

Razvoj po $x - a$

$M(f, g)$

Kompleksni brojevi

Nultočke polinoma

Cjelobrojne nultočke

Racionalne nultočke

Kompleksne nultočke

Simetrične jednačbe

Cardanova formula

Ferrarijeva metoda

Propozicija 55.

$(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$ je komutativni prsten.

Propozicija 56.

$(\mathbb{C}[x], +, \cdot)$ je komutativni prsten.

Zadatak 15.

Dokažite gornje dvije propozicije.

Jednakost polinoma

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Teorem 25 (Teorem o nulpolinomu).

Polinom

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

$a_i \in \mathbb{R}$ ili \mathbb{C} , $i = 0, 1, \dots, n$ je nul-funkcija akko

$$a_i = 0, \quad \forall i = 0, 1, \dots, n.$$

Dokaz.



Ako je $a_i = 0, \forall i = 0, 1, \dots, n$, tada je očito $f(x)$ nul-funkcija.

Polinomi

Definicija polinoma

Prsten polinoma

Jednakost polinoma

Određenost polinoma

Dijeljenje polinoma

Hornerov algoritam

Razvoj po $x - a$

$M(f, g)$

Kompleksni brojevi

Nultočke polinoma

Cjelobrojne nultočke

Racionalne nultočke

Kompleksne nultočke

Simetrične jednadžbe

Cardanova formula

Ferrarijeva metoda



Pretpostavimo da je $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Tada je

$$a_0 + a_1x_1 + \cdots + a_{n-1}x_1^{n-1} + a_nx_1^n = 0$$

$$a_0 + a_1x_2 + \cdots + a_{n-1}x_2^{n-1} + a_nx_2^n = 0$$

$$\vdots$$

$$a_0 + a_1x_n + \cdots + a_{n-1}x_n^{n-1} + a_nx_n^n = 0$$

$$a_0 + a_1x_{n+1} + \cdots + a_{n-1}x_{n+1}^{n-1} + a_nx_{n+1}^n = 0$$

(1)

za međusobno različite $x_1, \dots, x_{n+1} \in \mathbb{R}$.

(1) je zapravo homogeni linearni sustav od $n + 1$ jednačbi s $n + 1$ nepoznanica $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$.

Determinanta tog sustava je

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^n \end{vmatrix} = \prod_{i < j} (x_j - x_i) \neq 0$$

To je **Vandermondeova determinanta**. Prema Rouchéovom teoremu sustav (1) tada ima jedinstveno rješenje, pa mora biti

$$a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0.$$



Teorem 26 (Teorem o jednakosti polinoma).

Polinomi

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0,$$

$a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$ su jednaki akko vrijedi

$$n = m \quad i \quad a_i = b_i, \quad \forall i = 0, 1, \dots, n.$$

Dokaz.



Ako je $m = n$ i $a_i = b_i$, $\forall i = 0, 1, \dots, n$, onda je očito

$$f(x) = g(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$



Pretpostavimo da je $f = g$ i da je $n \neq m$, npr. $n > m$.

Tada za sve $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\begin{aligned} a_n x^n + \dots + a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0 &= \\ &= b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0. \end{aligned}$$

Iz te jednakosti slijedi

$$a_n x^n + \dots + (a_m - b_m) x^m + \dots + (a_1 - b_1) x + (a_0 - b_0) = 0.$$

Prema teoremu o nulpolinomu mora biti

$$a_n = a_{n-1} = \dots = a_{m+1} = 0,$$

$$a_m = b_m, a_{m-1} = b_{m-1}, \dots, a_1 = b_1, a_0 = b_0$$

što je u kontradikciji s $a_n \neq 0$. Dakle, $n = m$.

Sada iz $f = g$ slijedi

$$(a_n - b_n) x^n + \dots + (a_1 - b_1) x + (a_0 - b_0) = 0,$$

pa prema teoremu o nulpolinomu mora biti

$$a_n = b_n, \dots, a_1 = b_1, a_0 = b_0.$$



Iz dokaza teorema o nulpolinomu dobivamo sljedeći

Teorem 27.

Neka je $P(x)$ polinom n -tog stupnja za koji postoji $n + 1$ različitih brojeva x_i takvih da je $P(x_i) = 0$ za sve $i = 1, \dots, n, n + 1$. Tada je $P(x)$ nulpolinom.

Kažemo da je $x_0 \in \mathbb{C}$ **nultočka** polinoma $P(x)$ ako je $P(x_0) = 0$.

Korolar 25.

Polinom n -tog stupnja ima najviše n nultočaka.

Polinomi

Definicija polinoma

Prsten polinoma

Jednakost polinoma

Određenost polinoma

Dijeljenje polinoma

Hornerov algoritam

Razvoj po $x - a$

$M(f, g)$

Kompleksni brojevi

Nultočke polinoma

Cjelobrojne nultočke

Racionalne nultočke

Kompleksne nultočke

Simetrične jednadžbe

Cardanova formula

Ferrarijeva metoda

Određenost polinoma

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Teorem 28.

Neka je zadano $n + 1$ različitih točaka (x_i, y_i) ,
 $i = 1, \dots, n, n + 1$. Tada postoji jedinstveni polinom
 $P(x)$ n -tog stupnja takav da je $P(x_i) = y_i$,
 $i = 1, \dots, n, n + 1$.

Dokaz.

(jedinstvenost)

Pretpostavimo da postoje dva takva polinoma $P(x)$ i
 $Q(x)$ n -tog stupnja za koje vrijedi

$$P(x_i) = Q(x_i) = y_i, \quad i = 1, \dots, n, n + 1.$$

Polinomi

Definicija polinoma

Prsten polinoma

Jednakost polinoma

Određenost polinoma

Dijeljenje polinoma

Hornerov algoritam

Razvoj po $x - a$

$M(f, g)$

Kompleksni brojevi

Nultočke polinoma

Cjelobrojne nultočke

Racionalne nultočke

Kompleksne nultočke

Simetrične jednadžbe

Cardanova formula

Ferrarijeva metoda



Definiramo polinom $R(x) = P(x) - Q(x)$. Kako je $R(x_i) = 0$ za svako $i = 1, \dots, n, n+1$, a $\deg R \leq n$, slijedi da je R nulpolinom, pa je tada $P = Q$.

◀ Korolar 25

(egzistencija)

Za svaki $i = 1, \dots, n, n+1$ definiramo polinome

$$L_i(x) = \frac{(x - x_1) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_{n+1})}{(x_i - x_1) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_{n+1})}$$

Vidimo da je

$$L_i(x_j) = \begin{cases} 0, & \text{ako je } j \neq i \\ 1, & \text{ako je } j = i \end{cases}$$

Polinomi

Definicija polinoma

Prsten polinoma

Jednakost polinoma

Odredenost polinoma

Dijeljenje polinoma

Hornerov algoritam

Razvoj po $x - a$

$M(f, g)$

Kompleksni brojevi

Nultočke polinoma

Cjelobrojne nultočke

Racionalne nultočke

Kompleksne nultočke

Simetrične jednačbe

Cardanova formula

Ferrarijeva metoda

Konačno, neka je

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n+1} y_i L_i(x).$$

$P(x)$ je polinom koji zadovoljava početne uvjete i zove se
Lagrangeov interpolacijski polinom. ♥

Dijeljenje polinoma

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Teorem 29.

Za svaka dva polinoma $f, g \in \mathbb{R}[x]$, $g \neq 0$, postoje jedinstveni polinomi $q, r \in \mathbb{R}[x]$ takvi da je

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x),$$

pri čemu je $\deg r < \deg g$.

Dokaz.

(jedinstvenost)

Pretpostavimo da za zadane polinome f i g , osim polinoma q i r , postoje polinomi q' i r' takvi da je

Polinomi

Definicija polinoma

Prsten polinoma

Jednakost polinoma

Određenost polinoma

Dijeljenje polinoma

Hornerov algoritam

Razvoj po $x - a$

$M(f, g)$

Kompleksni brojevi

Nultočke polinoma

Cjelobrojne nultočke

Racionalne nultočke

Kompleksne nultočke

Simetrične jednadžbe

Cardanova formula

Ferrarijeva metoda



Polinomi

Definicija polinoma

Prsten polinoma

Jednakost polinoma

Određenost polinoma

Dijeljenje polinoma

Hornerov algoritam

Razvoj po $x - a$

$M(f, g)$

Kompleksni brojevi

Nultočke polinoma

Cjelobrojne nultočke

Racionalne nultočke

Kompleksne nultočke

Simetrične jednadžbe

Cardanova formula

Ferrarijeva metoda

$$\begin{aligned}f &= gq + r, \quad \deg r < \deg g, \\f &= gq' + r', \quad \deg r' < \deg g.\end{aligned}$$

Iz tih jednakosti slijedi

$$(q - q')g + (r - r') = 0. \quad (1)$$

Pretpostavimo da je $q \neq q'$, tj. $\deg(q - q') \geq 0$. Tada je

$$\deg(q - q')g = \deg(q - q') + \deg g \geq \deg g.$$

S druge strane imamo

$$\deg r < \deg g \quad \text{ i } \quad \deg r' < \deg g,$$

pa je

$$\deg(r - r') < \deg g,$$

pa onda lijeva strana u (1) ne može biti nulpolinom.

Dakle, mora biti $q = q'$, a zbog (1), onda je $r = r'$.

(egzistencija)

Ako je $\deg f < \deg g$, tada uzmemo $q = 0$, $r = f$ i očito je $\deg r < \deg g$.

Pretpostavimo da je $\deg f \geq \deg g$.

Pretpostavimo da f i g imaju kanonske prikaze

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0$$

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0, \quad b_m \neq 0.$$

Formiramo sada polinom f_1

$$f_1(x) = f(x) - \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} g(x). \quad (2)$$

Dobijemo polinom stupnja n_1 , i očito je $n_1 < n$.

Neka je

$$f_1(x) = d_{n_1}^{(1)} x^{n_1} + \dots + d_0^{(1)}.$$

Ako je $n_1 \geq m$, postupak možemo nastaviti i formirati polinom $f_2(x)$

$$f_2(x) = f_1(x) - \frac{d_{n_1}^{(1)}}{b_m} x^{n_1-m} g(x) \quad (3)$$

i očit je $\deg f_2 < \deg f_1$.

Neka je

$$f_2(x) = d_{n_2}^{(2)} x^{n_2} + \dots + d_0^{(2)}, \quad n_2 < n_1.$$

Ako je $n_2 \geq m$, formiramo polinom f_3

Polinomi

Definicija polinoma

Prsten polinoma

Jednakost polinoma

Određenost polinoma

Dijeljenje polinoma

Hornerov algoritam

Razvoj po $x - a$

$M(f, g)$

Kompleksni brojevi

Nultočke polinoma

Cjelobrojne nultočke

Racionalne nultočke

Kompleksne nultočke

Simetrične jednadžbe

Cardanova formula

Ferrarijeva metoda



Polinomi

Definicija polinoma

Prsten polinoma

Jednakost polinoma

Određenost polinoma

Dijeljenje polinoma

Hornerov algoritam

Razvoj po $x - a$

$M(f, g)$

Kompleksni brojevi

Nultočke polinoma

Cjelobrojne nultočke

Racionalne nultočke

Kompleksne nultočke

Simetrične jednačbe

Cardanova formula

Ferrarijeva metoda

$$f_3(x) = f_2(x) - \frac{d_{n_2}^{(2)}}{b_m} x^{n_2-m} g(x), \quad n_3 < n_2. \quad (4)$$

Kako stupnjevi polinoma f, f_1, f_2, f_3, \dots padaju,
nastavljajući postupak dobivamo polinom

$$f_k(x) = f_{k-1}(x) - \frac{d_{n_{k-1}}^{(k-1)}}{b_m} x^{n_{k-1}-m} g(x) \quad (5)$$

takav da je ili $\deg f_k < m$ ili $f_k(x) = 0$. Zbrajanjem
jednakosti (2), (3), (4) i (5) dobivamo

Polinomi

Definicija polinoma

Prsten polinoma

Jednakost polinoma

Određenost polinoma

Dijeljenje polinoma

Hornerov algoritam

Razvoj po $x - a$

$M(f, g)$

Kompleksni brojevi

Nultočke polinoma

Cjelobrojne nultočke

Racionalne nultočke

Kompleksne nultočke

Simetrične jednadžbe

Cardanova formula

Ferrarijeva metoda

$$f(x) = \left(\frac{a_n}{b_m} x^{n-m} + \frac{d_{n_1}^{(1)}}{b_m} x^{n_1-m} + \dots + \frac{d_{n_{k-1}}^{(k-1)}}{b_m} x^{n_{k-1}-m} \right) g(x) + f_k(x)$$

Uz oznake

$$q(x) = \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} + \frac{d_{n_1}^{(1)}}{b_m} x^{n_1-m} + \dots + \frac{d_{n_{k-1}}^{(k-1)}}{b_m} x^{n_{k-1}-m}, \quad r(x) = f_k(x)$$

dobivamo

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x), \quad \deg r < \deg g.$$



$q(x)$ – nepotpuni kvocijent, $r(x)$ – ostatak

Primjer 14.

$$(x^5 - 3x^3 - 5x) : (x^2 - x + 1) = x^3 + x^2 - 3x - 4$$

$$\pm x^5 \mp x^4 \pm x^3$$

$$x^4 - 4x^3 - 5x$$

← to je f_1

$$\pm x^4 \mp x^3 \pm x^2$$

$$-3x^3 - x^2 - 5x$$

← to je f_2

$$\mp 3x^3 \pm 3x^2 \mp 3x$$

$$-4x^2 - 2x$$

← to je f_3

$$\mp 4x^2 \pm 4x \mp 4$$

$$-6x + 4$$

← to je $f_4 = r$

Hornerov algoritam

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$g(x) = x - a$$

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x), \quad r(x) = r = \text{const.}$$

$$q(x) = c_{n-1} x^{n-1} + c_{n-2} x^{n-2} + \dots + c_1 x + c_0$$

$$\begin{aligned} a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 &= \\ &= (x - a)(c_{n-1} x^{n-1} + c_{n-2} x^{n-2} + \dots + c_1 x + c_0) + r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 &= c_{n-1} x^n + \\ &+ (c_{n-2} - a c_{n-1}) x^{n-1} + (c_{n-3} - a c_{n-2}) x^{n-2} + \dots + \\ &+ (c_0 - a c_1) x + r - c_0 a \end{aligned}$$

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Polinomi

Definicija polinoma

Prsten polinoma

Jednakost polinoma

Određenost polinoma

Dijeljenje polinoma

Hornerov algoritam

Razvoj po $x - a$

$M(f, g)$

Kompleksni brojevi

Nultočke polinoma

Cjelobrojne nultočke

Racionalne nultočke

Kompleksne nultočke

Simetrične jednačbe

Cardanova formula

Ferrarijeva metoda



Polinomi

Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
 $M(f, g)$
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Kompleksne nultočke
Simetrične jednačbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

$$\left. \begin{array}{l} a_n = c_{n-1} \\ a_{n-1} = c_{n-2} - ac_{n-1} \\ a_{n-2} = c_{n-3} - ac_{n-2} \\ \vdots \\ a_1 = c_0 - ac_1 \\ a_0 = r - ac_0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} c_{n-1} = a_n \\ c_{n-2} = a_{n-1} + ac_{n-1} \\ c_{n-3} = a_{n-2} + ac_{n-2} \\ \vdots \\ c_0 = a_1 + ac_1 \\ r = a_0 + ac_0 \end{array}$$

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	\dots	a_1	a_0
a	$\underbrace{a_n}_{c_{n-1}}$	$\underbrace{ac_{n-1} + a_{n-1}}_{c_{n-2}}$	$\underbrace{ac_{n-2} + a_{n-2}}_{c_{n-3}}$	\dots	$\underbrace{ac_1 + a_1}_{c_0}$	$\underbrace{ac_0 + a_0}_r$

$$f(x) = (x - a)q(x) + r \Rightarrow f(a) = r$$

Primjer 15.

Izračunajte vrijednost polinoma $f(x) = 3x^3 + 2x^2$ u točki -2 .

Rješenje

Polinomi

Definicija polinoma

Prsten polinoma

Jednakost polinoma

Određenost polinoma

Dijeljenje polinoma

Hornerov algoritam

Razvoj po $x - a$

$M(f, g)$

Kompleksni brojevi

Nultočke polinoma

Cjelobrojne nultočke

Racionalne nultočke

Kompleksne nultočke

Simetrične jednadžbe

Cardanova formula

Ferrarijeva metoda

Primjer 15.

Izračunajte vrijednost polinoma $f(x) = 3x^3 + 2x^2$ u točki -2 .

Rješenje

	3	2	0	0
-2	3	-4	8	-16

$$r(x) = -16, \quad q(x) = 3x^2 - 4x + 8, \quad f(-2) = -16$$

Polinomi

Definicija polinoma

Prsten polinoma

Jednakost polinoma

Određenost polinoma

Dijeljenje polinoma

Hornerov algoritam

Razvoj po $x - a$

$M(f, g)$

Kompleksni brojevi

Nultočke polinoma

Cjelobrojne nultočke

Racionalne nultočke

Kompleksne nultočke

Simetrične jednadžbe

Cardanova formula

Ferrarijeva metoda

Složenost Hornerovog algoritma

– računanje vrijednosti polinoma u nekoj točki, $\deg f = n$

Klasično računanje

n zbrajanja

$n + (n - 1) + \dots + 1 = \frac{n(n+1)}{2}$ množenja

Složenost: $O(n^2)$

Hornerov algoritam

n zbrajanja i n množenja

Složenost: $O(n)$

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Polinomi

Definicija polinoma

Prsten polinoma

Jednakost polinoma

Određenost polinoma

Dijeljenje polinoma

Hornerov algoritam

Razvoj po $x - a$

$M(f, g)$

Kompleksni brojevi

Nultočke polinoma

Cjelobrojne nultočke

Racionalne nultočke

Kompleksne nultočke

Simetrične jednadžbe

Cardanova formula

Ferrarijeva metoda



Teorem 30 (Descartesov teorem).

*Broj $x = a$ je nultočka polinoma $f(x)$ akko $f(x)$ djeljiv
sa $x - a$.*

Dokaz.



$$f(x) = (x - a)q(x) + r$$

$$f(a) = 0 \Rightarrow r = 0$$



$$f(x) = (x - a)q(x) \Rightarrow f(a) = 0.$$



Polinomi

Definicija polinoma

Prsten polinoma

Jednakost polinoma

Određenost polinoma

Dijeljenje polinoma

Hornerov algoritam

Razvoj po $x - a$

$M(f, g)$

Kompleksni brojevi

Nultočke polinoma

Cjelobrojne nultočke

Racionalne nultočke

Kompleksne nultočke

Simetrične jednadžbe

Cardanova formula

Ferrarijeva metoda



Razvoj polinoma po potencijama od $x - a$

Pomoću Hornerovog algoritma

$$f(x) = (x - a)q_0(x) + r_0$$

dijelimo dalje $q_0(x)$ sa $x - a$

$$q_0(x) = (x - a)q_1(x) + r_1$$

$$f(x) = (x - a)[(x - a)q_1(x) + r_1] + r_0$$

$$f(x) = (x - a)^2 q_1(x) + r_1(x - a) + r_0$$

dijelimo dalje $q_1(x)$ sa $x - a$

$$q_1(x) = (x - a)q_2(x) + r_2$$

$$f(x) = (x - a)^3 q_2(x) + r_2(x - a)^2 + r_1(x - a) + r_0$$

\vdots

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Polinomi

Definicija polinoma

Prsten polinoma

Jednakost polinoma

Određenost polinoma

Dijeljenje polinoma

Hornerov algoritam

Razvoj po $x - a$

$M(f, g)$

Kompleksni brojevi

Nultočke polinoma

Cjelobrojne nultočke

Racionalne nultočke

Kompleksne nultočke

Simetrične jednadžbe

Cardanova formula

Ferrarijeva metoda



Primjer 16.

Pomoću Hornerovog algoritma razvijte polinom

$f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1$ po potencijama od $x + 1$.

Rješenje

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Polinomi

Definicija polinoma

Prsten polinoma

Jednakost polinoma

Određenost polinoma

Dijeljenje polinoma

Hornerov algoritam

Razvoj po $x - a$

$M(f, g)$

Kompleksni brojevi

Nultočke polinoma

Cjelobrojne nultočke

Racionalne nultočke

Kompleksne nultočke

Simetrične jednadžbe

Cardanova formula

Ferrarijeva metoda



Primjer 16.

Pomoću Hornerovog algoritma razvijte polinom

$f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1$ po potencijama od $x + 1$.

Rješenje

	1	2	-3	-4	1
-1	1	1	-4	0	1
-1	1	0	-4	4	
-1	1	-1	-3		
-1	1	-2			
-1	1				

$$f(x) = (x + 1)^4 - 2(x + 1)^3 - 3(x + 1)^2 + 4(x + 1) + 1$$

Polinomi

Definicija polinoma

Prsten polinoma

Jednakost polinoma

Određenost polinoma

Dijeljenje polinoma

Hornerov algoritam

Razvoj po $x - a$

$M(f, g)$

Kompleksni brojevi

Nultočke polinoma

Cjelobrojne nultočke

Racionalne nultočke

Kompleksne nultočke

Simetrične jednadžbe

Cardanova formula

Ferrarijeva metoda

Polinomi

Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam

Razvoj po $x - a$

$M(f, g)$
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Kompleksne nultočke
Simetrične jednačbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

Pomoću derivacija

Ako je

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

tada je

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Primjer 17.

Pomoću derivacija razvijte polinom

$f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1$ po potencijama od $x + 1$.

Rješenje

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Polinomi

Definicija polinoma

Prsten polinoma

Jednakost polinoma

Određenost polinoma

Dijeljenje polinoma

Hornerov algoritam

Razvoj po $x - a$

$M(f, g)$

Kompleksni brojevi

Nultočke polinoma

Cjelobrojne nultočke

Racionalne nultočke

Kompleksne nultočke

Simetrične jednačbe

Cardanova formula

Ferrarijeva metoda



Primjer 17.

Pomoću derivacija razvijte polinom

$f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1$ po potencijama od $x + 1$.

Rješenje

$$f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1 \Rightarrow f(-1) = 1$$

$$f'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 6x - 4 \Rightarrow f'(-1) = 4$$

$$f''(x) = 12x^2 + 12x - 6 \Rightarrow f''(-1) = -6$$

$$f'''(x) = 24x + 12 \Rightarrow f'''(-1) = -12$$

$$f^{(4)}(x) = 24 \Rightarrow f^{(4)}(-1) = 24$$

$$f(x) = \frac{24}{4!}(x+1)^4 + \frac{-12}{3!}(x+1)^3 + \frac{-6}{2!}(x+1)^2 + \frac{4}{1!}(x+1) + \frac{1}{0!}$$

$$f(x) = (x+1)^4 - 2(x+1)^3 - 3(x+1)^2 + 4(x+1) + 1$$

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Polinomi

Definicija polinoma

Prsten polinoma

Jednakost polinoma

Određenost polinoma

Dijeljenje polinoma

Hornerov algoritam

Razvoj po $x - a$

$M(f, g)$

Kompleksni brojevi

Nultočke polinoma

Cjelobrojne nultočke

Racionalne nultočke

Kompleksne nultočke

Simetrične jednadžbe

Cardanova formula

Ferrarijeva metoda



Najveća zajednička mjera polinoma

Normirani polinom najvećeg stupnja koji dijeli polinome f i g zove se **najveća zajednička mjera** polinoma f i g .

Oznaka: $M(f, g)$

Euklidov algoritam

$$f = gq_1 + r_1, \quad \deg r_1 < \deg g$$

$$g = r_1q_2 + r_2, \quad \deg r_2 < \deg r_1$$

$$r_1 = r_2q_3 + r_3, \quad \deg r_3 < \deg r_2$$

$$\vdots$$


$$r_{k-4} = r_{k-3}q_{k-2} + r_{k-2}, \quad \deg r_{k-2} < \deg r_{k-3}$$

$$r_{k-3} = r_{k-2}q_{k-1} + r_{k-1}, \quad \deg r_{k-1} < \deg r_{k-2}$$

$$r_{k-2} = r_{k-1}q_k$$

$$M(f, g) = r_{k-1}$$

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Polinomi

Definicija polinoma

Prsten polinoma

Jednakost polinoma

Određenost polinoma

Dijeljenje polinoma

Hornerov algoritam

Razvoj po $x - a$

$M(f, g)$

Kompleksni brojevi

Nultočke polinoma

Cjelobrojne nultočke

Racionalne nultočke

Kompleksne nultočke

Simetrične jednačbe

Cardanova formula

Ferrarijeva metoda



- r_{k-1} **je zajednička mjera.** Iz posljednje jednakosti od (♠) slijedi da r_{k-1} dijeli r_{k-2} . Iz pretposljednje jednakosti od (♠) tada slijedi da r_{k-1} dijeli r_{k-3} . Idemo li tako dalje do prve jednakosti, vidimo da r_{k-1} dijeli f i g . Dakle, r_{k-1} je zajednička mjera polinoma f i g . ◀ (♠)

- $n(r_{k-1})$ **je najveća zajednička mjera.**

Pretpostavimo da postoji neka druga zajednička mjera r polinoma f i g . Tada iz prve jednakosti od (♠) slijedi da r dijeli r_1 jer dijeli f i g . Iz druge jednakosti od (♠) sada slijedi da r dijeli r_2 .

Nastavimo li ovako dalje, na kraju dobivamo da r dijeli r_{k-1} , pa je $\deg r < \deg r_{k-1}$, a iz toga slijedi da je $n(r_{k-1})$ najveća zajednička mjera polinoma f i g .

- **Najveća zajednička mjera je jedinstvena.** Kada bi postojala još jedna najveća zajednička mjera r , tada bi slijedilo da r dijeli r_{k-1} i da r_{k-1} dijeli r . To bi značilo da je $\deg r = \deg r_{k-1}$, pa bi bilo $r_{k-1} = \alpha r$ za neki $\alpha \in \mathbb{R}$. No, jer je po definiciji najveća zajednička mjera normirani polinom, slijedi $n(r_{k-1}) = r$.

Polinomi

Definicija polinoma

Prsten polinoma

Jednakost polinoma

Određenost polinoma

Dijeljenje polinoma

Hornerov algoritam

Razvoj po $x - a$

$M(f, g)$

Kompleksni brojevi

Nultočke polinoma

Cjelobrojne nultočke

Racionalne nultočke

Kompleksne nultočke

Simetrične jednačbe

Cardanova formula

Ferrarijeva metoda

• Postoje polinomi f_k i g_k sa svojstvom

$ff_k + gg_k = M(f, g)$. Iz prve jednakosti od (\spadesuit) slijedi $r_1 = f - gg_1$. Stavimo li $f_1 = 1$ i $g_1 = -q_1$, vidimo da postoje takvi polinomi f_1 i g_1 da vrijedi $ff_1 + gg_1 = r_1$. Uvrstimo li taj izraz za r_1 u drugu jednakost od (\spadesuit), dobivamo $r_2 = g - (ff_1 + gg_1)q_2$. Sredimo li desnu stranu, vidimo da postoje polinomi f_2 i g_2 takvi da je $ff_2 + gg_2 = r_2$. Nastavljajući dalje ovaj postupak dobivamo polinome f_k i g_k takve da je $ff_k + gg_k = r_{k-1} = M(f, g)$.



Polinomi

Definicija polinoma

Prsten polinoma

Jednakost polinoma

Određenost polinoma

Dijeljenje polinoma

Hornerov algoritam

Razvoj po $x - a$

$M(f, g)$

Kompleksni brojevi

Nultočke polinoma

Cjelobrojne nultočke

Racionalne nultočke

Kompleksne nultočke

Simetrične jednačbe

Cardanova formula

Ferrarijeva metoda



Primjer 18.

Odredite najveću zajedničku mjeru polinoma

$$f(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 \text{ i } g(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2.$$

Rješenje

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Polinomi

Definicija polinoma

Prsten polinoma

Jednakost polinoma

Određenost polinoma

Dijeljenje polinoma

Hornerov algoritam

Razvoj po $x - a$

$M(f, g)$

Kompleksni brojevi

Nultočke polinoma

Cjelobrojne nultočke

Racionalne nultočke

Kompleksne nultočke

Simetrične jednadžbe

Cardanova formula

Ferrarijeva metoda

Primjer 18.

Odredite najveću zajedničku mjeru polinoma

$$f(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 \text{ i } g(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2.$$

Rješenje

$$\begin{array}{r} (x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1) : (x^3 - 2x^2 + x - 2) = x + 3 \\ \underline{\pm x^4 \mp 2x^3 \pm x^2 \mp 2x} \\ 3x^3 + x^2 + 3x + 1 \\ \underline{\pm 3x^3 \mp 6x^2 \pm 3x \mp 6} \\ 7x^2 + 7 \end{array} \quad \longleftarrow \text{to je } r_1$$

$$\begin{array}{r} (x^3 - 2x^2 + x - 2) : (7x^2 + 7) = \frac{1}{7}x - \frac{2}{7} \\ \underline{\pm x^3 \quad \pm x} \\ -2x^2 \quad -2 \\ \underline{\mp 2x^2 \quad \mp 2} \\ 0 \end{array} \quad \longleftarrow \text{to je } r_2$$

$$M(f, g) = n(7x^2 + 7) = x^2 + 1$$

Polinomi

Definicija polinoma

Prsten polinoma

Jednakost polinoma

Određenost polinoma

Dijeljenje polinoma

Hornerov algoritam

Razvoj po $x - a$

$M(f, g)$

Kompleksni brojevi

Nultočke polinoma

Cjelobrojne nultočke

Racionalne nultočke

Kompleksne nultočke

Simetrične jednačbe

Cardanova formula

Ferrarijeva metoda



Kompleksni brojevi

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

$$\mathbb{C} = \{x + yi : x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$$

$$z = x + yi, \quad \bar{z} = x - yi$$

$$\operatorname{Re} z = x, \quad \operatorname{Im} z = y$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$$

$$z \bar{z} = |z|^2$$

Indukcijom se lagano dokaže da vrijedi:

$$\overline{z_1 + z_2 + \cdots + z_n} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \cdots + \bar{z}_n$$

$$\overline{z_1 z_2 \cdots z_n} = \bar{z}_1 \bar{z}_2 \cdots \bar{z}_n$$

Polinomi

Definicija polinoma

Prsten polinoma

Jednakost polinoma

Određenost polinoma

Dijeljenje polinoma

Hornerov algoritam

Razvoj po $x - a$

$M(f, g)$

Kompleksni brojevi

Nultočke polinoma

Cjelobrojne nultočke

Racionalne nultočke

Kompleksne nultočke

Simetrične jednadžbe

Cardanova formula

Ferrarijeva metoda



Jednakost kompleksnih brojeva:

$$a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c \text{ i } b = d$$

Zbrajanje kompleksnih brojeva:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

Množenje kompleksnih brojeva:

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Dijeljenje kompleksnih brojeva:

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i$$

Polinomi

Definicija polinoma

Prsten polinoma

Jednakost polinoma

Određenost polinoma

Dijeljenje polinoma

Hornerov algoritam

Razvoj po $x - a$

$M(f, g)$

Kompleksni brojevi

Nultočke polinoma

Cjelobrojne nultočke

Racionalne nultočke

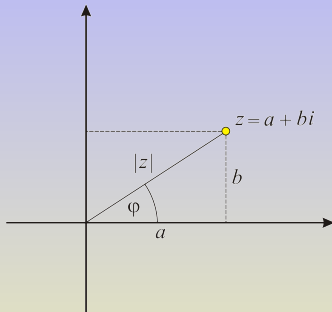
Kompleksne nultočke

Simetrične jednačbe

Cardanova formula

Ferrarijeva metoda

Trigonometrijski zapis kompleksnog broja



$$\text{modul: } r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\text{argument: } \arg z = \varphi$$

$$a = r \cos \varphi, \quad b = r \sin \varphi, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$$

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Polinomi

Definicija polinoma

Prsten polinoma

Jednakost polinoma

Određenost polinoma

Dijeljenje polinoma

Hornerov algoritam

Razvoj po $x - a$

$M(f, g)$

Kompleksni brojevi

Nultočke polinoma

Cjelobrojne nultočke

Racionalne nultočke

Kompleksne nultočke

Simetrične jednačbe

Cardanova formula

Ferrarijeva metoda

$$z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$$

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \\ &= r_1 r_2 (\underbrace{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2}_{\cos(\varphi_1 + \varphi_2)} + i \underbrace{\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2}_{\sin(\varphi_1 + \varphi_2)} - \underbrace{\sin \varphi_1 \sin \varphi_2}_{\sin(\varphi_1 + \varphi_2)}) \\ &= r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \end{aligned}$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

Polinomi

Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
 $M(f, g)$

Kompleksni brojevi

Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

Polinomi

Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
 $M(f, g)$

Kompleksni brojevi

Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Kompleksne nultočke
Simetrične jednačbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \right]$$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} \\ &= \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)}{(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)(\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)} \\ &= \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - i \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + i \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2}{\underbrace{\cos^2 \varphi_2 + \sin^2 \varphi_2}_1} \\ &= \frac{r_1}{r_2} \left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \right] \end{aligned}$$

$$\left[r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \right]^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi), \quad n \in \mathbb{N}$$

Dokaz.

Indukcijom po n . Za $n = 1$ jednakost očito vrijedi. Pretpostavimo da jednakost vrijedi za neko $n \in \mathbb{N}$. Dokažimo da vrijedi tada za $n + 1$.

$$\begin{aligned} \left[r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \right]^{n+1} &= \left[r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \right]^n \cdot \left[r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \right] = \\ &= r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) \cdot r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \\ &= r^{n+1} (\underbrace{\cos n\varphi \cos \varphi}_{\cos(n\varphi + \varphi)} + i \underbrace{\cos n\varphi \sin \varphi + \sin n\varphi \cos \varphi}_{\sin(n\varphi + \varphi)} - \underbrace{\sin n\varphi \sin \varphi}_{\sin(n\varphi + \varphi)}) = \\ &= r^{n+1} (\cos(n\varphi + \varphi) + i \sin(n\varphi + \varphi)) = \\ &= r^{n+1} (\cos(n+1)\varphi + i \sin(n+1)\varphi) \end{aligned}$$



Polinomi

Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
 $M(f, g)$
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Kompleksne nultočke
Simetrične jednačbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

Za $r = 1$ dobivamo **Moivreovu formulu**

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

Eulerova formula

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

Polinomi

Definicija polinoma

Prsten polinoma

Jednakost polinoma

Određenost polinoma

Dijeljenje polinoma

Hornerov algoritam

Razvoj po $x - a$

$M(f, g)$

Kompleksni brojevi

Nultočke polinoma

Cjelobrojne nultočke

Racionalne nultočke

Kompleksne nultočke

Simetrične jednadžbe

Cardanova formula

Ferrarijeva metoda

Polinomi

Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
 $M(f, g)$

Kompleksni brojevi

Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

$$\sqrt[n]{z} = \rho(\cos \psi + i \sin \psi)$$

Potenciranjem dobivamo da je

$$r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \rho^n(\cos n\psi + i \sin n\psi),$$

iz čega slijedi

$$r = \rho^n \quad \text{i} \quad n\psi = \varphi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Odatle dobivamo

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right),$$

pri čemu je $k = 0, 1, \dots, n - 1$.

Polinomi

Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
 $M(f, g)$
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

Svi n -ti korijeni z_k ($k = 0, 1, \dots, n - 1$) kompleksnog broja $z = re^{i\varphi}$ nalaze se na kružnici polumjera $\sqrt[n]{r}$ sa središtem u ishodištu i vrhovi su pravilnog n -terokuta.

Primjer 19.

Izračunajte $\sqrt[3]{-27}$.

Rješenje

Polinomi

Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
 $M(f, g)$

Kompleksni brojevi

Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Kompleksne nultočke
Simetrične jednačbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

Svi n -ti korijeni z_k ($k = 0, 1, \dots, n - 1$) kompleksnog broja $z = re^{i\varphi}$ nalaze se na kružnici polumjera $\sqrt[n]{r}$ sa središtem u ishodištu i vrhovi su pravilnog n -terokuta.

Primjer 19.

Izračunajte $\sqrt[3]{-27}$.

Rješenje

$$-27 = 27(\cos \pi + i \sin \pi), \quad r = 27, \quad \varphi = \pi$$

$$z_k = \sqrt[3]{27} \left(\cos \frac{\pi+2k\pi}{3} + i \sin \frac{\pi+2k\pi}{3} \right), \quad k = 0, 1, 2$$

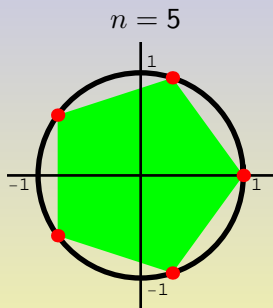
$$z_0 = 3 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 3 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

$$z_1 = 3(\cos \pi + i \sin \pi) = 3(-1 + 0 \cdot i) = -3$$

$$z_2 = 3 \left(\cos \frac{5}{3}\pi + i \sin \frac{5}{3}\pi \right) = 3 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

n-ti korijeni iz jedinice

$$\varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$



Polinomi

Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
 $M(f, g)$

Kompleksni brojevi

Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Kompleksne nultočke
Simetrične jednačbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

Nultočke polinoma

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

$$a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}, \quad a_n \neq 0$$

Nultočka polinoma P je $x_0 \in \mathbb{C}$ takav da je $P(x_0) = 0$.

Izraz

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (\clubsuit)$$

zovemo **algebarska jednadžba n -tog stupnja** u varijabli x .

Vrijednost x_0 varijable x za koju vrijedi

$$a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \cdots + a_1 x_0 + a_0 = 0$$

zovemo **korijen** ili **rješenje** jednadžbe (\clubsuit).

Polinomi

Definicija polinoma

Prsten polinoma

Jednakost polinoma

Određenost polinoma

Dijeljenje polinoma

Hornerov algoritam

Razvoj po $x - a$

$M(f, g)$

Kompleksni brojevi

Nultočke polinoma

Cjelobrojne nultočke

Racionalne nultočke

Kompleksne nultočke

Simetrične jednadžbe

Cardanova formula

Ferrarijeva metoda



Polinomi

Definicija polinoma

Prsten polinoma

Jednakost polinoma

Određenost polinoma

Dijeljenje polinoma

Hornerov algoritam

Razvoj po $x - a$

$M(f, g)$

Kompleksni brojevi

Nultočke polinoma

Cjelobrojne nultočke

Racionalne nultočke

Kompleksne nultočke

Simetrične jednadžbe

Cardanova formula

Ferrarijeva metoda

Kažemo da je $x_0 \in \mathbb{C}$ nultočka polinoma $P(x)$ kratnosti k ako je $P(x)$ djeljiv s $(x - x_0)^k$, a nije djeljiv s $(x - x_0)^{k+1}$.

Ako je kratnost neke nultočke $k = 1$, kažemo da je **jednostruka** nultočka, a inače **višestruka** nultočka (dvostruka, trostruka...).

Teorem 31 (Osnovni teorem algebre).

Svaki polinom $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ stupnja ≥ 1 ima barem jednu nultočku u polju \mathbb{C} , tj. \mathbb{C} je algebarski zatvoreno polje.

Korolar 26.

Svaki polinom $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ n -tog stupnja ($n \geq 1$) ima točno n nultočaka u polju \mathbb{C} brojeći njihovu kratnost.

Dokaz.

Prema osnovnom teoremu algebre polinom $P(x)$ ima nultočku $x_1 \in \mathbb{C}$. Prema [◀ Descartesovom teoremu](#) je tada $P(x) = (x - x_1)Q_1(x)$, gdje je $Q_1(x)$ polinom stupnja $n - 1$. Prema osnovnom teoremu algebre polinom $Q_1(x)$ ima nultočku $x_2 \in \mathbb{C}$ pa je prema Descartesovom teoremu $Q_1(x) = (x - x_2)Q_2(x)$, gdje je $Q_2(x)$ polinom stupnja $n - 2$, odnosno $P(x) = (x - x_1)(x - x_2)Q_2(x)$. Sada opet primijenimo isto zaključivanje na polinom $Q_2(x)$ i na kraju dobivamo da je

$$P(x) = c(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n), \quad c \in \mathbb{C}, c \neq 0.$$

Polinomi

Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
 $M(f, g)$
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Kompleksne nultočke
Simetrične jednačbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda



Korolar 27.

Polinom $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ iz $\mathbb{C}[x]$ se može napisati u obliku

$$P(x) = a_n (x - x_1)^{n_1} (x - x_2)^{n_2} \dots (x - x_s)^{n_s}$$

gdje su x_1, \dots, x_s različite nultočke od $P(x)$, a n_i je kratnost nultočke x_i i vrijedi $n_1 + \dots + n_s = n$.

Polinomi

Definicija polinoma

Prsten polinoma

Jednakost polinoma

Određenost polinoma

Dijeljenje polinoma

Hornerov algoritam

Razvoj po $x - a$

$M(f, g)$

Kompleksni brojevi

Nultočke polinoma

Cjelobrojne nultočke

Racionalne nultočke

Kompleksne nultočke

Simetrične jednadžbe

Cardanova formula

Ferrarijeva metoda



Teorem 32.

$x_0 \in \mathbb{C}$ je nultočka kratnosti k polinoma $P(x)$ akko
 $P(x_0) = P'(x_0) = \dots = P^{(k-1)}(x_0) = 0$ i $P^{(k)}(x_0) \neq 0$.

Dokaz.



Ako je $x = x_0$ nultočka polinoma $P(x)$ kratnosti k , tada
je

$$P(x) = (x - x_0)^k Q(x), \quad Q(x_0) \neq 0.$$

Deriviranjem dobivamo

$$P'(x) = k(x - x_0)^{k-1} Q(x) + (x - x_0)^k Q'(x),$$

odnosno

$$P'(x) = (x - x_0)^{k-1} \left[kQ(x) + (x - x_0)Q'(x) \right].$$

Polinomi

Definicija polinoma

Prsten polinoma

Jednakost polinoma

Određenost polinoma

Dijeljenje polinoma

Hornerov algoritam

Razvoj po $x - a$

$M(f, g)$

Kompleksni brojevi

Nultočke polinoma

Cjelobrojne nultočke

Racionalne nultočke

Kompleksne nultočke

Simetrične jednačbe

Cardanova formula

Ferrarijeva metoda

Označimo li s $Q_1(x) = kQ(x) + (x - x_0)Q'(x)$, dobivamo

$$P'(x) = (x - x_0)^{k-1}Q_1(x), \quad Q_1(x_0) \neq 0, \quad P'(x_0) = 0.$$

Nastavimo li derivirati, dobivamo

$$P''(x) = (k - 1)(x - x_0)^{k-2}Q_1(x) + (x - x_0)^{k-1}Q_1'(x)$$

odnosno

$$P''(x) = (x - x_0)^{k-2}Q_2(x),$$

gdje je $Q_2(x) = (k - 1)Q_1(x) + (x - x_0)Q_1'(x)$ i

$Q_2(x_0) \neq 0$. Također je $P''(x_0) = 0$.

Nakon $k - 1$ koraka dobivamo

$$P^{(k-1)}(x_0) = (x - x_0)Q_{k-1}(x), \quad Q_{k-1}(x_0) \neq 0.$$

Odavde dobivamo da je i $P^{(k-1)}(x_0) = 0$.

Deriviramo li još jedanput, dobivamo

$$P^{(k)}(x) = Q_{k-1}(x) + (x - x_0)Q'_{k-1}(x),$$

iz čega slijedi da je $P^{(k)}(x_0) = Q_{k-1}(x_0) \neq 0$.

Dakle, zaista je

$$P(x_0) = P'(x_0) = \dots = P^{(k-1)}(x_0) = 0, \quad P^{(k)}(x_0) \neq 0.$$



Napišimo polinom $P(x)$ po potencijama od $x - x_0$.

$$P(x) = \sum_{i=1}^n \frac{P^{(i)}(x_0)}{i!} (x - x_0)^i$$

Zbog $P(x_0) = P'(x_0) = \dots = P^{(k-1)}(x_0) = 0$ slijedi

$$P(x) = \sum_{i=k}^n \frac{P^{(i)}(x_0)}{i!} (x - x_0)^i$$

odnosno

$$P(x) = (x - x_0)^k \sum_{i=k}^n \frac{P^{(i)}(x_0)}{i!} (x - x_0)^{i-k}.$$

Dakle, x_0 je zaista nultočka kratnosti k .



Teorem 33.

Neka je $P(x) \in \mathbb{R}[x]$. Ako je $z_0 \in \mathbb{C}$ nultočka od $P(x)$, tada je i \bar{z}_0 nultočka od $P(x)$.

Polinomi

Definicija polinoma

Prsten polinoma

Jednakost polinoma

Određenost polinoma

Dijeljenje polinoma

Hornerov algoritam

Razvoj po $x - a$

$M(f, g)$

Kompleksni brojevi

Nultočke polinoma

Cjelobrojne nultočke

Racionalne nultočke

Kompleksne nultočke

Simetrične jednačbe

Cardanova formula

Ferrarijeva metoda



Dokaz.

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

$$a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}$$

Tada je $a_i = \bar{a}_i$ za svako $i = 0, 1, \dots, n-1, n$.

Pretpostavimo da je $z \in \mathbb{C}$ nultočka od f . Tada je

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0.$$

Sada imamo

$$\begin{aligned} f(\bar{z}) &= a_n \bar{z}^n + a_{n-1} \bar{z}^{n-1} + \cdots + a_1 \bar{z} + a_0 = \\ &= a_n \overline{z^n} + a_{n-1} \overline{z^{n-1}} + \cdots + a_1 \bar{z} + a_0 = \\ &= \bar{a}_n \overline{z^n} + \bar{a}_{n-1} \overline{z^{n-1}} + \cdots + \bar{a}_1 \bar{z} + \bar{a}_0 = \\ &= \overline{a_n z^n} + \overline{a_{n-1} z^{n-1}} + \cdots + \overline{a_1 z} + \bar{a}_0 = \\ &= \overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0} = \bar{0} = 0. \end{aligned}$$

Dakle, $f(\bar{z}) = 0$.

Polinomi

Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
 $M(f, g)$
Kompleksni brojevi

Nultočke polinoma

Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Kompleksne nultočke
Simetrične jednačbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda



Napomena

Prethodni teorem ne vrijedi ako je $P(x) \in \mathbb{C}[x]$. Na primjer, nultočke polinoma

$$P(x) = x^2 - i$$

su $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ i $-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$ koje nisu konjugirano kompleksne.

Uočite gdje je u dokazu teorema 33. bilo važno da imamo polinom s realnim koeficijentima!

Korolar 28.

Svaki polinom $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ neparnog stupnja ima barem jednu realnu nultočku.

Polinomi

Definicija polinoma

Prsten polinoma

Jednakost polinoma

Određenost polinoma

Dijeljenje polinoma

Hornerov algoritam

Razvoj po $x - a$

$M(f, g)$

Kompleksni brojevi

Nultočke polinoma

Cjelobrojne nultočke

Racionalne nultočke

Kompleksne nultočke

Simetrične jednadžbe

Cardanova formula

Ferrarijeva metoda

Polinomi

Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
 $M(f, g)$
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Kompleksne nultočke
Simetrične jednačbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

Dokaz 1 (u duhu algebre).

Ako je $z \in \mathbb{C}$ kompleksna nultočka polinoma s realnim koeficijentima, tada je i $\bar{z} \in \mathbb{C}$ također nultočka tog polinoma. Dakle, kompleksne nultočke polinoma s realnim koeficijentima se pojavljuju u parovima. Nadalje, svaki polinom n -tog stupnja s koeficijentima u \mathbb{R} ima točno n nultočaka u skupu kompleksnih brojeva brojeći njihovu kratnost. Konačno, ako imamo polinom s realnim koeficijentima neparnog stupnja, on mora imati barem jednu realnu nultocku, jer je ukupan broj svih kompleksnih nultocki paran broj (jer se one pojavljuju u parovima), a ukupni broj svih nultocki mora biti neparan broj (jer polinom ima neparan stupanj).

Dokaz 2 (u duhu analize).

Neka je

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

gdje je n neparan prirodni broj. Kada $x \rightarrow \pm\infty$ na predznak od $f(x)$ utječe samo član $a_n x^n$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $a_n > 0$. Tada postoje $x_1 < 0$ i $x_2 > 0$ takvi da je $f(x_1) < 0$ i $f(x_2) > 0$ jer je n neparan broj. Kako je polinom neprekidna funkcija, a neprekidna funkcija na segmentu poprima sve međuvrijednosti, tada postoji $x_0 \in [x_1, x_2]$ takav da je $f(x_0) = 0$.



Polinomi

Definicija polinoma

Prsten polinoma

Jednakost polinoma

Određenost polinoma

Dijeljenje polinoma

Hornerov algoritam

Razvoj po $x - a$

$M(f, g)$

Kompleksni brojevi

Nultočke polinoma

Cjelobrojne nultočke

Racionalne nultočke

Kompleksne nultočke

Simetrične jednačbe

Cardanova formula

Ferrarijeva metoda

Napomena

U oba dokaza korolara 28. smo koristili nekoliko velikih teorema čiji dokazi nisu tako trivijalni, a niti jednostavni jer su oni rezultati velikih teorija. U prvom dokazu smo koristili osnovni teorem algebre, a za njegov dokaz treba teorija kompleksnih funkcija kompleksne varijable. Postoji i algebarski dokaz tog teorema u kojem se koristi Galoisova teorija. U drugom dokazu smo koristili Bolzano-Weierstrassov teorem o neprekidnim realnim funkcijama na segmentu koji je specijalni slučaj teorema o neprekidnim realnim funkcijama na kompaktnom skupu. Prema tom teoremu svaka neprekidna realna funkcija na kompaktnom skupu poprima minimum i maksimum i sve međuvrijednosti.

Polinomi

Definicija polinoma

Prsten polinoma

Jednakost polinoma

Određenost polinoma

Dijeljenje polinoma

Hornerov algoritam

Razvoj po $x - a$

$M(f, g)$

Kompleksni brojevi

Nultočke polinoma

Cjelobrojne nultočke

Racionalne nultočke

Kompleksne nultočke

Simetrične jednačbe

Cardanova formula

Ferrarijeva metoda

Teorem 34.

Neka je $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ polinom s kompleksnim koeficijentima, a x_1, x_2, \dots, x_n njegove nultočke. Tada vrijedi:

$$\sum_{i=1}^n x_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$\sum_{i < j} x_i x_j = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$\sum_{i < j < k} x_i x_j x_k = -\frac{a_{n-3}}{a_n}$$

\vdots

$$\prod_{i=1}^n x_i = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

Polinomi

Definicija polinoma

Prsten polinoma

Jednakost polinoma

Određenost polinoma

Dijeljenje polinoma

Hornerov algoritam

Razvoj po $x - a$

$M(f, g)$

Kompleksni brojevi

Nultočke polinoma

Cjelobrojne nultočke

Racionalne nultočke

Kompleksne nultočke

Simetrične jednačbe

Cardanova formula

Ferrarijeva metoda



Cjelobrojne nultočke polinoma

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Teorem 35.

Ako je $\alpha \in \mathbb{Z}$ nultočka polinoma $f(x)$ s cjelobrojnim koeficijentima, tada je α djelitelj njegovog slobodnog člana.

Dokaz.

Neka je $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, gdje su $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_n \neq 0$. Po pretpostavci je $f(\alpha) = 0$ pa imamo

$$a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \dots + a_1 \alpha + a_0 = 0.$$

Iz te jednakosti slijedi

$$a_0 = -\alpha \left(\underbrace{a_n \alpha^{n-1} + a_{n-1} \alpha^{n-2} + \dots + a_1}_{\in \mathbb{Z}} \right),$$

iz čega slijedi da je α djelitelj od a_0 .

Polinomi

Definicija polinoma

Prsten polinoma

Jednakost polinoma

Određenost polinoma

Dijeljenje polinoma

Hornerov algoritam

Razvoj po $x - a$

$M(f, g)$

Kompleksni brojevi

Nultočke polinoma

Cjelobrojne nultočke

Racionalne nultočke

Kompleksne nultočke

Simetrične jednadžbe

Cardanova formula

Ferrarijeva metoda



Primjer 20.

Riješite jednadžbu $x^3 + x^2 - 2x - 2 = 0$.

Rješenje

Polinomi

Definicija polinoma

Prsten polinoma

Jednakost polinoma

Određenost polinoma

Dijeljenje polinoma

Hornerov algoritam

Razvoj po $x - a$

$M(f, g)$

Kompleksni brojevi

Nultočke polinoma

Cjelobrojne nultočke

Racionalne nultočke

Kompleksne nultočke

Simetrične jednadžbe

Cardanova formula

Ferrarijeva metoda

Primjer 20.

Riješite jednadžbu $x^3 + x^2 - 2x - 2 = 0$.

Rješenje

Kandidati za cjelobrojna rješenja: $\pm 1, \pm 2$.

Pomoću Hornerovog algoritma dobivamo da je jedno rješenje $x_1 = -1$.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 1 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & -2 & 0 \end{array}$$

Dakle imamo, $(x + 1)(x^2 - 2) = 0$, pa su preostala dva rješenja $x_2 = \sqrt{2}$ i $x_3 = -\sqrt{2}$.

Polinomi

Definicija polinoma

Prsten polinoma

Jednakost polinoma

Određenost polinoma

Dijeljenje polinoma

Hornerov algoritam

Razvoj po $x - a$

$M(f, g)$

Kompleksni brojevi

Nultočke polinoma

Cjelobrojne nultočke

Racionalne nultočke

Kompleksne nultočke

Simetrične jednadžbe

Cardanova formula

Ferrarijeva metoda

Teorem 36.

Ako je $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ polinom s cjelobrojnim koeficijentima i α njegova cjelobrojna nultočka, tada je za svaki $k \in \mathbb{Z}$ broj $f(k)$ djeljiv s $\alpha - k$.

Dokaz.

Prema pretpostavci je

$$0 = f(\alpha) = a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \dots + a_1 \alpha + a_0.$$

Nadalje je

$$f(k) = a_n k^n + a_{n-1} k^{n-1} + \dots + a_1 k + a_0.$$

Oduzimanjem tih jednakosti dobivamo

$$-f(k) = a_n (\alpha^n - k^n) + a_{n-1} (\alpha^{n-1} - k^{n-1}) + \dots + a_1 (\alpha - k).$$

Kako je svaki od binoma na desnoj strani djeljiv sa $\alpha - k$, to je i $-f(k)$ pa stoga i $f(k)$ djeljiv s $\alpha - k$.



Primjer 21.

Riješite jednadžbu $x^3 - 4x^2 - 5x + 20 = 0$.

Rješenje

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Polinomi

Definicija polinoma

Prsten polinoma

Jednakost polinoma

Određenost polinoma

Dijeljenje polinoma

Hornerov algoritam

Razvoj po $x - a$

$M(f, g)$

Kompleksni brojevi

Nultočke polinoma

Cjelobrojne nultočke

Racionalne nultočke

Kompleksne nultočke

Simetrične jednadžbe

Cardanova formula

Ferrarijeva metoda

Primjer 21.

Riješite jednadžbu $x^3 - 4x^2 - 5x + 20 = 0$.

Rješenje

Kandidati za cjelobrojna rješenja:

1, -1, 2, -2, 4, -4, 5, -5, 10, -10, 20, -20.

Uzmemo li $k = -2$, dobivamo $f(k) = f(-2) = 6$.

Ispišemo brojeve $\alpha - k$, tj. $\alpha + 2$

3, 1, 4, 0, 6, -2, 7, -3, 12, -8, 22, -18.

Kako $f(-2)$ nije djeljiv s 4, 0, 7, 12, -8, 22, -18, onda prema prethodnom teoremu, jedini kandidati za cjelobrojna rješenja preostaju

1, -1, 4, -4, -5.

Polinomi

Definicija polinoma

Prsten polinoma

Jednakost polinoma

Određenost polinoma

Dijeljenje polinoma

Hornerov algoritam

Razvoj po $x - a$

$M(f, g)$

Kompleksni brojevi

Nultočke polinoma

Cjelobrojne nultočke

Racionalne nultočke

Kompleksne nultočke

Simetrične jednadžbe

Cardanova formula

Ferrarijeva metoda

Sada pomoću Hornerovog algoritma se lako vidi da je $x_1 = 4$ jedno rješenje.

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} & 1 & -4 & -5 & 20 \\ \hline 4 & 1 & 0 & -5 & 0 \end{array}$$

Dakle, početna jednadžba sada glasi

$$(x - 4)(x^2 - 5) = 0,$$

pa su preostala dva rješenja

$$x_2 = \sqrt{5}, \quad x_3 = -\sqrt{5}.$$

Polinomi

Definicija polinoma

Prsten polinoma

Jednakost polinoma

Određenost polinoma

Dijeljenje polinoma

Hornerov algoritam

Razvoj po $x - a$

$M(f, g)$

Kompleksni brojevi

Nultočke polinoma

Cjelobrojne nultočke

Racionalne nultočke

Kompleksne nultočke

Simetrične jednadžbe

Cardanova formula

Ferrarijeva metoda

Teorem 37.

Ako je racionalni broj $\alpha = \frac{p}{q}$ nultočka polinoma $f(x)$ s cjelobrojnim koeficijentima, onda je p djelitelj slobodnog člana i q djelitelj vodećeg koeficijenta od $f(x)$.

Dokaz.

Neka je $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, gdje su $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_n \neq 0$. Po pretpostavci je $f(\alpha) = 0$ pa imamo

$$a_n \left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1} \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \dots + a_1 \frac{p}{q} + a_0 = 0.$$

Iz te jednakosti slijedi

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \dots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0, \quad (\ast)$$

Polinomi

- Definicija polinoma
- Prsten polinoma
- Jednakost polinoma
- Određenost polinoma
- Dijeljenje polinoma
- Hornerov algoritam
- Razvoj po $x - a$
- $M(f, g)$
- Kompleksni brojevi
- Nultočke polinoma
- Cjelobrojne nultočke
- Racionalne nultočke**
- Kompleksne nultočke
- Simetrične jednadžbe
- Cardanova formula
- Ferrarijeva metoda

pa imamo

$$a_0q^n = -p(a_np^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + \dots + a_1q^{n-1}).$$

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da su p i q relativno prosti. U tom slučaju p nije djelitelj od q^n .

Stoga iz posljednje jednakosti slijedi da je p djelitelj od a_0 .

Nadalje, iz $(*)$ dobivamo

$$a_np^n = -q(a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_1pq^{n-2} + a_0q^{n-1}),$$

iz čega slijedi da je q djelitelj od a_n .



Polinomi

Definicija polinoma

Prsten polinoma

Jednakost polinoma

Određenost polinoma

Dijeljenje polinoma

Hornerov algoritam

Razvoj po $x - a$

$M(f, g)$

Kompleksni brojevi

Nultočke polinoma

Cjelobrojne nultočke

Racionalne nultočke

Kompleksne nultočke

Simetrične jednadžbe

Cardanova formula

Ferrarijeva metoda

Primjer 22.

Riješite jednadžbu $3x^3 - x^2 + 3x - 1 = 0$.

Rješenje

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Polinomi

Definicija polinoma

Prsten polinoma

Jednakost polinoma

Određenost polinoma

Dijeljenje polinoma

Hornerov algoritam

Razvoj po $x - a$

$M(f, g)$

Kompleksni brojevi

Nultočke polinoma

Cjelobrojne nultočke

Racionalne nultočke

Kompleksne nultočke

Simetrične jednadžbe

Cardanova formula

Ferrarijeva metoda



Primjer 22.

Riješite jednadžbu $3x^3 - x^2 + 3x - 1 = 0$.

Rješenje

Kandidati za racionalna rješenja:

$$-1, 1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}.$$

Hornerovim algoritmom dobivamo da je $x_1 = \frac{1}{3}$ jedno rješenje.

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} & 3 & -1 & 3 & -1 \\ \hline \frac{1}{3} & 3 & 0 & 3 & 0 \end{array}$$

Početna jednadžba se tada faktorizira u

$$\left(x - \frac{1}{3}\right)(3x^2 + 3) = 0.$$

Stoga su preostala dva rješenja $x_2 = i$ i $x_3 = -i$.

Polinomi

Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
 $M(f, g)$
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke

Racionalne nultočke

Kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda



Teorem 38.

Ako je $\alpha = \frac{p}{q}$, $M(p, q) = 1$, racionalna nultočka polinoma $f(x)$ s cjelobrojnim koeficijentima, onda je za svaki cijeli broj k broj $f(k)$ djeljiv s $p - kq$.

Dokaz.

Prema pretpostavci je

$$0 = f(\alpha) = a_n \left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1} \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \cdots + a_1 \frac{p}{q} + a_0.$$

Nadalje je

$$f(k) = a_n k^n + a_{n-1} k^{n-1} + \cdots + a_1 k + a_0.$$

Oduzimanjem tih jednakosti dobivamo

$$-f(k) = a_n \left(\left(\frac{p}{q}\right)^n - k^n \right) + a_{n-1} \left(\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} - k^{n-1} \right) + \cdots + a_1 \left(\frac{p}{q} - k \right),$$

odnosno

$$-f(k)q^n = a_n (p^n - q^n k^n) + a_{n-1} (p^{n-1} - q^{n-1} k^{n-1}) q + \dots + a_1 (p - qk) q^{n-1} \quad (\square)$$

Svaki od binoma na desnoj strani je djeljiv s $p - qk$.

Iz $M(p, q) = 1$ slijedi $M(q, p - kq) = 1$.

Naime, pretpostavimo suprotno, $M(q, p - kq) = s > 1$.

Tada je

$$p - kq = t_1 s, \quad q = t_2 s$$

za neke $t_1, t_2 \in \mathbb{Z}$. No, tada dobivamo

$$p = t_1 s + kt_2 s, \text{ tj. } p = (t_1 + kt_2) s$$

pa bi bilo $M(p, q) \geq s$, što je kontradikcija s pretpostavkom, pa je zaista $M(q, p - kq) = 1$. Tada je i $M(q^n, p - kq) = 1$. Sada zbog svega navedenog iz (\square) slijedi da je $f(k)$ djeljiv s $p - kq$.



Polinomi

Definicija polinoma

Prsten polinoma

Jednakost polinoma

Određenost polinoma

Dijeljenje polinoma

Hornerov algoritam

Razvoj po $x - a$

$M(f, g)$

Kompleksni brojevi

Nultočke polinoma

Cjelobrojne nultočke

Racionalne nultočke

Kompleksne nultočke

Simetrične jednačbe

Cardanova formula

Ferrarijeva metoda



Primjer 23.

Riješite jednađžbu $12x^3 + 4x^2 - 3x - 1 = 0$.

Rješenje

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Polinomi

Definicija polinoma

Prsten polinoma

Jednakost polinoma

Određenost polinoma

Dijeljenje polinoma

Hornerov algoritam

Razvoj po $x - a$

$M(f, g)$

Kompleksni brojevi

Nultočke polinoma

Cjelobrojne nultočke

Racionalne nultočke

Kompleksne nultočke

Simetrične jednađžbe

Cardanova formula

Ferrarijeva metoda



Primjer 23.

Riješite jednadžbu $12x^3 + 4x^2 - 3x - 1 = 0$.

Rješenje

Kandidati za racionalna rješenja:

$$1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{12}, -\frac{1}{12}$$

$$k = -1, \quad f(-1) = -6, \quad p - kq = p + q$$

Ispišemo brojeve $p + q$

$$2, 0, 3, 1, 4, 2, 5, 3, 7, 5, 13, 11$$

Kako $f(-1)$ nije djeljivo s 0, 4, 5, 7, 5, 13, 11, prema prethodnom teoremu jedini kandidati za racionalna rješenja su

$$1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}.$$

Polinomi

Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
 $M(f, g)$
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

Sada se dalje lagano Hornerovim algoritmom dobije da su
rješenja početne jednadžbe

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = -\frac{1}{2}, \quad x_3 = -\frac{1}{3}.$$

Polinomi

Definicija polinoma

Prsten polinoma

Jednakost polinoma

Određenost polinoma

Dijeljenje polinoma

Hornerov algoritam

Razvoj po $x - a$

$M(f, g)$

Kompleksni brojevi

Nultočke polinoma

Cjelobrojne nultočke

Racionalne nultočke

Kompleksne nultočke

Simetrične jednadžbe

Cardanova formula

Ferrarijeva metoda

Cjelobrojna kompleksna nultočka polinoma je nultočka $\alpha + \beta i$, gdje su $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$, $\beta \neq 0$.

Teorem 39.

Ako je $\alpha + \beta i$ cjelobrojna kompleksna nultočka polinoma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

s cjelobrojnim koeficijentima, onda je $\alpha^2 + \beta^2$ djelitelj slobodnog člana.

Polinomi

Definicija polinoma

Prsten polinoma

Jednakost polinoma

Određenost polinoma

Dijeljenje polinoma

Hornerov algoritam

Razvoj po $x - a$

$M(f, g)$

Kompleksni brojevi

Nultočke polinoma

Cjelobrojne nultočke

Racionalne nultočke

Kompleksne nultočke

Simetrične jednačbe

Cardanova formula

Ferrarijeva metoda

Dokaz.

Ako je $\alpha + \beta i$ nultočka zadanog polinoma, tada je prema
◀ Teorem 33. i $\alpha - \beta i$ nultočka tog polinoma, pa je polinom
 $f(x)$ djeljiv s polinomom

$$g(x) = (x - \alpha - \beta i)(x - \alpha + \beta i),$$

odnosno s

$$g(x) = x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2.$$

Dakle,

$$f(x) = (x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2)q(x).$$

Označimo li

$$q(x) = b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_0, \quad b_i \in \mathbb{Z},$$

tada slijedi

$$a_0 = (\alpha^2 + \beta^2)b_0.$$

Polinomi

Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
 $M(f, g)$
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Kompleksne nultočke
Simetrične jednačbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda



Primjer 24.

Odredite cjelobrojne kompleksne korijene jednadžbe

$$x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 5 = 0.$$

Rješenje

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Polinomi

Definicija polinoma

Prsten polinoma

Jednakost polinoma

Određenost polinoma

Dijeljenje polinoma

Hornerov algoritam

Razvoj po $x - a$

$M(f, g)$

Kompleksni brojevi

Nultočke polinoma

Cjelobrojne nultočke

Racionalne nultočke

Kompleksne nultočke

Simetrične jednadžbe

Cardanova formula

Ferrarijeva metoda



Primjer 24.

Odredite cjelobrojne kompleksne korijene jednadžbe

$$x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 5 = 0.$$

Rješenje

Slobodni član 5 ima dva pozitivna djelitelja 1 i 5.

Prikažimo te brojeve u obliku sume kvadrata

$$\alpha^2 + \beta^2, \beta \neq 0.$$

$$1 = 0^2 + 1^2$$

$$5 = 1^2 + 2^2 = 2^2 + 1^2$$

Sada odavde slijedi da su kandidati za cjelobrojne kompleksne korijene sljedeći brojevi:

$$i, -i, 1+2i, 1-2i, -1+2i, -1-2i, 2+i, 2-i, -2+i, -2-i.$$

Polinomi

Definicija polinoma

Prsten polinoma

Jednakost polinoma

Određenost polinoma

Dijeljenje polinoma

Hornerov algoritam

Razvoj po $x - a$

$M(f, g)$

Kompleksni brojevi

Nultočke polinoma

Cjelobrojne nultočke

Racionalne nultočke

Kompleksne nultočke

Simetrične jednadžbe

Cardanova formula

Ferrarijeva metoda

Hornerovim algoritmom dobivamo da je $x_1 = i$ jedno rješenje.

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} & 1 & -4 & 6 & -4 & 5 \\ \hline i & 1 & -4 + i & 5 - 4i & 5i & 0 \end{array}$$

Prema teoremu ◀ Teorem 33. znamo da je tada i $x_2 = -i$ također rješenje. Sada je polinom na lijevoj strani zadane jednadžbe djeljiv s polinomom

$$(x - i)(x + i) = x^2 + 1,$$

pa se početna jednadžba faktorizira u obliku

$$(x^2 + 1)(x^2 - 4x + 5) = 0.$$

Riješimo li jednadžbu $x^2 - 4x + 5 = 0$ dobivamo preostala dva rješenja $x_3 = 2 + i$ i $x_4 = 2 - i$.

Polinomi

- Definicija polinoma
- Prsten polinoma
- Jednakost polinoma
- Određenost polinoma
- Dijeljenje polinoma
- Hornerov algoritam
- Razvoj po $x - a$
- $M(f, g)$
- Kompleksni brojevi
- Nultočke polinoma
- Cjelobrojne nultočke
- Racionalne nultočke
- Kompleksne nultočke**
- Simetrične jednadžbe
- Cardanova formula
- Ferrarijeva metoda

Simetrične jednađžbe

Za polinom

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

kažemo da je **simetričan** ako vrijedi

$$a_0 = a_n, \quad a_1 = a_{n-1}, \dots, a_k = a_{n-k}.$$

Simetričnom polinomu $f(x)$ pridružena jednađžba $f(x) = 0$ zove se **simetrična jednađžba**.

Zadatak 16.

Dokažite da je polinom $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ n -tog stupnja simetričan akko vrijedi

$$x^n \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Polinomi

Definicija polinoma

Prsten polinoma

Jednakost polinoma

Određenost polinoma

Dijeljenje polinoma

Hornerov algoritam

Razvoj po $x - a$

$M(f, g)$

Kompleksni brojevi

Nultočke polinoma

Cjelobrojne nultočke

Racionalne nultočke

Kompleksne nultočke

Simetrične jednađžbe

Cardanova formula

Ferrarijeva metoda



Simetrične jednadžbe parnog stupnja

Simetrična jednadžba $f(x) = 0$ parnog stupnja može se riješiti pomoću supstitucije

$$x + \frac{1}{x} = t. \quad (\text{SIM})$$

Kvadriramo li (SIM) dobivamo

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2.$$

Kubiramo li (SIM) dobivamo

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = t^3 - 3t.$$

Nastavljajući taj postupak možemo $x^k + \frac{1}{x^k}$ izraziti pomoću t .

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Polinomi

Definicija polinoma

Prsten polinoma

Jednakost polinoma

Određenost polinoma

Dijeljenje polinoma

Hornerov algoritam

Razvoj po $x - a$

$M(f, g)$

Kompleksni brojevi

Nultočke polinoma

Cjelobrojne nultočke

Racionalne nultočke

Kompleksne nultočke

Simetrične jednadžbe

Cardanova formula

Ferrarijeva metoda



Primjer 25.

Riješite jednadžbu $3x^4 - 13x^3 + 16x^2 - 13x + 3 = 0$.

Rješenje

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Polinomi

Definicija polinoma

Prsten polinoma

Jednakost polinoma

Određenost polinoma

Dijeljenje polinoma

Hornerov algoritam

Razvoj po $x - a$

$M(f, g)$

Kompleksni brojevi

Nultočke polinoma

Cjelobrojne nultočke

Racionalne nultočke

Kompleksne nultočke

Simetrične jednadžbe

Cardanova formula

Ferrarijeva metoda



Primjer 25.

Riješite jednadžbu $3x^4 - 13x^3 + 16x^2 - 13x + 3 = 0$.

Rješenje

Podijelimo li jednadžbu sa x^2 dobivamo

$$3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 13\left(x + \frac{1}{x}\right) + 16 = 0.$$

Stavimo supstituciju $t = x + \frac{1}{x}$. Tada je $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$.

Sada dobivamo jednadžbu

$$3t^2 - 13t + 10 = 0,$$

čija rješenja su $t_1 = 1$ i $t_2 = \frac{10}{3}$. Vratimo se natrag u supstituciju i dobivamo rješenja početne jednadžbe

$$x_1 = 3, \quad x_2 = \frac{1}{3}, \quad x_3 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad x_4 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$$

Polinomi

Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
 $M(f, g)$
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda



Simetrične jednačbe neparnog stupnja

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Teorem 40.

Svaki simetrični polinom neparnog stupnja je djeljiv sa $x + 1$.

Dokaz.

Neka je


$$f(x) = a_0x^{2k+1} + a_1x^{2k} + \cdots + a_1x + a_0.$$

Tada je

$$f(x) = a_0(x^{2k+1} + 1) + a_1(x^{2k} + x) + \cdots + a_k(x^{k+1} + x^k),$$

odnosno

$$f(x) = a_0(x^{2k+1} + 1) + a_1x(x^{2k-1} + 1) + \cdots + a_kx^k(x + 1.)$$

Kako je svaki od binoma na desnoj strani djeljiv sa $x + 1$,
to je i $f(x)$ djeljiv sa $x + 1$. 

Polinomi

Definicija polinoma

Prsten polinoma

Jednakost polinoma

Određenost polinoma

Dijeljenje polinoma

Hornerov algoritam

Razvoj po $x - a$

$M(f, g)$

Kompleksni brojevi

Nultočke polinoma

Cjelobrojne nultočke

Racionalne nultočke

Kompleksne nultočke

Simetrične jednačbe

Cardanova formula

Ferrarijeva metoda



Napomena.

Kvocijent pri dijeljenju simetričnog polinoma neparnog stupnja s polinomom $x + 1$ je simetrični polinom parnog stupnja. Uvjerite se u to na jednom konkretnom primjeru i pokušajte to općenito dokazati koristeći [◀ Zadatak 16.](#)

Primjer 26.

Riješite jednadžbu $2x^3 + 7x^2 + 7x + 2 = 0$.

Rješenje

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Polinomi

Definicija polinoma

Prsten polinoma

Jednakost polinoma

Određenost polinoma

Dijeljenje polinoma

Hornerov algoritam

Razvoj po $x - a$

$M(f, g)$

Kompleksni brojevi

Nultočke polinoma

Cjelobrojne nultočke

Racionalne nultočke

Kompleksne nultočke

Simetrične jednadžbe

Cardanova formula

Ferrarijeva metoda



Napomena.

Kvocijent pri dijeljenju simetričnog polinoma neparnog stupnja s polinomom $x + 1$ je simetrični polinom parnog stupnja. Uvjerite se u to na jednom konkretnom primjeru i pokušajte to općenito dokazati koristeći [◀ Zadatak 16.](#)

Primjer 26.

Riješite jednadžbu $2x^3 + 7x^2 + 7x + 2 = 0$.

Rješenje

Jednadžbu faktoriziramo na sljedeći način:

$$2(x^3 + 1) + 7x(x + 1) = 0$$

$$(x + 1)(2x^2 + 5x + 2) = 0.$$

Odavde slijedi

$$x + 1 = 0, \quad 2x^2 + 5x + 2 = 0,$$

pa su rješenja

$$x_1 = -1, \quad x_2 = -\frac{1}{2}, \quad x_3 = -2.$$

Cardanova formula

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Neka je

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

algebarska jednadžba trećeg stupnja. Rješavanje ove jednadžbe sastoji se od nekoliko koraka.

- ❶ **Normiranje jednadžbe.** Jednadžbu podijelimo s a_3 i dobivamo

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0,$$

gdje je $a = \frac{a_2}{a_3}$, $b = \frac{a_1}{a_3}$, $c = \frac{a_0}{a_3}$.

- ❷ **Poništenje kvadratnog člana.** Supstitucijom

$$x = y - \frac{a}{3}$$

riješit ćemo se kvadratnog člana i jednadžba poprima oblik

Polinomi

Definicija polinoma

Prsten polinoma

Jednakost polinoma

Određenost polinoma

Dijeljenje polinoma

Hornerov algoritam

Razvoj po $x - a$

$M(f, g)$

Kompleksni brojevi

Nultočke polinoma

Cjelobrojne nultočke

Racionalne nultočke

Kompleksne nultočke

Simetrične jednadžbe

Cardanova formula

Ferrarijeva metoda



$$y^3 + py + q = 0, \quad (1)$$

gdje je

$$p = b - \frac{1}{3}a^2, \quad q = \frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c.$$

Takva jednadžba u kojoj nema kvadratnog člana zove se **kanonski oblik** jednadžbe trećeg stupnja.

- ③ Rješenje kanonske jednadžbe (1) tražimo u obliku

$$y = u + v, \quad (2)$$

gdje su u i v za sada još neodređeni brojevi. Kako se svaki broj može na beskonačno načina prikazati u obliku zbroja dvaju brojeva, na rastav (2) možemo postaviti još jedan uvjet.

Polinomi

Definicija polinoma

Prsten polinoma

Jednakost polinoma

Određenost polinoma

Dijeljenje polinoma

Hornerov algoritam

Razvoj po $x - a$

$M(f, g)$

Kompleksni brojevi

Nultočke polinoma

Cjelobrojne nultočke

Racionalne nultočke

Kompleksne nultočke

Simetrične jednadžbe

Cardanova formula

Ferrarijeva metoda

Ako je (2) korijen jednadžbe (1), onda ju on mora zadovoljavati, tj. mora biti

$$(u + v)^3 + p(u + v) + q = 0,$$

odnosno

$$(3uv + p)(u + v) + (u^3 + v^3 + q) = 0.$$

Odaberimo onaj od rastava (2) za koji vrijedi

$$3uv + p = 0.$$

Ako uvrstimo u prethodnu jednadžbu, dobivamo

$$u^3 + v^3 = -q.$$

Polinomi

Definicija polinoma

Prsten polinoma

Jednakost polinoma

Određenost polinoma

Dijeljenje polinoma

Hornerov algoritam

Razvoj po $x - a$

$M(f, g)$

Kompleksni brojevi

Nultočke polinoma

Cjelobrojne nultočke

Racionalne nultočke

Kompleksne nultočke

Simetrične jednadžbe

Cardanova formula

Ferrarijeva metoda

Problem rješavanja kanonske jednadžbe (1) svodi se na rješavanje sustava

$$\left. \begin{aligned} u^3 + v^3 &= -q \\ uv &= -\frac{p}{3} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

jer ako su u i v rješenja od (3), onda je očito $u + v$ rješenje od (1).

Umjesto sustava (3) promatramo sustav

$$\left. \begin{aligned} u^3 + v^3 &= -q \\ u^3 v^3 &= -\left(\frac{p}{3}\right)^3 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Sustavi (3) i (4) **nisu ekvivalentni**. Svako rješenje sustava (3) jest rješenje sustava (4), ali obrnuto ne mora vrijediti.

Polinomi

Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
 $M(f, g)$
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe

Cardanova formula

Ferrarijeva metoda

Polinomi

Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
 $M(f, g)$
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe

Cardanova formula

Ferrarijeva metoda

Dakle, sustav (3) možemo riješiti tako da riješimo sustav (4) i uzmemo samo ona rješenja od (4) koja zadovoljavaju drugu jednadžbu u (3).

Iz (4), prema Vièteovim formulama, slijedi da su u^3 i v^3 korijeni jednadžbe

$$t^2 + qt - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0.$$

Oдавде slijedi

$$t_{1,2} = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

Dakle,

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

$$v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Rješenje kanonske jednadžbe **(1)** može se napisati u obliku

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \quad (5)$$

Formula (5) se zove **Cardanova formula**.

Polinomi

Definicija polinoma

Prsten polinoma

Jednakost polinoma

Određenost polinoma

Dijeljenje polinoma

Hornerov algoritam

Razvoj po $x - a$

$M(f, g)$

Kompleksni brojevi

Nultočke polinoma

Cjelobrojne nultočke

Racionalne nultočke

Kompleksne nultočke

Simetrične jednadžbe

Cardanova formula

Ferrarijeva metoda

Važna napomena.

Kako treći korijen ima tri vrijednosti iz Cardanove formule se čini da kubna jednadžba ima devet rješenja. Međutim, to nije tako, jer sjetimo se izvoda formule i neekvivalentnosti sustava **(3)** i **(4)**, brojevi u i v moraju još zadovoljavati jednadžbu $3uv + p = 0$ pa imamo samo tri rješenja.

Polinomi

Definicija polinoma

Prsten polinoma

Jednakost polinoma

Određenost polinoma

Dijeljenje polinoma

Hornerov algoritam

Razvoj po $x - a$

$M(f, g)$

Kompleksni brojevi

Nultočke polinoma

Cjelobrojne nultočke

Racionalne nultočke

Kompleksne nultočke

Simetrične jednadžbe

Cardanova formula

Ferrarijeva metoda

Cardanova formula je nespretna za računanje pa ćemo ju malo modificirati. Neka je

$$u_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

bilo koja vrijednost korijena i

$$v_1 = -\frac{p}{3u_1}.$$

Neka je $\varepsilon = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$ treći korijen iz jedinice. Tada je

$$\varepsilon^2 = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, \quad \varepsilon^3 = 1, \quad \varepsilon^4 = \varepsilon, \quad \varepsilon^5 = \varepsilon^2, \quad \varepsilon^6 = 1, \dots$$

Polinomi

Definicija polinoma

Prsten polinoma

Jednakost polinoma

Određenost polinoma

Dijeljenje polinoma

Hornerov algoritam

Razvoj po $x - a$

$M(f, g)$

Kompleksni brojevi

Nultočke polinoma

Cjelobrojne nultočke

Racionalne nultočke

Kompleksne nultočke

Simetrične jednadžbe

Cardanova formula

Ferrarijeva metoda

Tada se rješenja jednadžbe

$$x^3 + px + q = 0$$

mogu zapisati u obliku

$$\begin{aligned}x_1 &= u_1 + v_1 \\x_2 &= u_1\varepsilon + v_1\varepsilon^2 \\x_3 &= u_1\varepsilon^2 + v_1\varepsilon\end{aligned}$$

Da je x_1 korijen te jednadžbe očito je iz postupka pomoću kojeg je izvedena Cardanova formula. Provjerimo da je i x_2 zaista korijen te jednadžbe. Uvrstimo li x_2 u gornju jednadžbu, dobivamo

$$\begin{aligned}(u_1\varepsilon + v_1\varepsilon^2)^3 + p(u_1\varepsilon + v_1\varepsilon^2) + q &= \\&= \underbrace{u_1^3 + v_1^3 + q}_{=0} + \varepsilon(u_1 + v_1\varepsilon)\underbrace{(3u_1v_1 + p)}_{=0} = 0,\end{aligned}$$

Polinomi

Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
 $M(f, g)$
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe

Cardanova formula

Ferrarijeva metoda

pa je zaista x_2 korijen. Analogno se provjeri da je i x_3 također rješenje te jednadžbe.

Primjer 27.

Riješite jednadžbu $x^3 + 30x + 90 = 0$.

Rješenje

Polinomi

Definicija polinoma

Prsten polinoma

Jednakost polinoma

Određenost polinoma

Dijeljenje polinoma

Hornerov algoritam

Razvoj po $x - a$

$M(f, g)$

Kompleksni brojevi

Nultočke polinoma

Cjelobrojne nultočke

Racionalne nultočke

Kompleksne nultočke

Simetrične jednadžbe

Cardanova formula

Ferrarijeva metoda

pa je zaista x_2 korijen. Analogno se provjeri da je i x_3 također rješenje te jednačbe.

Primjer 27.

Riješite jednačbu $x^3 + 30x + 90 = 0$.

Rješenje

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}, \quad p = 30, \quad q = 90$$

$$u_1 = \sqrt[3]{10} \quad (\text{uzmemo realnu vrijednost})$$

$$v_1 = -\frac{p}{3u_1} = -\sqrt[3]{100}$$

$$\varepsilon = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$$

Sada prema formulama rješenja su

Polinomi

Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
 $M(f, g)$
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Kompleksne nultočke
Simetrične jednačbe

Cardanova formula

Ferrarijeva metoda

Polinomi

Definicija polinoma

Prsten polinoma

Jednakost polinoma

Određenost polinoma

Dijeljenje polinoma

Hornerov algoritam

Razvoj po $x - a$

$M(f, g)$

Kompleksni brojevi

Nultočke polinoma

Cjelobrojne nultočke

Racionalne nultočke

Kompleksne nultočke

Simetrične jednačbe

Cardanova formula

Ferrarijeva metoda

$$x_1 = u_1 + v_1$$

$$x_1 = \sqrt[3]{10} - \sqrt[3]{100}$$

$$x_2 = u_1\varepsilon + v_1\varepsilon^2$$

$$x_2 = \frac{-\sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{100}}{2} - \frac{\sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{100}}{2}\sqrt{3}i$$

$$x_3 = u_1\varepsilon^2 + v_1\varepsilon$$

$$x_3 = \frac{-\sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{100}}{2} + \frac{\sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{100}}{2}\sqrt{3}i$$

x_3 nismo trebali niti računati jer imamo jednačbu s realnim koeficijentima, a znamo da se onda kompleksni korijeni javljaju u konjugiranim parovima.

U Cardanovoj formuli javlja se izraz

$$\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

koji zovemo diskriminanta jednadžbe

$$x^3 + px + q = 0.$$

Teorem 41.

Neka je Δ diskriminanta jednadžbe $x^3 + px + q = 0$ s realnim koeficijentima. Tada vrijedi:

- *Ako je $\Delta > 0$, onda zadana jednadžba ima jedan realni i dva konjugirano kompleksna korijena.*
- *Ako je $\Delta = 0$, onda su svi korijeni zadane jednadžbe realni i barem jedan od njih je višestruki.*
- *Ako je $\Delta < 0$, onda su svi korijeni zadane jednadžbe realni i različiti.*

Polinomi

Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
 $M(f, g)$
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe

Cardanova formula

Ferrarijeva metoda

Napomena.

Do otkrića kompleksnih brojeva došlo je preko kubne jednačbe, a ne preko kvadratne kako se uči u školi.

Naime, krenulo se od kubne jednačbe

$$(x + 1)(x - 1)(x - 2) = 0$$

za koju se zna da ima tri korijena -1 , 1 , 2 . Ako se ta jednačba svede na kanonski oblik supstitucijom

$x = y + \frac{2}{3}$ dobiva se jednačba

$$y^3 - \frac{7}{3}y + \frac{20}{27} = 0.$$

Prema Cardanovoj formuli je

$$x = \frac{2}{3} + \sqrt[3]{-\frac{10}{27} + \sqrt{-\frac{9161}{729}}} + \sqrt[3]{-\frac{10}{27} - \sqrt{-\frac{9161}{729}}}.$$

Vidimo da se pojavio drugi korijen iz negativnog broja, a znamo da rezultat mora biti realan, pa je to bio pravi razlog uvođenja kompleksnih brojeva.

Polinomi

Definicija polinoma

Prsten polinoma

Jednakost polinoma

Određenost polinoma

Dijeljenje polinoma

Hornerov algoritam

Razvoj po $x - a$

$M(f, g)$

Kompleksni brojevi

Nultočke polinoma

Cjelobrojne nultočke

Racionalne nultočke

Kompleksne nultočke

Simetrične jednačbe

Cardanova formula

Ferrarijeva metoda



Ferrarijeva metoda

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Neka je

$$a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0, \quad a_4 \neq 0$$

algebarska jednadžba 4. reda. Pogledajmo kako se ona rješava Ferrarijevom metodom. Prvo treba **normalizirati** jednadžbu tako da je vodeći koeficijent jednak 1. Dakle, podijelimo zadanu jednadžbu s a_4 i dobivamo

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

gdje je $a = \frac{a_3}{a_4}$, $b = \frac{a_2}{a_4}$, $c = \frac{a_1}{a_4}$, $d = \frac{a_0}{a_4}$.

Sljedeći korak je jednadžbu prikazati kao razliku kvadrata.

Polinomi

Definicija polinoma

Prsten polinoma

Jednakost polinoma

Određenost polinoma

Dijeljenje polinoma

Hornerov algoritam

Razvoj po $x - a$

$M(f, g)$

Kompleksni brojevi

Nultočke polinoma

Cjelobrojne nultočke

Racionalne nultočke

Kompleksne nultočke

Simetrične jednadžbe

Cardanova formula

Ferrarijeva metoda



Polinomi

Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
 $M(f, g)$
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Kompleksne nultočke
Simetrične jednačbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

Neka je y neki realan broj. Tada vrijedi jednakost

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d =$$

$$= \left(x^2 + \frac{a}{2}x + y\right)^2 - \left[\left(\frac{a^2}{4} - b + 2y\right)x^2 + (ay - c)x + y^2 - d\right].$$

Da bi izraz u uglatoj zagradi bio potpuni kvadrat, mora diskriminanta kvadratnog polinoma u varijabli x biti jednaka nula, tj.

$$(ay - c)^2 - 4\left(\frac{a^2}{4} - b + 2y\right)(y^2 - d) = 0.$$

Prethodnu jednačbu zovemo **Ferrarijeva rezolventa** od zadane jednačbe 4. stupnja. To je jednačba 3. stupnja po y i ima stoga barem jedno realno rješenje. U tom slučaju je izraz u uglatoj zagradi kvadrat nekog polinoma $F(x)$.

Možemo pisati

$$\left[\left(x^2 + \frac{a}{2}x + y \right) + F(x) \right] \cdot \left[\left(x^2 + \frac{a}{2}x + y \right) - F(x) \right] = 0$$

Preostaje da se riješe dvije kvadratne jednadžbe koje onda daju 4 rješenja.

Primjer 28.

Riješite jednadžbu $x^4 + 2x^2 + 4x + 8 = 0$.

Rješenje

Polinomi

Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
 $M(f, g)$
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

Polinomi

Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
 $M(f, g)$
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Kompleksne nultočke
Simetrične jednačbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

Možemo pisati

$$\left[\left(x^2 + \frac{a}{2}x + y \right) + F(x) \right] \cdot \left[\left(x^2 + \frac{a}{2}x + y \right) - F(x) \right] = 0$$

Preostaje da se riješe dvije kvadratne jednačbe koje onda daju 4 rješenja.

Primjer 28.

Riješite jednačbu $x^4 + 2x^2 + 4x + 8 = 0$.

Rješenje

$$(x^2 + 0 + y)^2 - \left[(2y - 2)x^2 - 4x + y^2 - 8 \right] = 0. \quad (*)$$

Rezolventa zadane jednačbe je

$$16 - 4(2y - 2)(y^2 - 8) = 0.$$

Jedno realno rješenje te rezolvente je $y = 3$.

Polinomi

Definicija polinoma

Prsten polinoma

Jednakost polinoma

Određenost polinoma

Dijeljenje polinoma

Hornerov algoritam

Razvoj po $x - a$

$M(f, g)$

Kompleksni brojevi

Nultočke polinoma

Cjelobrojne nultočke

Racionalne nultočke

Kompleksne nultočke

Simetrične jednadžbe

Cardanova formula

Ferrarijeva metoda

Uvrstimo li $y = 3$ u $(*)$ dobivamo

$$(x^2 + 3)^2 - (4x^2 - 4x + 1) = 0,$$

odnosno

$$(x^2 + 3)^2 - (2x - 1)^2 = 0.$$

Faktorizacijom dobivamo

$$(x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 4) = 0.$$

Riješimo li kvadratne jednadžbe

$$x^2 + 2x + 2 = 0, \quad x^2 - 2x + 4 = 0$$

dobivamo tražena rješenja

$$x_1 = -1 + i, \quad x_2 = -1 - i, \quad x_3 = 1 + i\sqrt{3}, \quad x_4 = 1 - i\sqrt{3}.$$

Dio VI

Funkcije više varijabli

Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrike

Otv. i zatv. skup

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parc. der. višeg reda

Diferencijabilnost

Usmjerena derivacija

Tm. srednje vrijednosti

Parc. der. slož. funkc.

Implicitna funkcija

Ekstremi

Uvjetni ekstremi



● Funkcije više varijabli

- Osnovne definicije
- Nivo-linije
- Kvadrike u \mathbb{R}^3
- Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
- Limes funkcije više varijabli
- Parcijalne derivacije
- Parcijalne derivacije višeg reda
- Diferencijabilnost funkcije
- Usmjerena derivacija
- Teorem srednje vrijednosti za funkcije više varijabli
- Parcijalno deriviranje složenih funkcija
- Derivacija implicitno zadane funkcije
- Ekstremi funkcija dvije varijable
- Uvjetni ekstremi

Funkcije više varijabli

Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike
Otv. i zatv. skup
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parc. der. višeg reda
Diferencijabilnost
Usmjerena derivacija
Tm. srednje vrijednosti
Parc. der. slož. funkc.
Implicitna funkcija
Ekstremi
Uvjetni ekstremi

Osnovne definicije

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Neka su $X_1, X_2, \dots, X_n, X_{n+1}$ neprazni skupovi. Svako preslikavanje

$$f : X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \rightarrow X_{n+1}$$

zovemo funkcijom n varijabli i označavamo relacijom

$$x_{n+1} = f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Ako je $X_i = \mathbb{R}$ za svaki $i = 1, 2, \dots, n + 1$, tada se radi o preslikavanju $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ i u tom slučaju f zovemo **realnom funkcijom n realnih varijabli**.

Kod nas će uglavnom biti $n = 2$, tj. proučavat ćemo realne funkcije dviju realnih varijabli.

Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrike

Otv. i zatv. skup

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parc. der. višeg reda

Diferencijabilnost

Usmjerena derivacija

Tm. srednje vrijednosti

Parc. der. slož. funkc.

Implicitna funkcija

Ekstremi

Uvjetni ekstremi



- Površina pravokutnika s duljinama stranica x, y

$$P(x, y) = xy$$

- Opseg pravokutnika s duljinama stranica x, y

$$o(x, y) = 2x + 2y$$

- Volumen kvadra s bridovima duljina x, y, z

$$V(x, y, z) = xyz$$

- Oplošje kvadra s bridovima duljina x, y, z

$$O(x, y, z) = 2(xy + xz + yz)$$

Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrike

Otv. i zatv. skup

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parc. der. višeg reda

Diferencijabilnost

Usmjerena derivacija

Tm. srednje vrijednosti

Parc. der. slož. funkc.

Implicitna funkcija

Ekstremi

Uvjetni ekstremi



Domena realne funkcije više varijabli

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrake

Otv. i zatv. skup

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parc. der. višeg reda

Diferencijabilnost

Usmjerena derivacija

Tm. srednje vrijednosti

Parc. der. slož. funkc.

Implicitna funkcija

Ekstremi

Uvjetni ekstremi

Domena (područje definicije) realne funkcije

$$x_{n+1} = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

je podskup Kartezijevog produkta $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ sastavljen od svih uređenih n -torki (x_1, \dots, x_n) za koje postoji realni broj $f(x_1, \dots, x_n)$.

Specijalno, kada je $n = 2$ i $X_1 = X_2 = \mathbb{R}$, domena od f je podskup od \mathbb{R}^2 , tj. neki skup u ravnini.



Graf realne funkcije dviju realnih varijabli

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Graf realne funkcije dviju realnih varijabli $z = f(x, y)$ je skup

$$\Gamma_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y)\}$$

kojeg prikazujemo u \mathbb{R}^3 i to je neka ploha u prostoru u slučaju da je funkcija f "lijepa" (barem neprekidna), iako se u definiciji plohe traže i jači zahtjevi na funkciju.

Primjer 29.

Odredimo domenu i pogledajmo kako izgleda graf

funkcije $f(x, y) = \sqrt{100 - 4x^2 - 10y^2}$.

► Rješenje

Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrrike

Otv. i zatv. skup

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parc. der. višeg reda

Diferencijabilnost

Usmjerena derivacija

Tm. srednje vrijednosti

Parc. der. slož. funkc.

Implicitna funkcija

Ekstremi

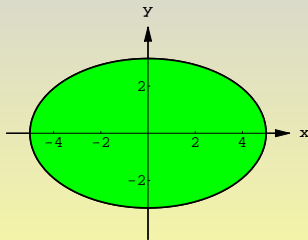
Uvjetni ekstremi



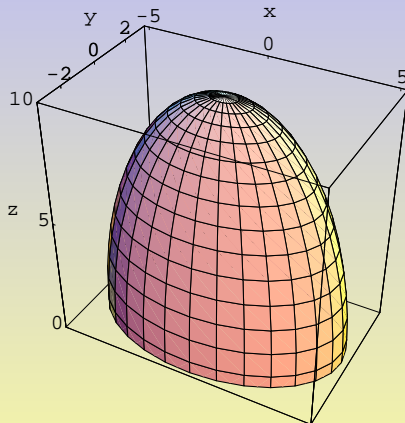
Zbog drugog korijena mora biti $100 - 4x^2 - 10y^2 \geq 0$,
odnosno

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{10} \leq 1,$$

što u slučaju jednakosti predstavlja elipsu sa središtem u ishodištu i poluosima $a = 5$, $b = \sqrt{10}$. Kako ovdje imamo nejednakost u obzir dolaze sve točke unutar te elipse uključujući i točke na elipsi.



Graf te funkcije izgleda



Primjer 30.

Odredimo domenu i pogledajmo kako izgleda graf funkcije $f(x, y) = \sqrt{xy}$.

Rješenje

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrike

Otv. i zatv. skup

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parc. der. višeg reda

Diferencijabilnost

Usmjerena derivacija

Tm. srednje vrijednosti

Parc. der. slož. funkc.

Implicitna funkcija

Ekstremi

Uvjetni ekstremi



Primjer 30.

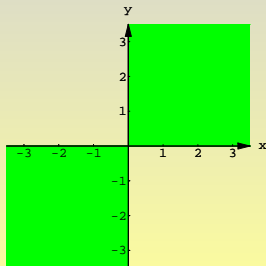
Odredimo domenu i pogledajmo kako izgleda graf funkcije $f(x, y) = \sqrt{xy}$.

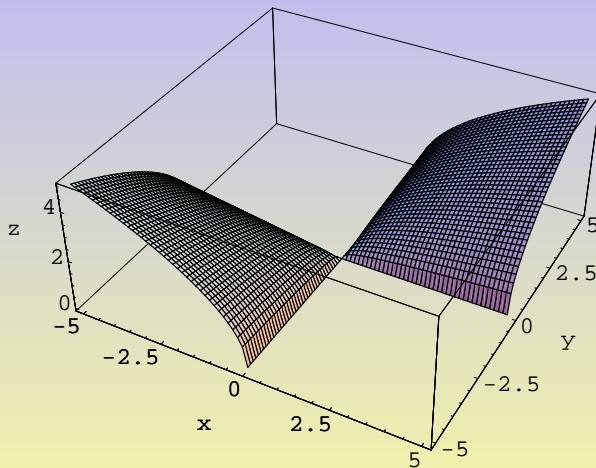
Rješenje

Zbog korijena mora biti $xy \geq 0$ pa imamo dva slučaja:

- $x \geq 0$ i $y \geq 0$,
- $x \leq 0$ i $y \leq 0$,

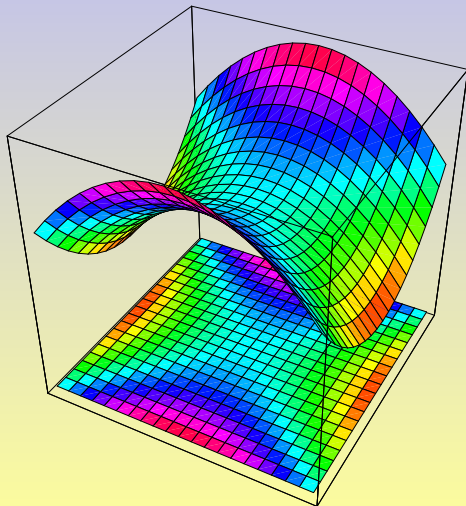
pa je domena ove funkcije prvi i treći kvadrant uključujući i koordinatne osi.





Nivo-linije

Gledamo sve točke na grafu funkcije koje su jednako udaljene od xy -ravnine



Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrrike

Otv. i zatv. skup

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parc. der. višeg reda

Diferencijabilnost

Usmjerena derivacija

Tm. srednje vrijednosti

Parc. der. slož. funkc.

Implicitna funkcija

Ekstremi

Uvjetni ekstremi



Nivo-linija funkcije $z = f(x, y)$ za vrijednost $z = z_0$ je skup svih točaka $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ za koje je $f(x, y) = z_0$.

Nivo-ploha funkcije $u = f(x, y, z)$ za vrijednost $u = u_0$ je skup svih točaka $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ za koje je $f(x, y, z) = u_0$.

Primjer 31.

Odredimo nivo-linije funkcije $f(x, y) = \sqrt{xy}$.

Rješenje

Nivo-linija funkcije $z = f(x, y)$ za vrijednost $z = z_0$ je skup svih točaka $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ za koje je $f(x, y) = z_0$.

Nivo-ploha funkcije $u = f(x, y, z)$ za vrijednost $u = u_0$ je skup svih točaka $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ za koje je $f(x, y, z) = u_0$.

Primjer 31.

Odredimo nivo-linije funkcije $f(x, y) = \sqrt{xy}$.

Rješenje

$$f(x, y) = C \Rightarrow \sqrt{xy} = C \Rightarrow y = \frac{C^2}{x}$$

Dakle, za $C \neq 0$ nivo-linije su hiperbole, a za $C = 0$ su pravci $x = 0$ i $y = 0$. Uočimo da za $C = 0$ zapravo dobivamo nultočke funkcije. Vidimo da ova funkcija ima neprebrojivo mnogo nultočaka i sve one leže na koordinatnim osima u ravnini.

Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrike

Otv. i zatv. skup

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parc. der. višeg reda

Diferencijabilnost

Usmjerena derivacija

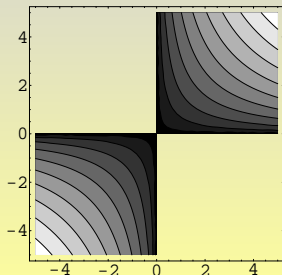
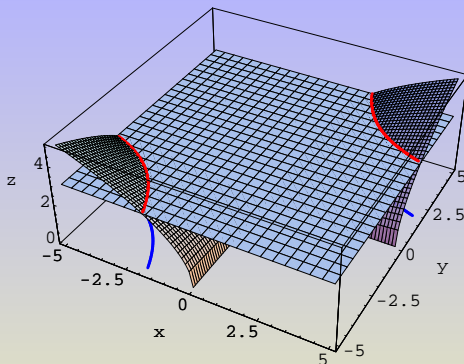
Tm. srednje vrijednosti

Parc. der. slož. funkc.

Implicitna funkcija

Ekstremi

Uvjetni ekstremi



Primjer 32.

Odredimo nivo-linije funkcije $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Rješenje

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrice

Otv. i zatv. skup

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parc. der. višeg reda

Diferencijabilnost

Usmjerena derivacija

Tm. srednje vrijednosti

Parc. der. slož. funkc.

Implicitna funkcija

Ekstremi

Uvjetni ekstremi



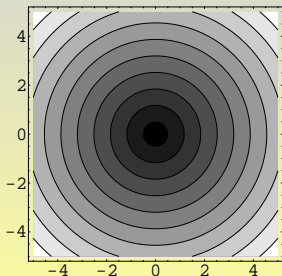
Primjer 32.

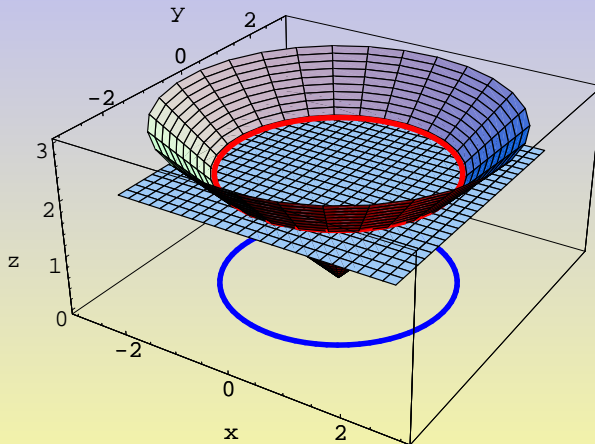
Odredimo nivo-linije funkcije $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Rješenje

$$f(x, y) = C \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = C \Rightarrow x^2 + y^2 = C^2$$

Dakle, za $C \neq 0$ nivo-linije su kružnice sa središtem u ishodištu, a za $C = 0$ samo točka $(0, 0)$. Dakle, ova funkcija ima samo jednu nultočku.





Neka je

$$f(x, y, z) = a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + a_4xy + a_5xz + a_6yz + a_7x + a_8y + a_9z + a_{10}$$

polinom 2. stupnja u tri varijable x, y, z , gdje su $a_i \in \mathbb{R}$,
za $i = 1, 2, \dots, 10$ i barem jedan od koeficijenata
 a_1, \dots, a_6 je različit od nule. Skup

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = 0\}$$

zovemo **algebarskom plohom 2. reda** ili **kvadrikom**.

Mogu nastupiti i degenerirani slučajevi, tj. rješenje
jednadžbe $f(x, y, z) = 0$ može biti prazan skup, točka,
ravnina i dvije ravnine.

Promotrimo sada nedegenerirane slučajeve. Nećemo
ulaziti u detalje klasifikacije preko invarijanata.

Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrike

Otv. i zatv. skup

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parc. der. višeg reda

Diferencijabilnost

Usmjerena derivacija

Tm. srednje vrijednosti

Parc. der. slož. funkc.

Implicitna funkcija

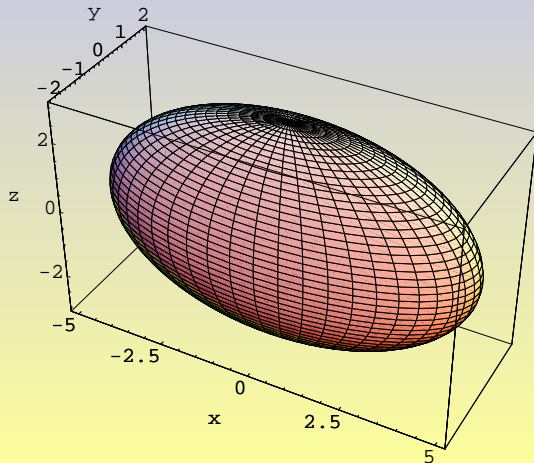
Ekstremi

Uvjetni ekstremi



Elipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrike

Otv. i zatv. skup

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parc. der. višeg reda

Diferencijabilnost

Usmjerena derivacija

Tm. srednje vrijednosti

Parc. der. slož. funkc.

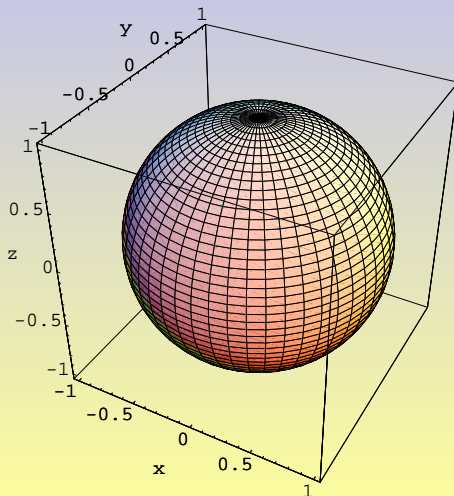
Implicitna funkcija

Ekstremi

Uvjetni ekstremi

Sfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$



Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrrike

Otv. i zatv. skup

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parc. der. višeg reda

Diferencijabilnost

Usmjerena derivacija

Tm. srednje vrijednosti

Parc. der. slož. funkc.

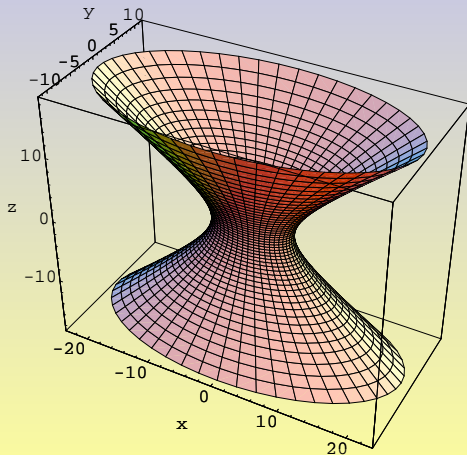
Implicitna funkcija

Ekstremi

Uvjetni ekstremi

Jednoplahi hiperboloid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrrike

Otv. i zatv. skup

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parc. der. višeg reda

Diferencijabilnost

Usmjerena derivacija

Tm. srednje vrijednosti

Parc. der. slož. funkc.

Implicitna funkcija

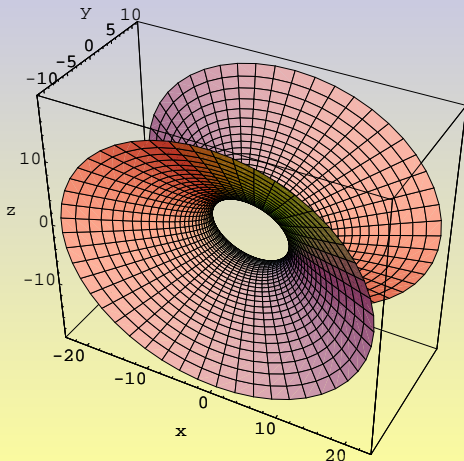
Ekstremi

Uvjetni ekstremi



Jednoplahi hiperboloid

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrrike

Otv. i zatv. skup

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parc. der. višeg reda

Diferencijabilnost

Usmjerena derivacija

Tm. srednje vrijednosti

Parc. der. slož. funkc.

Implicitna funkcija

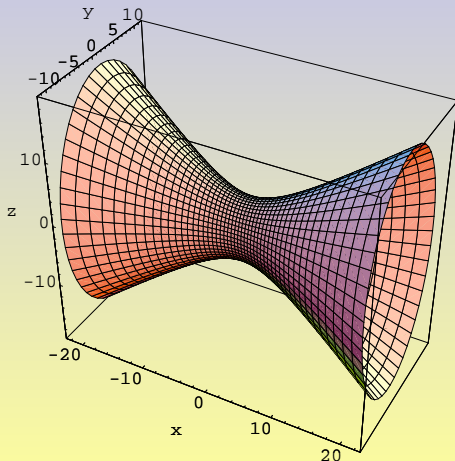
Ekstremi

Uvjetni ekstremi



Jednoplahi hiperboloid

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrrike

Otv. i zatv. skup

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parc. der. višeg reda

Diferencijabilnost

Usmjerena derivacija

Tm. srednje vrijednosti

Parc. der. slož. funkc.

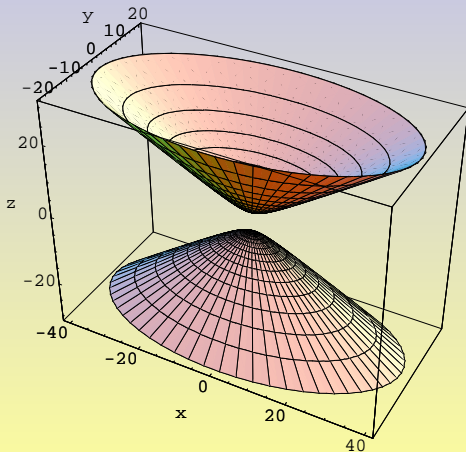
Implicitna funkcija

Ekstremi

Uvjetni ekstremi

Dvoplohi hiperboloid

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrrike

Otv. i zatv. skup

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parc. der. višeg reda

Diferencijabilnost

Usmjerena derivacija

Tm. srednje vrijednosti

Parc. der. slož. funkc.

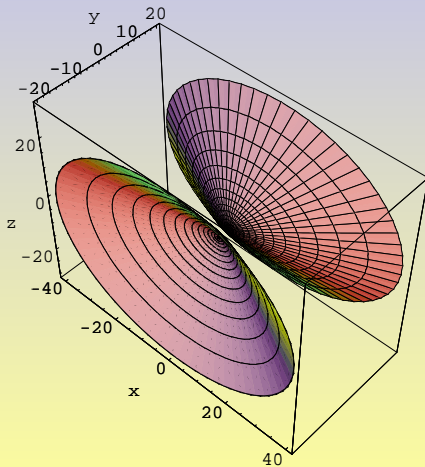
Implicitna funkcija

Ekstremi

Uvjetni ekstremi

Dvoplohi hiperboloid

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrrike

Otv. i zatv. skup

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parc. der. višeg reda

Diferencijabilnost

Usmjerena derivacija

Tm. srednje vrijednosti

Parc. der. slož. funkc.

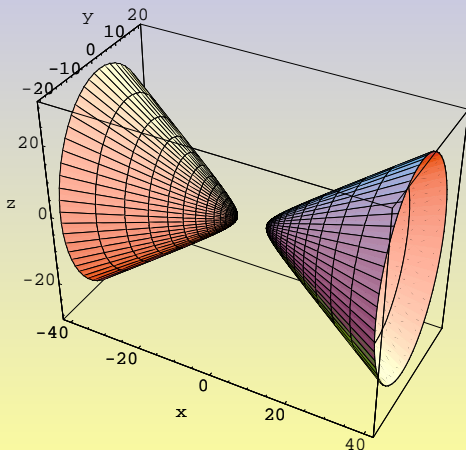
Implicitna funkcija

Ekstremi

Uvjetni ekstremi

Dvoplohi hiperboloid

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrrike

Otv. i zatv. skup

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parc. der. višeg reda

Diferencijabilnost

Usmjerena derivacija

Tm. srednje vrijednosti

Parc. der. slož. funkc.

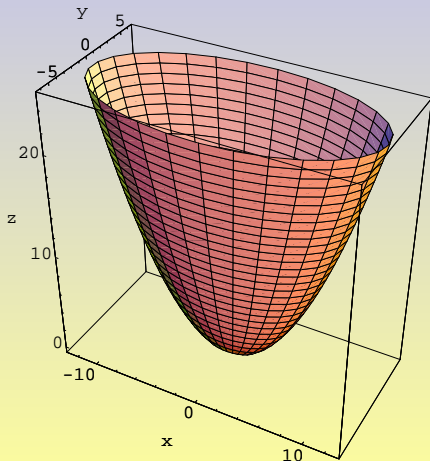
Implicitna funkcija

Ekstremi

Uvjetni ekstremi

Eliptički paraboloid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2pz$$



Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrrike

Otv. i zatv. skup

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parc. der. višeg reda

Diferencijabilnost

Usmjerena derivacija

Tm. srednje vrijednosti

Parc. der. slož. funkc.

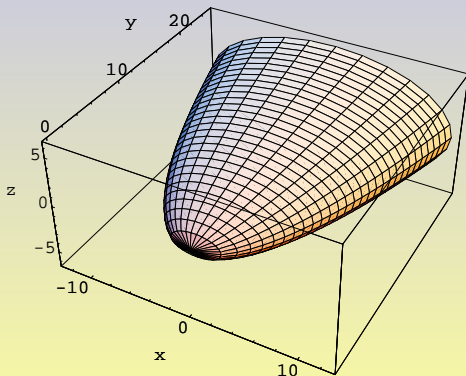
Implicitna funkcija

Ekstremi

Uvjetni ekstremi

Eliptički paraboloid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 2py$$



Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrrike

Otv. i zatv. skup

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parc. der. višeg reda

Diferencijabilnost

Usmjerena derivacija

Tm. srednje vrijednosti

Parc. der. slož. funkc.

Implicitna funkcija

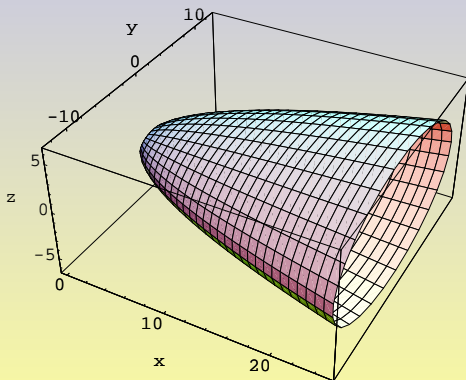
Ekstremi

Uvjetni ekstremi



Eliptički paraboloid

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 2px$$



Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrrike

Otv. i zatv. skup

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parc. der. višeg reda

Diferencijabilnost

Usmjerena derivacija

Tm. srednje vrijednosti

Parc. der. slož. funkc.

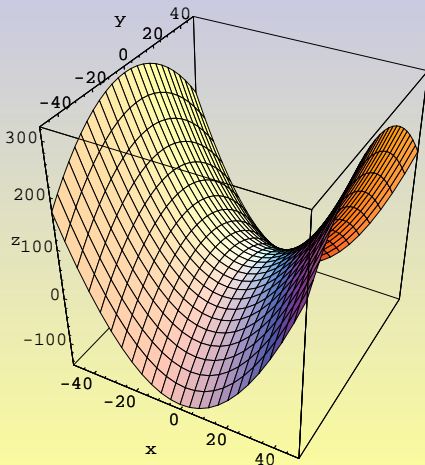
Implicitna funkcija

Ekstremi

Uvjetni ekstremi

Hiperbolički paraboloid

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2pz$$



Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrrike

Otv. i zatv. skup

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parc. der. višeg reda

Diferencijabilnost

Usmjerena derivacija

Tm. srednje vrijednosti

Parc. der. slož. funkc.

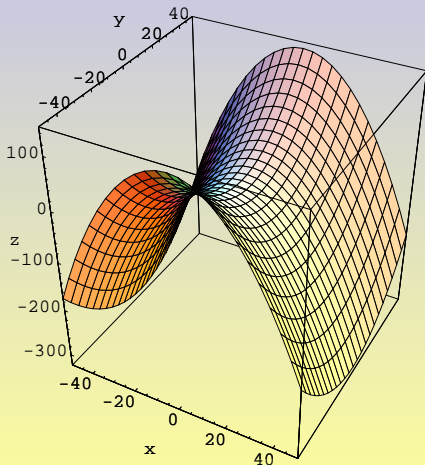
Implicitna funkcija

Ekstremi

Uvjetni ekstremi

Hiperbolički paraboloid

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2pz$$



Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrrike

Otv. i zatv. skup

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parc. der. višeg reda

Diferencijabilnost

Usmjerena derivacija

Tm. srednje vrijednosti

Parc. der. slož. funkc.

Implicitna funkcija

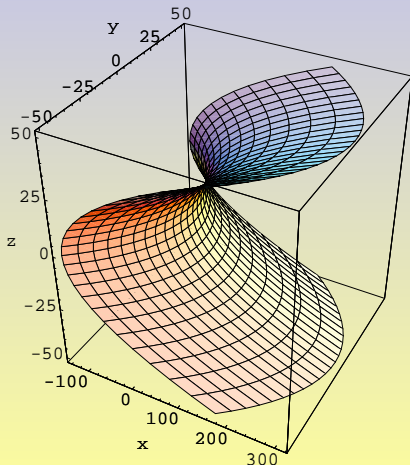
Ekstremi

Uvjetni ekstremi



Hiperbolički paraboloid

$$-\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 2px$$



Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrrike

Otv. i zatv. skup

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parc. der. višeg reda

Diferencijabilnost

Usmjerena derivacija

Tm. srednje vrijednosti

Parc. der. slož. funkc.

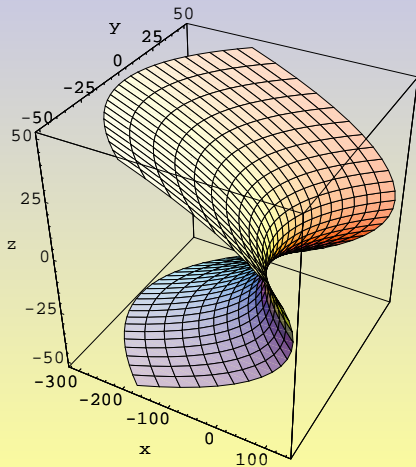
Implicitna funkcija

Ekstremi

Uvjetni ekstremi

Hiperbolički paraboloid

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 2px$$



Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrrike

Otv. i zatv. skup

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parc. der. višeg reda

Diferencijabilnost

Usmjerena derivacija

Tm. srednje vrijednosti

Parc. der. slož. funkc.

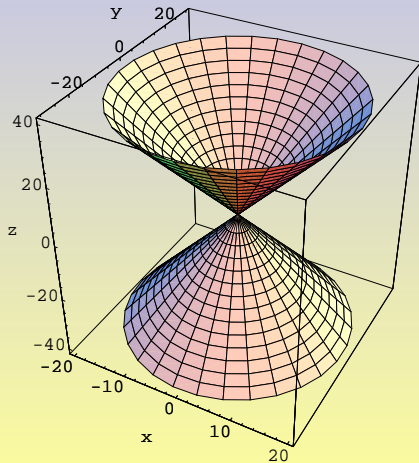
Implicitna funkcija

Ekstremi

Uvjetni ekstremi

Konus

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$



Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrrike

Otv. i zatv. skup

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parc. der. višeg reda

Diferencijabilnost

Usmjerena derivacija

Tm. srednje vrijednosti

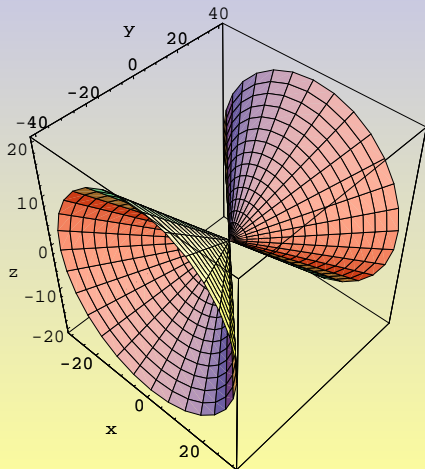
Parc. der. slož. funkc.

Implicitna funkcija

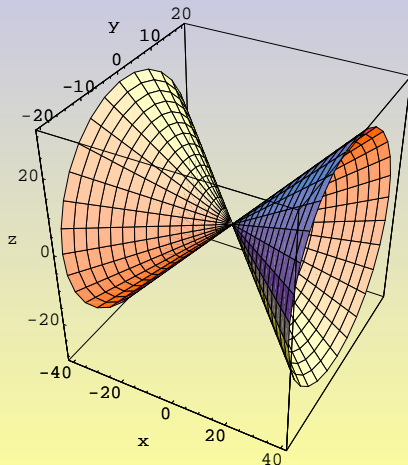
Ekstremi

Uvjetni ekstremi

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$

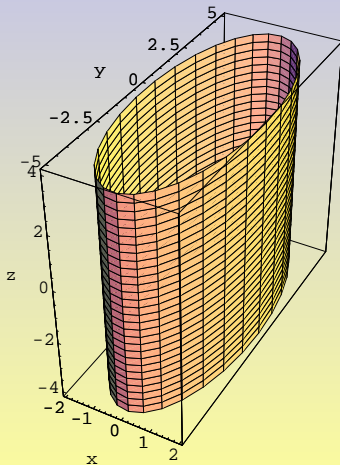


$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$



Eliptički cilindar

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrrike

Otv. i zatv. skup

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parc. der. višeg reda

Diferencijabilnost

Usmjerena derivacija

Tm. srednje vrijednosti

Parc. der. slož. funkc.

Implicitna funkcija

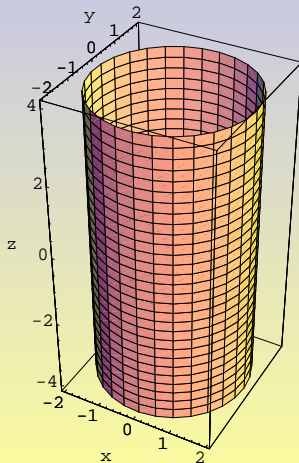
Ekstremi

Uvjetni ekstremi



Kružni cilindar

$$x^2 + y^2 = R^2$$



Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrrike

Otv. i zatv. skup

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parc. der. višeg reda

Diferencijabilnost

Usmjerena derivacija

Tm. srednje vrijednosti

Parc. der. slož. funkc.

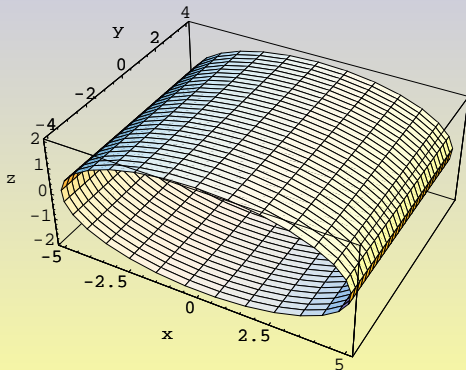
Implicitna funkcija

Ekstremi

Uvjetni ekstremi

Eliptički cilindar

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrrike

Otv. i zatv. skup

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parc. der. višeg reda

Diferencijabilnost

Usmjerena derivacija

Tm. srednje vrijednosti

Parc. der. slož. funkc.

Implicitna funkcija

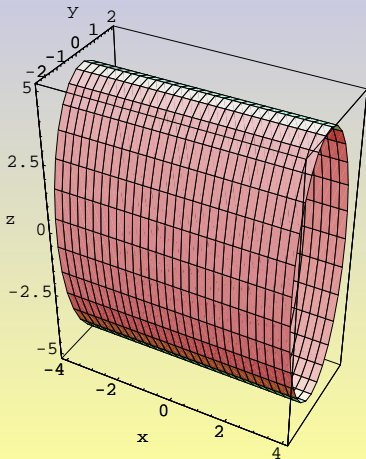
Ekstremi

Uvjetni ekstremi



Eliptički cilindar

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrrike

Otv. i zatv. skup

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parc. der. višeg reda

Diferencijabilnost

Usmjerena derivacija

Tm. srednje vrijednosti

Parc. der. slož. funkc.

Implicitna funkcija

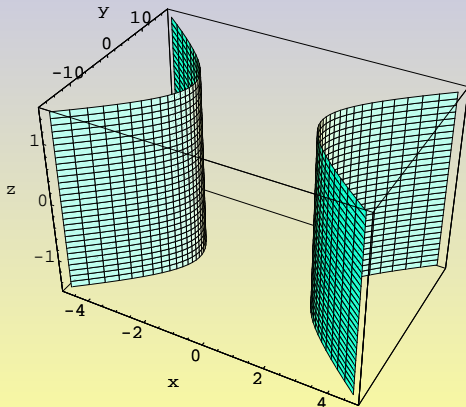
Ekstremi

Uvjetni ekstremi



Hiperbolički cilindar

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrrike

Otv. i zatv. skup

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parc. der. višeg reda

Diferencijabilnost

Usmjerena derivacija

Tm. srednje vrijednosti

Parc. der. slož. funkc.

Implicitna funkcija

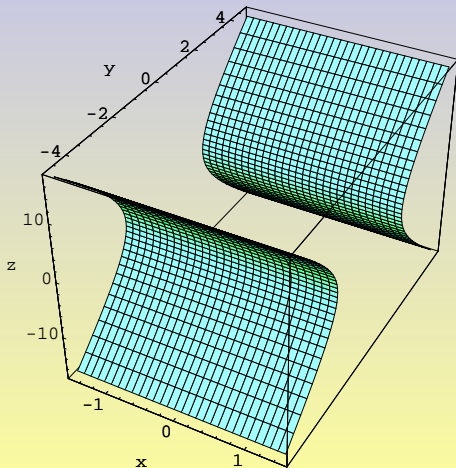
Ekstremi

Uvjetni ekstremi



Hiperbolički cilindar

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrrike

Otv. i zatv. skup

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parc. der. višeg reda

Diferencijabilnost

Usmjerena derivacija

Tm. srednje vrijednosti

Parc. der. slož. funkc.

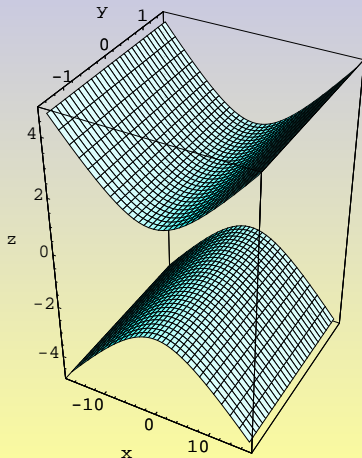
Implicitna funkcija

Ekstremi

Uvjetni ekstremi

Hiperbolički cilindar

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$



Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrice

Otv. i zatv. skup

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parc. der. višeg reda

Diferencijabilnost

Usmjerena derivacija

Tm. srednje vrijednosti

Parc. der. slož. funkc.

Implicitna funkcija

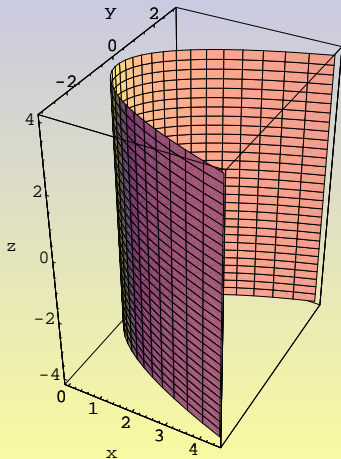
Ekstremi

Uvjetni ekstremi



Parabolički cilindar

$$y^2 = 2px$$



Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrrike

Otv. i zatv. skup

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parc. der. višeg reda

Diferencijabilnost

Usmjerena derivacija

Tm. srednje vrijednosti

Parc. der. slož. funkc.

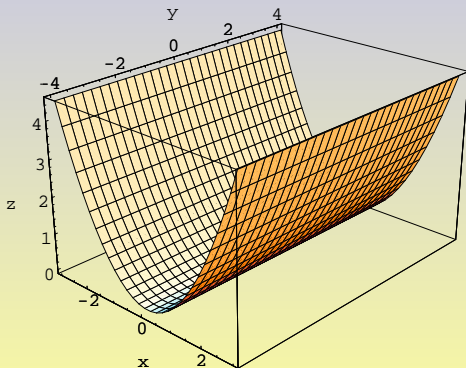
Implicitna funkcija

Ekstremi

Uvjetni ekstremi

Parabolički cilindar

$$x^2 = 2pz$$



Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrrike

Otv. i zatv. skup

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parc. der. višeg reda

Diferencijabilnost

Usmjerena derivacija

Tm. srednje vrijednosti

Parc. der. slož. funkc.

Implicitna funkcija

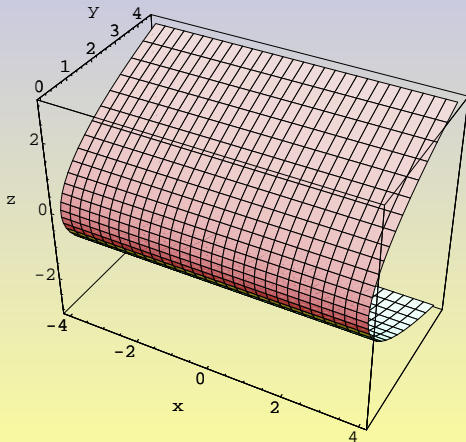
Ekstremi

Uvjetni ekstremi



Parabolički cilindar

$$z^2 = 2py$$



Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrice

Otv. i zatv. skup

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parc. der. višeg reda

Diferencijabilnost

Usmjerena derivacija

Tm. srednje vrijednosti

Parc. der. slož. funkc.

Implicitna funkcija

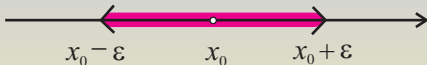
Ekstremi

Uvjetni ekstremi

Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini

ε -okolina točke $x_0 \in \mathbb{R}$ je skup $\langle x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon \rangle$

$$O(x_0, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \varepsilon\}$$



Sada ovu definiciju prenosimo na \mathbb{R}^2 . Naime, za $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ vrijedi

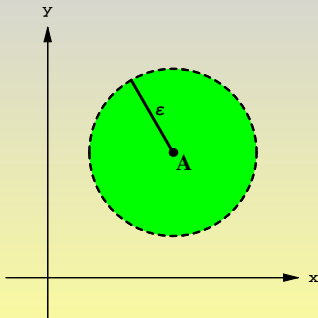
$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

pa imamo sljedeću definiciju.

ε -**okolina** točke $A \in \mathbb{R}^2$ je skup

$$O(A, \varepsilon) = \{B \in \mathbb{R}^2 : d(A, B) < \varepsilon\}.$$

ε -okolinu točke A zovemo još **ε -kugla** sa središtem u točki A polumjera ε . U slučaju prostora \mathbb{R}^3 to je stvarno kugla, a u \mathbb{R}^2 to je krug polumjera ε sa središtem u A bez rubne kružnice.



Kažemo da je $S \subseteq \mathbb{R}^2$ **otvoren skup** ako za svaku točku $A \in S$ postoji okolina $O(A, \varepsilon)$ koja je cijela sadržana u S .

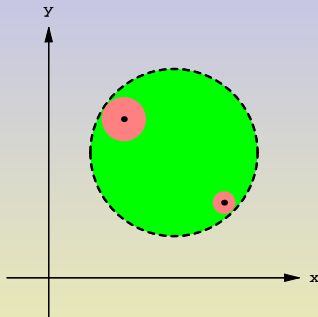
Kažemo da je $S \subseteq \mathbb{R}^2$ **zatvoren skup** ako je $\mathbb{R}^2 \setminus S$ otvoren skup.

Lema 2.

Skup $S \subseteq \mathbb{R}^2$ ($S \subseteq \mathbb{R}$) je otvoren akko je unija ε -kuglica.

Topologija ravnine je familija \mathcal{T} svih otvorenih skupova ravnine.

ε -kugle su otvoreni skupovi.



Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrice

Otv. i zatv. skup

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parc. der. višeg reda

Diferencijabilnost

Usmjerena derivacija

Tm. srednje vrijednosti

Parc. der. slož. funkc.

Implicitna funkcija

Ekstremi

Uvjetni ekstremi

Lema 3.

Topologija \mathcal{T} ravnine ima sljedeća svojstva:

- $\mathbb{R}^2, \emptyset \in \mathcal{T}$, tj. prazan skup i čitava ravnina su otvoreni skupovi.
- Ako su $U_1, U_2, \dots, U_\alpha, \dots \in \mathcal{T}$, tada je skup

$$\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$$

također element od \mathcal{T} . Drugim riječima, proizvoljna unija otvorenih skupova je otvoren skup.

- Ako su $U_1, U_2, \dots, U_n \in \mathcal{T}$, tada je skup

$$U_1 \cap U_2 \cdots \cap U_n$$

također element od \mathcal{T} . Drugim riječima, presjek konačno mnogo otvorenih skupova je otvoren skup.

Lema 4.

Familija \mathcal{F} svih zatvorenih skupova topologije \mathcal{T} ravnine ima sljedeća svojstva:

- $\mathbb{R}^2, \emptyset \in \mathcal{F}$, tj. *prazan skup i čitava ravnina su zatvoreni skupovi.*
- *Ako su $F_1, F_2, \dots, F_n \in \mathcal{F}$, tada je skup*

$$U_1 \cup U_2 \cdots \cup U_n$$

također element od \mathcal{F} . Drugim riječima, konačna unija zatvorenih skupova je zatvoren skup.

- *Ako su $F_1, F_2, \dots, F_\alpha, \dots \in \mathcal{F}$, tada je skup*

$$\bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha$$

također element od \mathcal{F} . Drugim riječima, proizvoljan presjek zatvorenih skupova je zatvoren skup.

Neka je $S \subseteq \mathbb{R}^2$. **Interior (nutrina)** skupa S je najveći otvoreni skup koji je sadržan u S . Interior skupa S označavamo s **$\text{Int } S$** .

Rub skupa S je skup svih točaka iz \mathbb{R}^2 čija svaka okolina siječe S i $\mathbb{R}^2 \setminus S$. Rub skupa S označavamo s **∂S** .

Zatvarač skupa S je skup **$\text{Cl } S = \text{Int } S \cup \partial S$** .

Lema 5.

Skup $S \subseteq \mathbb{R}^2$ je otvoren akko $\text{Int } S = S$.

Lema 6.

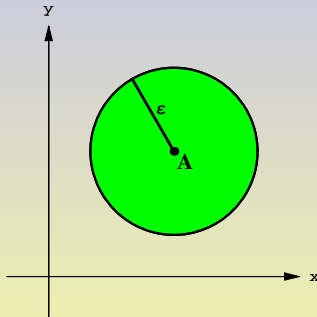
Skup $S \subseteq \mathbb{R}^2$ je zatvoren akko $\text{Cl } S = S$.

Lema 7.

∂S je zatvoren skup.

Zatvorena ε -kugla je

$$\text{Cl}(O(A, \varepsilon)) = O(A, \varepsilon) \cup \partial(O(A, \varepsilon))$$

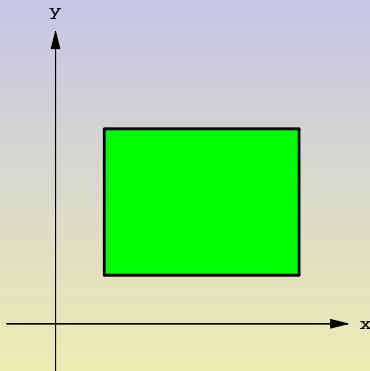


Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrrike

Otv. i zatv. skup

Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parc. der. višeg reda
Diferencijabilnost
Usmjerena derivacija
Tm. srednje vrijednosti
Parc. der. slož. funkc.
Implicitna funkcija
Ekstremi
Uvjetni ekstremi

Pravokutnik je zatvoren skup.

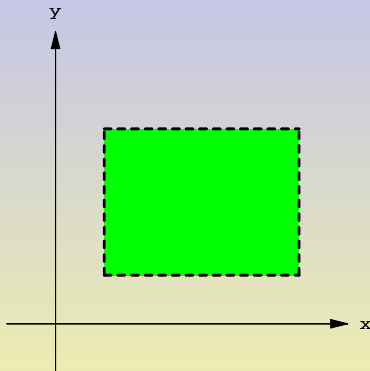


Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrrike

Otv. i zatv. skup

Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parc. der. višeg reda
Diferencijabilnost
Usmjerena derivacija
Tm. srednje vrijednosti
Parc. der. slož. funkc.
Implicitna funkcija
Ekstremi
Uvjetni ekstremi

Pravokutnik bez svog ruba je otvoren skup.



Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrrike

Otv. i zatv. skup

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parc. der. višeg reda

Diferencijabilnost

Usmjerena derivacija

Tm. srednje vrijednosti

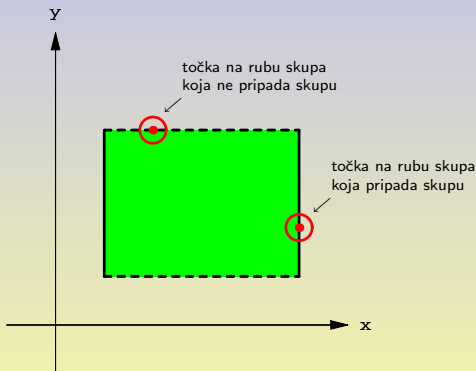
Parc. der. slož. funkc.

Implicitna funkcija

Ekstremi

Uvjetni ekstremi

Primjer skupa koji nije niti otvoren niti zatvoren.



Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrrike

Otv. i zatv. skup

Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parc. der. višeg reda
Diferencijabilnost
Usmjerena derivacija
Tm. srednje vrijednosti
Parc. der. slož. funkc.
Implicitna funkcija
Ekstremi
Uvjetni ekstremi

U \mathbb{R} otvoreni skupovi su zapravo otvoreni intervali ili unije otvorenih intervala, a zatvoreni skupovi su segmenti ili konačne unije segmenata.

Zadatak 17.

Nađite primjer u kojem beskonačna unija segmenata nije zatvoren skup.

Zadatak 18.

Nađite primjer u kojem beskonačan presjek intervala nije otvoren skup.

Skupovi oblika $\langle a, b \rangle$ i $[a, b)$ nisu niti otvoreni niti zatvoreni u \mathbb{R} . Zašto?

Kao što smo vidjeli, u \mathbb{R}^2 ima puno više različitih primjera otvorenih i zatvorenih skupova.

Napomena.

Neka je $I = \langle a, b \rangle$. Promatramo li I kao podskup skupa \mathbb{R} , tada je

$$\text{Int } I = \langle a, b \rangle, \quad \partial I = \{a, b\}, \quad \text{Cl } I = [a, b].$$

Promatramo li I kao podskup od \mathbb{R}^2 uz standardnu identifikaciju

$$\mathbb{R} = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\},$$

tada je

$$\text{Int } I = \emptyset, \quad \partial I = [a, b], \quad \text{Cl } I = [a, b].$$

Napomena.

Neka je X proizvoljan skup. Svaku familiju \mathcal{T} podskupova skupa X koja ima svojstva

- $X, \emptyset \in \mathcal{T}$,
- Ako su $U_1, U_2, \dots, U_\alpha, \dots \in \mathcal{T}$, tada je skup

$$\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$$

također element od \mathcal{T} .

- Ako su $U_1, U_2, \dots, U_n \in \mathcal{T}$, tada je skup

$$U_1 \cap U_2 \cdots \cap U_n$$

također element od \mathcal{T} .

zovemo **topologija** na skupu X , a uređen par (X, \mathcal{T}) **topološki prostor**. Elemente skupa \mathcal{T} zovemo otvorenim skupovima.

Napomena.

Na istom skupu X možemo imati više različitih topologija.

Omeđen i zatvoren skup u \mathbb{R}^2 (i općenito u \mathbb{R}^n) zovemo **kompaktan skup**.

Primjer 33.

Kružnica, dužina, krug, pravokutnik su primjeri kompaktnih skupova u ravnini.

Primjer 34.

Pravac, otvorena ε -kugla, pravokutnik bez svog ruba, pravokutnik koji sadrži samo dio svog ruba su primjeri skupova u ravnini koji nisu kompaktni. Objasnite zašto!

Napomena.

Pojam kompaktnog skupa se može općenito definirati u bilo kojem topološkom prostoru. Može se pokazati da je ta definicija ekvivalentna s našom definicijom za prostor \mathbb{R}^n . Općenito, nije istina da je skup kompaktan akko je omeđen i zatvoren. To vrijedi za \mathbb{R}^n uz standardnu topologiju, ali ne vrijedi općenito za bilo koji topološki prostor.

Limes funkcije više varijabli

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Heineova definicija

Neka je $f : O \rightarrow \mathbb{R}$ realna funkcija definirana na otvorenom skupu $O \subseteq \mathbb{R}^2$ osim možda u $P \in O$. Kažemo da je $L \in \mathbb{R}$ limes funkcije f u točki $P \in O$ ako za svaki niz $(P_n)_n$ u O za koji je $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P$ vrijedi da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(P_n) = L.$$

Cauchyeva definicija

Neka je $f : O \rightarrow \mathbb{R}$ realna funkcija definirana na otvorenom skupu $O \subseteq \mathbb{R}^2$. Kažemo da je $L \in \mathbb{R}$ limes funkcije f u točki $P \in O$ ako za svaku okolinu V točke $L \in \mathbb{R}$ postoji okolina U točke P takva da je $f(Q) \in V$ za svaku točku $Q \in U \setminus \{P\}$.

Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrike

Otv. i zatv. skup

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parc. der. višeg reda

Diferencijabilnost

Usmjerena derivacija

Tm. srednje vrijednosti

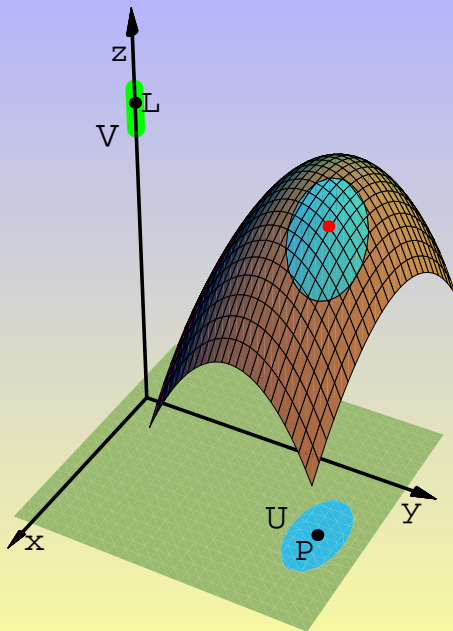
Parc. der. slož. funkc.

Implicitna funkcija

Ekstremi

Uvjetni ekstremi





Matematičke metode za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrice

Otv. i zatv. skup

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parc. der. višeg reda

Diferencijabilnost

Usmjerena derivacija

Tm. srednje vrijednosti

Parc. der. slož. funkc.

Implicitna funkcija

Ekstremi

Uvjetni ekstremi

Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrice

Otv. i zatv. skup

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parc. der. višeg reda

Diferencijabilnost

Usmjerena derivacija

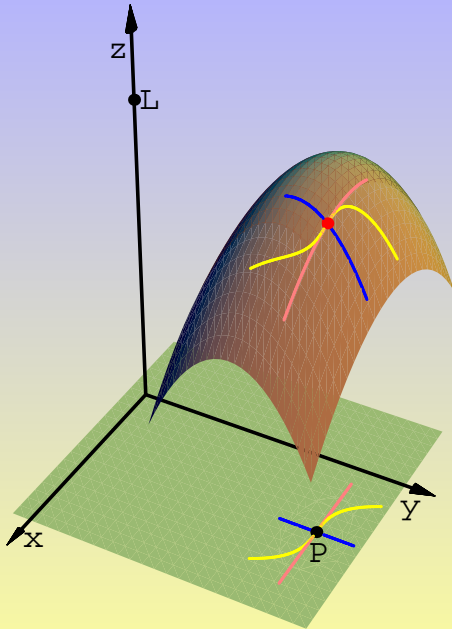
Tm. srednje vrijednosti

Parc. der. slož. funkc.

Implicitna funkcija

Ekstremi

Uvjetni ekstremi



U ε, δ terminologiji Cauchyjeva definicija limesa funkcije glasi:

Neka je $f : O \rightarrow \mathbb{R}$ realna funkcija definirana na otvorenom skupu $O \subseteq \mathbb{R}^2$. Kažemo da je $L \in \mathbb{R}$ limes funkcije f u točki $P \in O$ ako

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall Q (0 < d(Q, P) < \delta \Rightarrow |f(Q) - L| < \varepsilon)$$

Pišemo $\lim_{Q \rightarrow P} f(Q) = L$.

Lema 8.

Heineova i Cauchyeva definicija limesa funkcije su ekvivalentne.

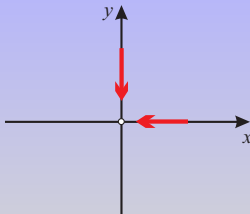
Napomena.

Heineova definicija limesa funkcije se temelji na nizovima, a Cauchyeva na okolinama. Prema Heineovoj definiciji limes funkcije ne ovisi o tome kako se približavamo određenoj točki. Stoga, ako želimo dokazati da funkcija nema limes u nekoj točki, dovoljno je da nađemo dva niza koji konvergiraju toj točki, dok njihove funkcijske vrijednosti ne konvergiraju k istom broju.

Primjer 35.

Odredite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{x^2+y^2}.$

Rješenje



Uzmimo $x = 0$. Tada je

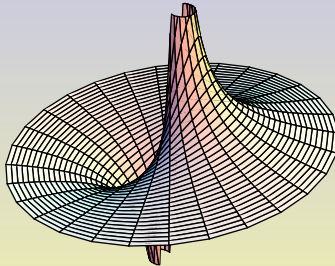
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{x^2 + y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y^2} = 0.$$

Ako stavimo $y = 0$, tada dobivamo

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2} = \pm\infty.$$

Zaključujemo da ne postoji $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{x^2 + y^2}.$

Graf funkcije $f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$ izgleda



Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrice

Otv. i zatv. skup

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parc. der. višeg reda

Diferencijabilnost

Usmjerena derivacija

Tm. srednje vrijednosti

Parc. der. slož. funkc.

Implicitna funkcija

Ekstremi

Uvjetni ekstremi



Primjer 36.

Odredite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy+y^3}{x^2+y^2}.$

Rješenje

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrike

Otv. i zatv. skup

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parc. der. višeg reda

Diferencijabilnost

Usmjerena derivacija

Tm. srednje vrijednosti

Parc. der. slož. funkc.

Implicitna funkcija

Ekstremi

Uvjetni ekstremi



Primjer 36.

Odredite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy+y^3}{x^2+y^2}$.

Rješenje

Stavimo li $x = 0$ dobivamo

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy + y^3}{x^2 + y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^3}{y^2} = 0.$$

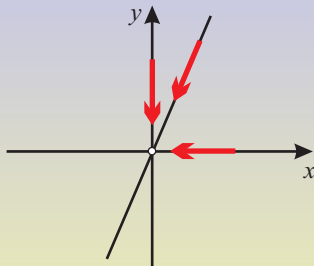
Stavimo li $y = 0$ dobivamo

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy + y^3}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x^2} = 0.$$

Stavimo li $y = 2x$ dobivamo

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy + y^3}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + 8x^3}{x^2 + 4x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x + 2}{5} = \frac{2}{5}.$$

Zaključujemo da ne postoji $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy+y^3}{x^2+y^2}$.



Graf funkcije $f(x, y) = \frac{xy+y^3}{x^2+y^2}$ izgleda

Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrice

Otv. i zatv. skup

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parc. der. višeg reda

Diferencijabilnost

Usmjerena derivacija

Tm. srednje vrijednosti

Parc. der. slož. funkc.

Implicitna funkcija

Ekstremi

Uvjetni ekstremi



Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrice

Otv. i zatv. skup

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parc. der. višeg reda

Diferencijabilnost

Usmjerena derivacija

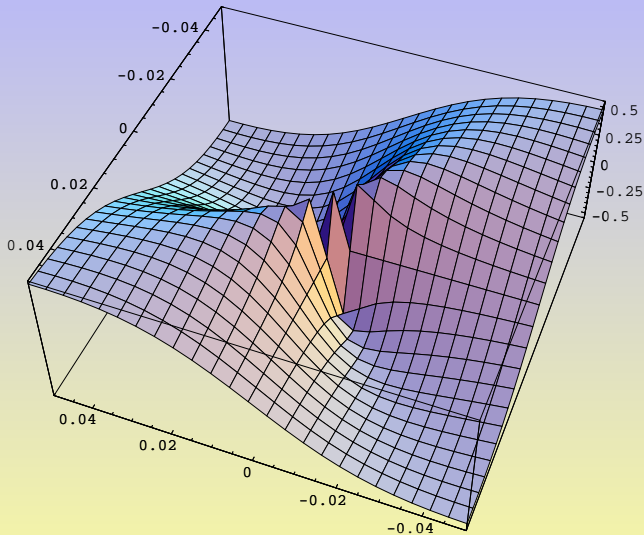
Tm. srednje vrijednosti

Parc. der. slož. funkc.

Implicitna funkcija

Ekstremi

Uvjetni ekstremi



Propozicija 57.

Neka su $f, g : O \rightarrow \mathbb{R}$ realne funkcije definirane na otvorenom skupu $O \subseteq \mathbb{R}^2$ i neka je $\lambda \in \mathbb{R}$. Ako funkcije f i g imaju u $P_0 \in O$ limese, tada i funkcije $f + g$, λf , $f \cdot g$ i $|f|$ imaju limese u P_0 i vrijedi

$$\bullet \lim_{P \rightarrow P_0} (f(P) + g(P)) = \lim_{P \rightarrow P_0} f(P) + \lim_{P \rightarrow P_0} g(P)$$

$$\bullet \lim_{P \rightarrow P_0} (\lambda f(P)) = \lambda \lim_{P \rightarrow P_0} f(P)$$

$$\bullet \lim_{P \rightarrow P_0} (f(P) \cdot g(P)) = \lim_{P \rightarrow P_0} f(P) \cdot \lim_{P \rightarrow P_0} g(P)$$

$$\bullet \lim_{P \rightarrow P_0} |f(P)| = \left| \lim_{P \rightarrow P_0} f(P) \right|$$

Ako je $\lim_{P \rightarrow P_0} g(P) \neq 0$, tada je

$$\bullet \lim_{P \rightarrow P_0} \frac{f(P)}{g(P)} = \frac{\lim_{P \rightarrow P_0} f(P)}{\lim_{P \rightarrow P_0} g(P)}$$

Primjer 37.

Odredite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,3)} \frac{\sin xy}{2x}$.

Rješenje

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrike

Otv. i zatv. skup

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parc. der. višeg reda

Diferencijabilnost

Usmjerena derivacija

Tm. srednje vrijednosti

Parc. der. slož. funkc.

Implicitna funkcija

Ekstremi

Uvjetni ekstremi



Primjer 37.

Odredite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,3)} \frac{\sin xy}{2x}$.

Rješenje

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,3)} \frac{\sin xy}{2x} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,3)} \left(\frac{\sin xy}{xy} \cdot \frac{y}{2} \right) = 1 \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2}.$$

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrike

Otv. i zatv. skup

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parc. der. višeg reda

Diferencijabilnost

Usmjerena derivacija

Tm. srednje vrijednosti

Parc. der. slož. funkc.

Implicitna funkcija

Ekstremi

Uvjetni ekstremi



Primjer 37.

Odredite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,3)} \frac{\sin xy}{2x}$.

Rješenje

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,3)} \frac{\sin xy}{2x} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,3)} \left(\frac{\sin xy}{xy} \cdot \frac{y}{2} \right) = 1 \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2}.$$

Napomena.

Mogu se promatrati uzastopni limesi

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y), \quad \lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$$

i svaki od njih se sastoji od dva limesa funkcije jedne varijable i općenito su ti limesi međusobno različiti i razlikuju se od limesa

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y).$$

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrike

Otv. i zatv. skup

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parc. der. višeg reda

Diferencijabilnost

Usmjerena derivacija

Tm. srednje vrijednosti

Parc. der. slož. funkc.

Implicitna funkcija

Ekstremi

Uvjetni ekstremi



Zadatak 19.

Neka je $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}.$$

Dokažite da ne postoji $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ iako je

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = 0.$$

Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrrike

Otv. i zatv. skup

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parc. der. višeg reda

Diferencijabilnost

Usmjerena derivacija

Tm. srednje vrijednosti

Parc. der. slož. funkc.

Implicitna funkcija

Ekstremi

Uvjetni ekstremi



Neprekidne funkcije

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrike

Otv. i zatv. skup

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parc. der. višeg reda

Diferencijabilnost

Usmjerena derivacija

Tm. srednje vrijednosti

Parc. der. slož. funkc.

Implicitna funkcija

Ekstremi

Uvjetni ekstremi

Neka je $f : O \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija definirana na otvorenom skupu $O \subseteq \mathbb{R}^2$ i neka je $P \in O$. Kažemo da je f neprekidna u točki P ako je $\lim_{Q \rightarrow P} f(Q) = f(P)$.

f je neprekidna ako je neprekidna u svakoj točki $P \in O$.

Napomena.

Da bismo mogli govoriti o neprekidnosti funkcije u nekoj točki, ta funkcija mora biti definirana u toj točki.

Primjer 38.

Funkcija $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ je neprekidna na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

O neprekidnosti te funkcije u $(0, 0)$ nema smisla govoriti jer u toj točki funkcija f nije definirana.



Primjer 39.

Neka je $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definirana s

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Ova funkcija ima prekid u točki $(0, 0)$ zato jer je

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y) \neq g(0, 0).$$

Štoviše, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y)$ ne postoji, pa kako god da

dodefiniramo funkciju g u $(0, 0)$, ona će uvijek imati prekid u toj točki.

Propozicija 58.

Neka su $f, g : O \rightarrow \mathbb{R}$ realne funkcije definirane na otvorenom skupu $O \subseteq \mathbb{R}^2$ i neka je $\lambda \in \mathbb{R}$. Ako su funkcije f i g neprekidne u $P_0 \in O$, tada su i funkcije $f + g$, λf , $f \cdot g$ i $|f|$ neprekidne u P_0 . Ako je $g(P_0) \neq 0$, onda je i funkcija $\frac{f}{g}$ neprekidna u P_0 .

Propozicija 59.

Kompozicija neprekidnih funkcija je neprekidna funkcija.

Parcijalne derivacije

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Neka je $z = f(x, y)$ realna funkcija dvije varijable i neka je (x_0, y_0) točka iz unutrašnjosti domene funkcije f .

Postavimo li točkom (x_0, y_0) ravninu $y = y_0$, onda ta ravnina siječe graf te funkcije po nekoj krivulji. Na tu krivulju možemo gledati kao na graf funkcije jedne varijable

$$f_1(x) = f(x, y_0).$$

Derivaciju funkcije f_1 zovemo parcijalna derivacija funkcije f po varijabli x .

Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrice

Otv. i zatv. skup

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parc. der. višeg reda

Diferencijabilnost

Usmjerena derivacija

Tm. srednje vrijednosti

Parc. der. slož. funkc.

Implicitna funkcija

Ekstremi

Uvjetni ekstremi



Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrice

Otv. i zatv. skup

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parc. der. višeg reda

Diferencijabilnost

Usmjerena derivacija

Tm. srednje vrijednosti

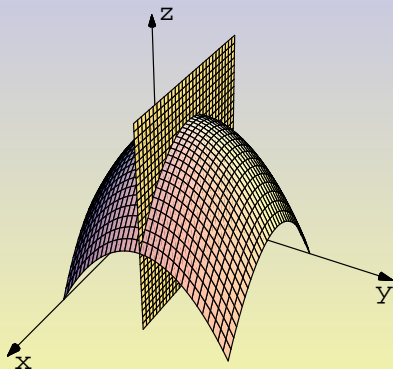
Parc. der. slož. funkc.

Implicitna funkcija

Ekstremi

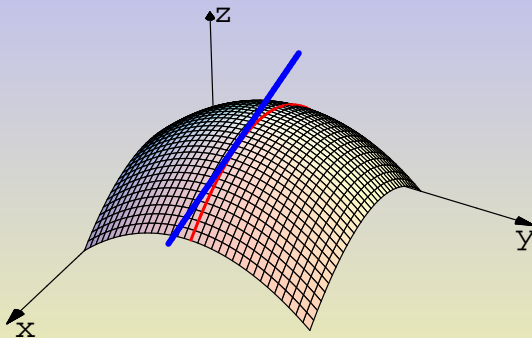
Uvjetni ekstremi

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$



Druge oznake: $f_x(x_0, y_0)$, $D_x f(x_0, y_0)$, $f'_x(x_0, y_0)$.

Geometrijska interpretacija



Parcijalna derivacija po varijabli x funkcije f u točki (x_0, y_0) je koeficijent smjera tangente na graf funkcije $f_1(x) = f(x, y_0)$ u točki (x_0) .

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrice

Otv. i zatv. skup

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parc. der. višeg reda

Diferencijabilnost

Usmjerena derivacija

Tm. srednje vrijednosti

Parc. der. slož. funkc.

Implicitna funkcija

Ekstremi

Uvjetni ekstremi



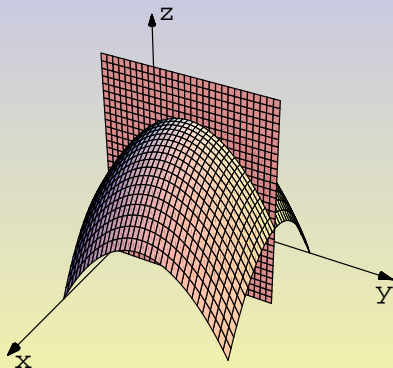
Neka je $z = f(x, y)$ realna funkcija dvije varijable i neka je (x_0, y_0) točka iz unutrašnjosti domene funkcije f .

Postavimo li točkom (x_0, y_0) ravninu $x = x_0$, onda ta ravnina siječe graf te funkcije po nekoj krivulji. Na tu krivulju možemo gledati kao na graf funkcije jedne varijable

$$f_2(y) = f(x_0, y).$$

Derivaciju funkcije f_2 zovemo parcijalna derivacija funkcije f po varijabli y .

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$



Druge oznake: $f_y(x_0, y_0)$, $D_y f(x_0, y_0)$, $f'_y(x_0, y_0)$.

Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrrike

Otv. i zatv. skup

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parc. der. višeg reda

Diferencijabilnost

Usmjerena derivacija

Tm. srednje vrijednosti

Parc. der. slož. funkc.

Implicitna funkcija

Ekstremi

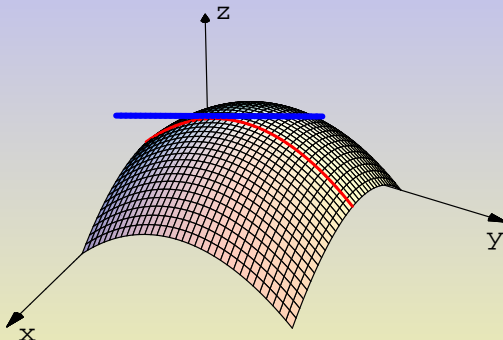
Uvjetni ekstremi



Geometrijska interpretacija

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat



Parcijalna derivacija po varijabli y funkcije f u točki (x_0, y_0) je koeficijent smjera tangente na graf funkcije $f_2(y) = f(x_0, y)$ u točki y_0 .

Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrrike

Otv. i zatv. skup

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parc. der. višeg reda

Diferencijabilnost

Usmjerena derivacija

Tm. srednje vrijednosti

Parc. der. slož. funkc.

Implicitna funkcija

Ekstremi

Uvjetni ekstremi

Kako su parcijalne derivacije zapravo obične derivacije funkcija jedne varijable za njih vrijede ista pravila deriviranja koja vrijede i za funkcije jedne varijable.

$$\frac{\partial}{\partial x}(u + v) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(u + v) = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(u - v) = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(u - v) = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y}$$

Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrike

Otv. i zatv. skup

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parc. der. višeg reda

Diferencijabilnost

Usmjerena derivacija

Tm. srednje vrijednosti

Parc. der. slož. funkc.

Implicitna funkcija

Ekstremi

Uvjetni ekstremi

$$\frac{\partial}{\partial x}(uv) = \frac{\partial u}{\partial x}v + u\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(uv) = \frac{\partial u}{\partial y}v + u\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}v - u\frac{\partial v}{\partial x}}{v^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}v - u\frac{\partial v}{\partial y}}{v^2}$$

Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrake

Otv. i zatv. skup

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parc. der. višeg reda

Diferencijabilnost

Usmjerena derivacija

Tm. srednje vrijednosti

Parc. der. slož. funkc.

Implicitna funkcija

Ekstremi

Uvjetni ekstremi



Primjer 40.

Odredite parcijalne derivacije funkcije

$$f(x, y) = x^2y - x \sin y.$$

Rješenje

Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrike

Otv. i zatv. skup

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parc. der. višeg reda

Diferencijabilnost

Usmjerena derivacija

Tm. srednje vrijednosti

Parc. der. slož. funkc.

Implicitna funkcija

Ekstremi

Uvjetni ekstremi

Primjer 40.

Odredite parcijalne derivacije funkcije

$$f(x, y) = x^2y - x \sin y.$$

Rješenje

$$f_x(x, y) = 2xy - \sin y, \quad f_y(x, y) = x^2 - x \cos y.$$

Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrake

Otv. i zatv. skup

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parc. der. višeg reda

Diferencijabilnost

Usmjerena derivacija

Tm. srednje vrijednosti

Parc. der. slož. funkc.

Implicitna funkcija

Ekstremi

Uvjetni ekstremi

Primjer 40.

Odredite parcijalne derivacije funkcije

$$f(x, y) = x^2y - x \sin y.$$

Rješenje

$$f_x(x, y) = 2xy - \sin y, \quad f_y(x, y) = x^2 - x \cos y.$$

Zadatak 20.

Odredite parcijalne derivacije sljedećih funkcija:

- $f(x, y) = \operatorname{tg} x - y^2 - xy^2 + 6y,$
- $g(x, y) = \ln \frac{x}{y} - 3xy^3 + 2x^4,$
- $h(x, y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2} - \ln(x^2 + y^2).$

Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrike

Otv. i zatv. skup

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parc. der. višeg reda

Diferencijabilnost

Usmjerena derivacija

Tm. srednje vrijednosti

Parc. der. slož. funkc.

Implicitna funkcija

Ekstremi

Uvjetni ekstremi

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y, z) - f(x, y, z)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z)}{\Delta z}$$



Primjer 41.

Odredite parcijalne derivacije funkcije $f(x, y, z) = xy^2z^3$.

Rješenje

Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrike

Otv. i zatv. skup

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parc. der. višeg reda

Diferencijabilnost

Usmjerena derivacija

Tm. srednje vrijednosti

Parc. der. slož. funkc.

Implicitna funkcija

Ekstremi

Uvjetni ekstremi

Primjer 41.

Odredite parcijalne derivacije funkcije $f(x, y, z) = xy^2z^3$.

Rješenje

$$f_x(x, y, z) = y^2z^3, \quad f_y(x, y, z) = 2xyz^3,$$

$$f_z(x, y, z) = 3xy^2z^2$$

Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrike

Otv. i zatv. skup

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parc. der. višeg reda

Diferencijabilnost

Usmjerena derivacija

Tm. srednje vrijednosti

Parc. der. slož. funkc.

Implicitna funkcija

Ekstremi

Uvjetni ekstremi

Primjer 41.

Odredite parcijalne derivacije funkcije $f(x, y, z) = xy^2z^3$.

Rješenje

$$f_x(x, y, z) = y^2z^3, \quad f_y(x, y, z) = 2xyz^3,$$

$$f_z(x, y, z) = 3xy^2z^2$$

Za funkciju $f : O \rightarrow \mathbb{R}$ definiranu na otvorenom skupu $O \subseteq \mathbb{R}^2$ kažemo da je **derivabilna** u točki $(x_0, y_0) \in O$ ako postoje parcijalne derivacije te funkcije u toj točki. f je derivabilna na O ako je derivabilna u svakoj točki iz O .

Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrice

Otv. i zatv. skup

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parc. der. višeg reda

Diferencijabilnost

Usmjerena derivacija

Tm. srednje vrijednosti

Parc. der. slož. funkc.

Implicitna funkcija

Ekstremi

Uvjetni ekstremi

Parcijalne derivacije višeg reda

$z = z(x, y)$ realna funkcija dvije varijable

Parcijalne derivacije drugog reda funkcije z su

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)$$

Druge oznake: $z_{xx}, z_{yy}, z_{xy}, z_{yx}$

Općenito se parcijalne derivacije n -tog reda dobivaju iz parcijalnih derivacija $n - 1$ reda primjenom operatora

$$\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}.$$

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrrike

Otv. i zatv. skup

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parc. der. višeg reda

Diferencijabilnost

Usmjerena derivacija

Tm. srednje vrijednosti

Parc. der. slož. funkc.

Implicitna funkcija

Ekstremi

Uvjetni ekstremi



Parcijalne derivacije trećeg reda

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \right)$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \right)$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)$$

Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrrike

Otv. i zatv. skup

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parc. der. višeg reda

Diferencijabilnost

Usmjerena derivacija

Tm. srednje vrijednosti

Parc. der. slož. funkc.

Implicitna funkcija

Ekstremi

Uvjetni ekstremi

Primjer 42.

Odredite parcijalne derivacije drugog reda funkcije

$$f(x, y) = \sin(x^2 y).$$

Rješenje

Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrike

Otv. i zatv. skup

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parc. der. višeg reda

Diferencijabilnost

Usmjerena derivacija

Tm. srednje vrijednosti

Parc. der. slož. funkc.

Implicitna funkcija

Ekstremi

Uvjetni ekstremi

Primjer 42.

Odredite parcijalne derivacije drugog reda funkcije

$$f(x, y) = \sin(x^2 y).$$

Rješenje

$$f_x(x, y) = 2xy \cos(x^2 y), \quad f_y(x, y) = x^2 \cos(x^2 y)$$

$$f_{xx}(x, y) = 2y \cos(x^2 y) - 4x^2 y^2 \sin(x^2 y)$$

$$f_{xy}(x, y) = 2x \cos(x^2 y) - 2x^3 y \sin(x^2 y)$$

$$f_{yx}(x, y) = 2x \cos(x^2 y) - 2x^3 y \sin(x^2 y)$$

$$f_{yy}(x, y) = -x^4 \sin(x^2 y)$$



Teorem 42 (Schwarzov teorem).

Neka je $z = f(x, y)$ funkcija dvije varijable koja u nekoj točki (x_0, y_0) i u nekoj njezinoj okolini O ima derivacije z_x i z_y . Ako na skupu O postoji i neprekidna je jedna od mješovitih parcijalnih derivacija, npr. z_{xy} , tada postoje u točki (x_0, y_0) obje mješovite parcijalne derivacije i jednake su, tj. vrijedi

$$z_{xy}(x_0, y_0) = z_{yx}(x_0, y_0).$$

Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrike

Otv. i zatv. skup

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parc. der. višeg reda

Diferencijabilnost

Usmjerena derivacija

Tm. srednje vrijednosti

Parc. der. slož. funkc.

Implicitna funkcija

Ekstremi

Uvjetni ekstremi

Neka je $f : O \rightarrow \mathbb{R}$ realna funkcija definirana na otvorenom skupu $O \subseteq \mathbb{R}^2$. Kažemo da je funkcija f klase C^1 na O ako je neprekidna te postoje sve parcijalne derivacije prvog reda funkcije f i one su neprekidne funkcije na O . Skup svih funkcija klase C^1 na O označavamo s $C^1(O)$.

Kažemo da je f klase C^r na O ako je neprekidna i postoje sve parcijalne derivacije do reda r funkcije f i one su neprekidne funkcije na O . Skup svih funkcija klase C^r na O označavamo s $C^r(O)$.

Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrake

Otv. i zatv. skup

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parc. der. višeg reda

Diferencijabilnost

Usmjerena derivacija

Tm. srednje vrijednosti

Parc. der. slož. funkc.

Implicitna funkcija

Ekstremi

Uvjetni ekstremi

Diferencijabilnost funkcije

Osnovna ideja diferencijalnog računa je zadanu funkciju što bolje lokalno aproksimirati linearnom. Jednostavno rečeno, funkcija je diferencijabilna u točki (x_0, y_0) ako je $f(x_0 + h, y_0 + k)$ praktički jednako $f(x_0, y_0)$ kada su h i k dovoljno blizu 0.

Neka je $f : O \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija definirana na otvorenom skupu $O \subseteq \mathbb{R}^2$ i neka je $P_0 \in O$. Želimo prirast funkcije $f(P_0 + H) - f(P_0)$, gdje je $H \in \mathbb{R}^2$ takav da je $P_0 + H \in O$, aproksimirati s $A(H)$, gdje je $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ linearni operator. Pri tome ćemo preslikavanje f smatrati "dobrim" ukoliko relativnu grešku $\frac{r(H)}{\|H\|}$ možemo učiniti po volji malom za dovoljno male H , pri čemu je $r(H) = f(P_0 + H) - f(P_0) - A(H)$.

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrrike

Otv. i zatv. skup

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parc. der. višeg reda

Diferencijabilnost

Usmjerena derivacija

Tm. srednje vrijednosti

Parc. der. slož. funkc.

Implicitna funkcija

Ekstremi

Uvjetni ekstremi



Pokazuje se da ako linearni operator A postoji on je jedinstven i zovemo ga **diferencijal funkcije f u točki P_0** i označavamo s **$df(P_0)$** . U tom slučaju kažemo da je funkcija f **diferencijabilna** u točki P_0 .

Pogledajmo prvo slučaj realne funkcije jedne realne varijable.

Primjer 43.

Ispitajmo diferencijabilnost funkcije $f(x) = x^2$.

Rješenje

Pokazuje se da ako linearni operator A postoji on je jedinstven i zovemo ga **diferencijal funkcije f u točki P_0** i označavamo s **$df(P_0)$** . U tom slučaju kažemo da je funkcija f **diferencijabilna** u točki P_0 .

Pogledajmo prvo slučaj realne funkcije jedne realne varijable.

Primjer 43.

Ispitajmo diferencijabilnost funkcije $f(x) = x^2$.

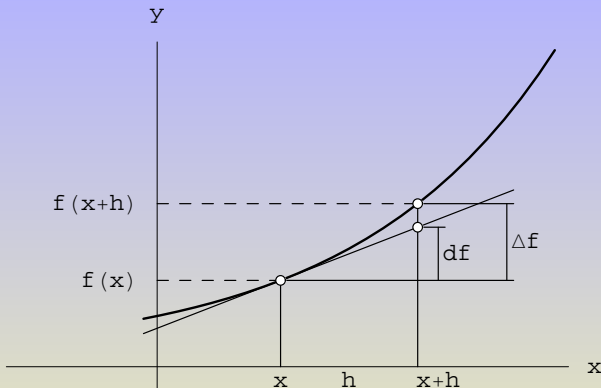
Rješenje

$$f(x+h) - f(x) = (x+h)^2 - x^2 = \underbrace{2x}_{f'(x)} h + h^2$$

$$r(h) = h^2, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h} = 0$$

Dakle, f je diferencijabilna u svakoj točki i

$$df(x)(h) = 2xh.$$



$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad f \mapsto f'$$

$$df(x)(h) = f'(x) \cdot h \leftarrow \text{diferencijal funkcije } f \text{ u točki } x$$

$$\Delta f \approx df \Rightarrow f(x+h) \approx f(x) + df(x)(h)$$

Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrice

Otv. i zatv. skup

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parc. der. višeg reda

Diferencijabilnost

Usmjerena derivacija

Tm. srednje vrijednosti

Parc. der. slož. funkc.

Implicitna funkcija

Ekstremi

Uvjetni ekstremi

Dakle, derivacija $f'(x)$ funkcije f u točki x je numerički reprezentant diferencijala $df(x)$ funkcije f u točki x .

Naime, $df(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je linearni operator koji u kanonskoj bazi ima svoj matrični zapis i to je matrica tipa $(1, 1)$ čiji jedini element je $f'(x)$, tj. derivacija funkcije f u točki x .

Napomena.

Lako se pokazuje da su za realne funkcije jedne varijable derivabilnost i diferencijabilnost ekvivalentna svojstva. Vidjet ćemo da kod funkcija više varijabli to ne vrijedi.

Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrake

Otv. i zatv. skup

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parc. der. višeg reda

Diferencijabilnost

Usmjerena derivacija

Tm. srednje vrijednosti

Parc. der. slož. funkc.

Implicitna funkcija

Ekstremi

Uvjetni ekstremi

Neka je sada $f : O \rightarrow \mathbb{R}$ realna funkcija definirana na otvorenom skupu $O \subseteq \mathbb{R}^2$. Diferencijal funkcije f u točki $(x, y) \in O$ je linearni operator $df(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ i njegov matrični prikaz u kanonskoj bazi je matrica tipa $(1, 2)$. Dakle, matrica tog linearnog operatora se sastoji od dva broja. Što mislite koji su to brojevi? Pogledajmo jedan primjer.

Primjer 44.

Ispitajmo diferencijabilnost funkcije $f(x, y) = x^2 + y^2$.

Rješenje

Neka je sada $f : O \rightarrow \mathbb{R}$ realna funkcija definirana na otvorenom skupu $O \subseteq \mathbb{R}^2$. Diferencijal funkcije f u točki $(x, y) \in O$ je linearni operator $df(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ i njegov matrični prikaz u kanonskoj bazi je matrica tipa $(1, 2)$. Dakle, matrica tog linearnog operatora se sastoji od dva broja. Što mislite koji su to brojevi? Pogledajmo jedan primjer.

Primjer 44.

Ispitajmo diferencijabilnost funkcije $f(x, y) = x^2 + y^2$.

Rješenje

Neka je $P = (x, y)$ i $H = (h, k)$. Izračunajmo prirast funkcije f u točki P .

$$\begin{aligned}
 f(P+H) - f(P) &= f(x+h, y+k) - f(x, y) = \\
 &= (x+h)^2 + (y+k)^2 - x^2 - y^2 = 2xh + 2yk + (h^2 + k^2) = \\
 &= (2x, 2y) \cdot (h, k) + (h^2 + k^2) = (2x, 2y) \cdot (h, k) + \|H\|^2 = \\
 &= \underbrace{(2x\vec{i} + 2y\vec{j})}_{\nabla f(P)} \cdot \underbrace{H}_{r(H)} + \|H\|^2
 \end{aligned}$$

$$\nabla f(P) = f_x(P)\vec{i} + f_y(P)\vec{j} = (f_x(P), f_y(P))$$



gradijent funkcije f u točki P

$$\lim_{H \rightarrow 0} \frac{r(H)}{\|H\|} = \lim_{H \rightarrow 0} \frac{\|H\|^2}{\|H\|} = 0$$

Dakle, f je diferencijabilna u svakoj točki i vrijedi

$$df(P)(H) = \nabla f(P) \cdot H = 2xh + 2yk$$

Umjesto h i k uobičajene oznake za priraste nezavisnih varijabli x i y su dx i dy pa uz ove oznake imamo

$$df(x, y)(dx, dy) = 2x dx + 2y dy$$

ili kraće

$$df(x, y) = 2x dx + 2y dy.$$

Općenito, ako je funkcija $f : O \rightarrow \mathbb{R}$, $O \subseteq \mathbb{R}^2$ otvoren skup, diferencijabilna u točki $(x, y) \in O$, tada je njezin diferencijal u toj točki jednak

$$df(x, y)(dx, dy) = f_x(x, y) dx + f_y(x, y) dy.$$



ime linearnog operatora



vektor na kojeg djeluje linearni operator

Najčešće kratko pišemo

$$df(x, y) = f_x(x, y) dx + f_y(x, y) dy.$$

funkcija jedne varijable	funkcija dvije varijable
$f \mapsto f'$	$f \mapsto \nabla f$
$df(x)(h) = f'(x) \cdot h$	$df(P)(H) = \nabla f(P) \cdot H$

U analogiji s realnim funkcijama jedne varijable $\nabla f(P)$ bi bilo opravdano zvati derivacijom funkcije f u točki P .

Znamo da $f'(x_0)$ geometrijski predstavlja koeficijent smjera tangente u točki $(x_0, f(x_0))$ na graf funkcije f i jednadžba te tangente je

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Kod funkcija dvije varijable gradijent ima sličnu ulogu jer se javlja u jednadžbi tangencijalne ravnine na graf te funkcije.

Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrike

Otv. i zatv. skup

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parc. der. višeg reda

Diferencijabilnost

Usmjerena derivacija

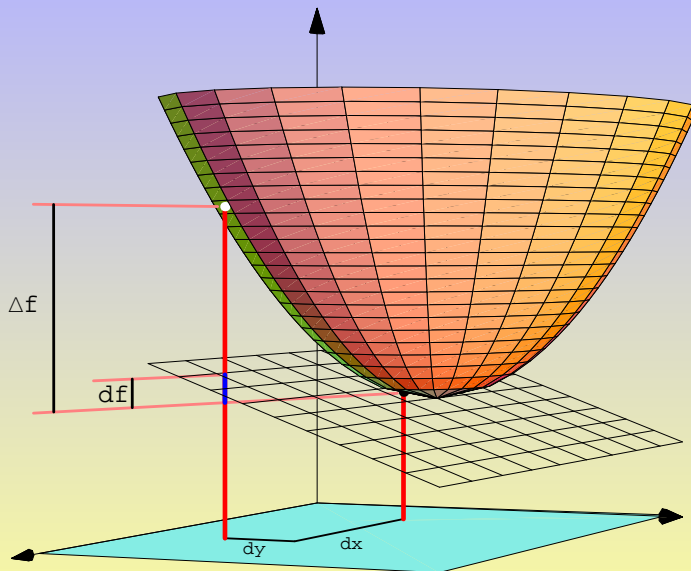
Tm. srednje vrijednosti

Parc. der. slož. funkc.

Implicitna funkcija

Ekstremi

Uvjetni ekstremi



Jednadžba tangencijalne ravnine na graf funkcije

$z = f(x, y)$ u točki (x_0, y_0) glasi

$$z = f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0),$$

odnosno

$$f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) - (z - z_0) = 0,$$

gdje je $z_0 = f(x_0, y_0)$.

O tangencijalnim ravninama i plohama će biti više riječi kasnije.

Svojstva gradijenta

- $\nabla[f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})] = \nabla f(\mathbf{x}) + \nabla g(\mathbf{x})$
- $\nabla[\alpha f(\mathbf{x})] = \alpha \cdot \nabla f(\mathbf{x}), \alpha \in \mathbb{R}$
- $\nabla[f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{x})] = f(\mathbf{x}) \cdot \nabla g(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) \cdot \nabla f(\mathbf{x})$

Napomena.

Analogno, kao kod funkcija dviju varijabli, se definira gradijent funkcije triju ili više varijabli. Na primjer, gradijent funkcije triju varijabli u točki (x_0, y_0, z_0) je

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \left(f_x(x_0, y_0, z_0), f_y(x_0, y_0, z_0), f_z(x_0, y_0, z_0) \right).$$

Totalni diferencijal

Neka je $f : O \rightarrow \mathbb{R}$ diferencijabilna funkcija definirana na otvorenom skupu $O \subseteq \mathbb{R}^2$. Totalni diferencijal funkcije f je preslikavanje

$$df : O \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$$

koje svakoj točki $(x_0, y_0) \in O$ pridružuje diferencijal funkcije f u toj točki, tj.

$$(x_0, y_0) \mapsto df(x_0, y_0).$$

Totalni diferencijal funkcije f se određuje po formuli

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrrike

Otv. i zatv. skup

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parc. der. višeg reda

Diferencijabilnost

Usmjerena derivacija

Tm. srednje vrijednosti

Parc. der. slož. funkc.

Implicitna funkcija

Ekstremi

Uvjetni ekstremi



Primjer 45.

Zadana je funkcija $f(x, y) = x^2 + y^2$.

- Odredite totalni diferencijal funkcije f .
- Odredite diferencijal funkcije f u točki $(1, 3)$ i gradijent u toj točki.
- Izračunajte približno pomoću diferencijala $f(1.02, 2.99)$.

Rješenje

Primjer 45.

Zadana je funkcija $f(x, y) = x^2 + y^2$.

- Odredite totalni diferencijal funkcije f .
- Odredite diferencijal funkcije f u točki $(1, 3)$ i gradijent u toj točki.
- Izračunajte približno pomoću diferencijala $f(1.02, 2.99)$.

Rješenje

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy, \text{ pa je } df = 2x dx + 2y dy$$

Diferencijal funkcije f u točki $(1, 3)$ je

$$df(1, 3) = 2 dx + 6 dy,$$

a gradijent

$$\nabla f(1, 3) = (2, 6).$$

$$f(x + dx, y + dy) \approx f(x, y) + df(x, y)(dx, dy)$$

$$(x, y) = (1, 3), \quad dx = 0.02, \quad dy = -0.01$$

$$df(1, 3)(0.02, -0.01) = 2 \cdot 0.02 + 6 \cdot (-0.01) = -0.02$$

$$f(1.02, 2.99) \approx f(1, 3) + df(1, 3)(0.02, -0.01)$$

$$f(1.02, 2.99) \approx 10 + (-0.02) = 9.98$$

Stvarna vrijednost je

$$f(1.02, 2.99) = (1.02)^2 + (2.99)^2 = 9.9805.$$

Vidimo da je greška mala, a to je zbog toga jer su pomaci dx i dy mali.

Lema 9.

Ako je funkcija f **diferencijabilna** u točki (x_0, y_0) , tada je f **neprekidna** u točki (x_0, y_0) .

Lema 10.

Ako je funkcija $f : O \rightarrow \mathbb{R}$ diferencijabilna u točki $(x_0, y_0) \in O$, tada je i derivabilna u toj točki, tj. postoje parcijalne derivacije funkcije f u toj točki i vrijedi

$$df(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) dy.$$

Obrat leme 10 ne vrijedi, tj. kod realnih funkcija dviju (ili više) varijabli derivabilnost ne povlači diferencijabilnost.

Primjer 46.

Funkcija $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definirana s

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

ima obje parcijalne derivacije u točki $(0, 0)$ i one su jednake 0, ali f nije diferencijabilna u $(0, 0)$.

Rješenje

Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrake

Otv. i zatv. skup

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parc. der. višeg reda

Diferencijabilnost

Usmjerena derivacija

Tm. srednje vrijednosti

Parc. der. slož. funkc.

Implicitna funkcija

Ekstremi

Uvjetni ekstremi



Primjer 46.

Funkcija $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definirana s

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

ima obje parcijalne derivacije u točki $(0, 0)$ i one su jednake 0, ali f nije diferencijabilna u $(0, 0)$.

Rješenje

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta y} = 0$$

Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrike

Otv. i zatv. skup

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parc. der. višeg reda

Diferencijabilnost

Usmjerena derivacija

Tm. srednje vrijednosti

Parc. der. slož. funkc.

Implicitna funkcija

Ekstremi

Uvjetni ekstremi



Ako bi postojao diferencijal funkcije f u točki $(0,0)$, on bi zbog jedinstvenosti morao biti jednak

$$df(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) dy = 0 dx + 0 dy = 0,$$

tj., on bi bio nuloperator. No, treba još provjeriti da li je

$$\lim_{H \rightarrow 0} \frac{r(H)}{\|H\|} = 0.$$

$$\begin{aligned} \lim_{H \rightarrow 0} \frac{r(H)}{\|H\|} &= \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(0+h, 0+k) - f(0,0) - df(0,0)(h,k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \\ &= \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{hk}{h^2+k^2} - 0 - 0}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{hk}{(h^2 + k^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

No, gornji limes ne postoji jer je za $k = 0$ on jednak 0, a za $k = \sqrt{h}$ je jednak 1, pa funkcija f nije diferencijabilna u $(0,0)$.

Još lakši način da dokažemo da funkcija f nije diferencijabilna u točki $(0,0)$ je da dokažemo da ona ima prekid u toj točki.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

No, gornji limes ne postoji jer je za $x = 0$ jednak 0, a za $x = y$ je jednak $\frac{1}{2}$. Dakle, funkcija f ima prekid u točki $(0,0)$, pa onda nije niti diferencijabilna u toj točki.

Teorem 43.

Ako funkcija $f : O \rightarrow \mathbb{R}$ ima neprekidne parcijalne derivacije u $(x_0, y_0) \in O$, tada je f diferencijabilna u točki (x_0, y_0) .

Zadatak 21.

Provjerite sljedeće tvrdnje:

- Funkcija $z = \sqrt[3]{xy}$ ima u točki $(0,0)$ parcijalne derivacije jednake 0, ali nije diferencijabilna u $(0,0)$.
- Funkcija $z = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ ima u $(0,0)$ parcijalne derivacije jednake 1, ali nije diferencijabilna u $(0,0)$.
- Funkcija

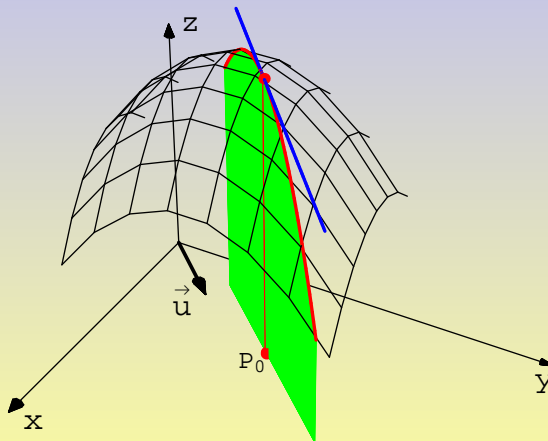
$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

ima parcijalne derivacije u $(0,0)$ koje imaju prekide u $(0,0)$ i neomeđene su, ali je ipak f diferencijabilna u $(0,0)$.

Usmjerena derivacija

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat



Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrice

Otv. i zatv. skup

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parc. der. višeg reda

Diferencijabilnost

Usmjerena derivacija

Tm. srednje vrijednosti

Parc. der. slož. funkc.

Implicitna funkcija

Ekstremi

Uvjetni ekstremi

Neka je $f : O \rightarrow \mathbb{R}$ i neka je $P_0 \in O$, $O \subseteq \mathbb{R}^2$ otvoren skup. Zanima nas brzina promjene funkcije u smjeru nekog vektora $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ u točki P_0 . U tu svrhu gledamo restrikciju te funkcije na pravac kroz točku P_0 sa vektorom smjera \vec{u} . To će biti funkcija jedne varijable čiji graf je krivulja koja se dobije kao presjek grafa funkcije f i ravnine kroz P_0 koja je okomita na xy -ravninu i paralelna je s vektorom \vec{u} .

Derivacija te funkcije u točki P_0 se zove **derivacija**

funkcije f duž vektora \vec{u} i označava se s $\partial_{\vec{u}} f(P_0)$.

Derivacija duž jediničnog vektora $\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ zove se **derivacija u smjeru vektora \vec{u}** .

$$\partial_{\vec{u}} f(P_0) = \frac{df}{dt}(P_0 + t\vec{u})$$

Propozicija 60.

Neka je $f : O \rightarrow \mathbb{R}$ diferencijabilna funkcija u točki $P_0 \in O \subseteq \mathbb{R}^2$ i neka je $\vec{u} = (u_1, u_2)$. Tada je

$$\partial_{\vec{u}} f(P_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(P_0) \cdot u_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0) \cdot u_2.$$

Primjer 47.

Odredite derivaciju funkcije $f(x, y) = x^2 + y^2$ duž vektora $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ u točki $(3, 4)$.

Rješenje



$$\partial_{\vec{u}} f(P_0) = \frac{df}{dt}(P_0 + t\vec{u})$$

Propozicija 60.

Neka je $f : O \rightarrow \mathbb{R}$ diferencijabilna funkcija u točki $P_0 \in O \subseteq \mathbb{R}^2$ i neka je $\vec{u} = (u_1, u_2)$. Tada je

$$\partial_{\vec{u}} f(P_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(P_0) \cdot u_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0) \cdot u_2.$$

Primjer 47.

Odredite derivaciju funkcije $f(x, y) = x^2 + y^2$ duž vektora $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ u točki $(3, 4)$.

Rješenje

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(3, 4) = 6, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(3, 4) = 8$$

$$\partial_{\vec{u}} f(3, 4) = \frac{\partial f}{\partial x}(3, 4) \cdot 2 + \frac{\partial f}{\partial y}(3, 4) \cdot 3 = 6 \cdot 2 + 8 \cdot 3 = 36$$

Teorem srednje vrijednosti za funkcije više varijabli

Teorem 44 (Lagrangeov teorem srednje vrijednosti).

Neka je f diferencijabilna funkcija na intervalu $\langle a, b \rangle$ i neprekidna na segmentu $[a, b]$. Tada postoji $c \in \langle a, b \rangle$ za koji vrijedi

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ili ekvivalentno

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrake

Otv. i zatv. skup

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parc. der. višeg reda

Diferencijabilnost

Usmjerena derivacija

Tm. srednje vrijednosti

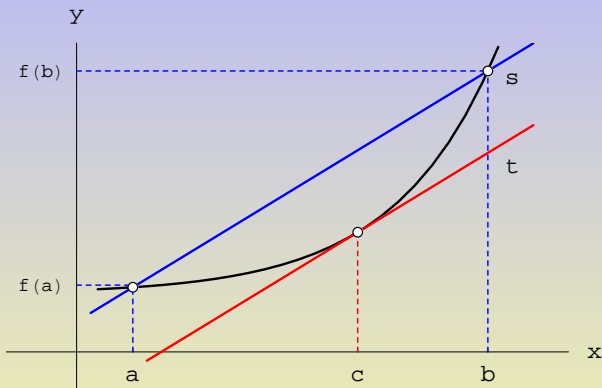
Parc. der. slož. funkc.

Implicitna funkcija

Ekstremi

Uvjetni ekstremi





$$k_s = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) = k_t$$

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrrike
Otv. i zatv. skup
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parc. der. višeg reda
Diferencijabilnost
Usmjerena derivacija
Tm. srednje vrijednosti
Parc. der. slož. funkc.
Implicitna funkcija
Ekstremi
Uvjetni ekstremi

Neka su $P, Q \in \mathbb{R}^2$ dvije različite točke. Segment $[P, Q]$ je skup svih točaka na dužini \overline{PQ} .

$$[P, Q] = \left\{ P + t(Q - P) : t \in [0, 1] \right\}.$$

Teorem 45.

Neka je $O \subseteq \mathbb{R}^2$ otvoren skup, a $f : O \rightarrow \mathbb{R}$ realna funkcija diferencijabilna u svim točkama segmenta $[A, B] \subseteq O$. Tada postoji $C \in [A, B]$ tako da je

$$\underbrace{f(B) - f(A)}_{\in \mathbb{R}} = \underbrace{\nabla f(C)}_{\text{vektor}} \cdot \underbrace{(B - A)}_{\text{vektor}}.$$

- Funkcije više varijabli
- Osnovne definicije
- Nivo-linije
- Kvadrike
- Otv. i zatv. skup
- Limes funkcije
- Parcijalne derivacije
- Parc. der. višeg reda
- Diferencijabilnost
- Usmjerena derivacija
- Tm. srednje vrijednosti**
- Parc. der. slož. funkc.
- Implicitna funkcija
- Ekstremi
- Uvjetni ekstremi

Parcijalno deriviranje složenih funkcija

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad z = f(x, y)$$

Pretpostavimo da varijable x i y ovise o nekoj novoj varijabli t , tj.

$$x = x(t), \quad y = y(t).$$

Tada je

$$z = f(x(t), y(t)),$$

odnosno

$$z = z(t).$$

Želimo odrediti $\frac{dz}{dt}$.

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrrike
Otv. i zatv. skup
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parc. der. višeg reda
Diferencijabilnost
Usmjerena derivacija
Tm. srednje vrijednosti
Parc. der. slož. funkc.
Implicitna funkcija
Ekstremi
Uvjetni ekstremi



Ako se t promijeni na $t + \Delta t$, tada se x promijeni na $x + \Delta x$, y na $y + \Delta y$, a z na $z + \Delta z$. Dakle,

$$\begin{aligned}\Delta z &= f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = \\ &= \left[f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) \right] + \left[f(x, y + \Delta y) - f(x, y) \right].\end{aligned}$$

Podijelimo li sa Δt dobivamo

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)}{\Delta x} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

Ako su $x(t)$ i $y(t)$ neprekidne funkcije, tada $\Delta x \rightarrow 0$ i $\Delta y \rightarrow 0$ kada $\Delta t \rightarrow 0$. Ako još i postoje neprekidne parcijalne derivacije f_x i f_y u nekoj okolini točke (x, y) , tada primijenimo Lagrangeov teorem srednje vrijednosti na izraze u brojcima i dobivamo

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = f_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y) \frac{\Delta x}{\Delta t} + f_y(x, y + \theta_2 \Delta y) \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

za neke $\theta_1, \theta_2 \in \langle 0, 1 \rangle$.

Prelaskom na limes $\Delta t \rightarrow 0$ i uz pretpostavku da su parcijalne derivacije neprekidne dobivamo

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

Dokazali smo sljedeći teorem.

Teorem 46.

Za diferencijabilne funkcije $z = f(x, y)$, $x(t)$, $y(t)$ vrijedi

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

Teorem 46 se može lagano dokazati pomoću diferencijala.
Naime, ako je

$$z = f(x, y), \quad x = x(t), \quad y = y(t)$$

tada je

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy. \quad (I)$$

S druge strane je

$$dz = z'(t) dt. \quad (II)$$

Isto tako je

$$dx = x'(t) dt, \quad dy = y'(t) dt. \quad (III)$$

Uvrstimo li (III) u (I) nakon sređivanja dobivamo

$$dz = \left(\frac{\partial f}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y} y'(t) \right) dt. \quad (IV)$$

Iz (II) i (IV) zbog jedinstvenosti diferencijala slijedi

$$z'(t) = \frac{\partial f}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y} y'(t),$$

odnosno

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

Primjer 48.

Neka je $f(x, y) = \frac{1}{3}(x^3 + y^3)$ te $x(t) = a \cos t$,

$y(t) = b \sin t$. Odredite $\frac{df}{dt}$.

Rješenje

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrrike
Otv. i zatv. skup
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parc. der. višeg reda
Diferencijabilnost
Usmjerena derivacija
Tm. srednje vrijednosti
Parc. der. slož. funkc.
Implicitna funkcija
Ekstremi
Uvjetni ekstremi

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = y^2$$

$$\frac{dx}{dt} = -a \sin t, \quad \frac{dy}{dt} = b \cos t$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{df}{dt} = x^2 \cdot (-a \sin t) + y^2 \cdot b \cos t$$

$$\frac{df}{dt} = -a^3 \sin t \cos^2 t + b^3 \sin^2 t \cos t$$

Neka je $z = f(x, y)$ i pretpostavimo da varijable x i y ovise o dva parametra u i v , tj.

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v).$$

Želimo odrediti $\frac{\partial z}{\partial u}$ i $\frac{\partial z}{\partial v}$.

Teorem 47.

Uz prethodne pretpostavke vrijedi

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}$$

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrrike
Otv. i zatv. skup
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parc. der. višeg reda
Diferencijabilnost
Usmjerena derivacija
Tm. srednje vrijednosti
Parc. der. slož. funkc.
Implicitna funkcija
Ekstremi
Uvjetni ekstremi

Dokaz.

Diferencijal funkcije $z = f(x, y)$ je

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy. \quad (i)$$

S druge strane je

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv. \quad (ii)$$

Diferencijali varijabli $x = x(u, v)$ i $y = y(u, v)$ su

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \quad (iii)$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv \quad (iv)$$

Uvrstimo li (iii) i (iv) u (i) nakon sređivanja dobivamo

$$dz = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \right) du + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} \right) dv.$$

Usporedimo li posljednju jednakost s (ii), zbog
jedininstvenosti diferencijala slijedi

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}$$



Derivacija implicitno zadane funkcije

Slučaj jedne nezavisne varijable

Ako je

$$f(x, y) = 0, \quad f_y(x, y) \neq 0,$$

tada je

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x(x, y)}{f_y(x, y)}.$$

Isto tako, ako je

$$f(x, y) = 0, \quad f_x(x, y) \neq 0,$$

tada je

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{f_y(x, y)}{f_x(x, y)}.$$

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrake

Otv. i zatv. skup

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parc. der. višeg reda

Diferencijabilnost

Usmjerena derivacija

Tm. srednje vrijednosti

Parc. der. slož. funkc.

Implicitna funkcija

Ekstremi

Uvjetni ekstremi

Primjer 49.

Odredite derivaciju implicitno zadane funkcije

$$x \sin y + x^2 y^3 = 0.$$

Rješenje

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrice
Otv. i zatv. skup
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parc. der. višeg reda
Diferencijabilnost
Usmjerena derivacija
Tm. srednje vrijednosti
Parc. der. slož. funkc.
Implicitna funkcija
Ekstremi
Uvjetni ekstremi

Primjer 49.

Odredite derivaciju implicitno zadane funkcije

$$x \sin y + x^2 y^3 = 0.$$

Rješenje

$$f(x, y) = x \sin y + x^2 y^3,$$

$$f_x(x, y) = \sin y + 2xy^3, \quad f_y(x, y) = x \cos y + 3x^2 y^2$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x(x, y)}{f_y(x, y)} = -\frac{\sin y + 2xy^3}{x \cos y + 3x^2 y^2}$$

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrake
Otv. i zatv. skup
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parc. der. višeg reda
Diferencijabilnost
Usmjerena derivacija
Tm. srednje vrijednosti
Parc. der. slož. funkc.

Implicitna funkcija

Ekstremi

Uvjetni ekstremi

Slučaj dvije nezavisne varijable

Ako je

$$F(x, y, z) = 0, \quad F_z(x, y, z) \neq 0$$

tada je

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}.$$

Ako je

$$F(x, y, z) = 0, \quad F_y(x, y, z) \neq 0$$

tada je

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{F_x(x, y, z)}{F_y(x, y, z)}, \quad \frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{F_z(x, y, z)}{F_y(x, y, z)}.$$

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrrike
Otv. i zatv. skup
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parc. der. višeg reda
Diferencijabilnost
Usmjerena derivacija
Tm. srednje vrijednosti
Parc. der. slož. funkc.

Implicitna funkcija

Ekstremi

Uvjetni ekstremi



Ako je

$$F(x, y, z) = 0, \quad F_x(x, y, z) \neq 0$$

tada je

$$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{F_y(x, y, z)}{F_x(x, y, z)}, \quad \frac{\partial x}{\partial z} = -\frac{F_z(x, y, z)}{F_x(x, y, z)}.$$

Primjer 50.

Odredite parcijalne derivacije implicitno zadane funkcije

$$y \sin x + y^3 \ln z + xyz^2 = 0.$$

Rješenje

$$F(x, y, z) = y \sin x + y^3 \ln z + xyz^2$$

$$F_x(x, y, z) = y \cos x + yz^2$$

$$F_y(x, y, z) = \sin x + 3y^2 \ln z + xz^2$$

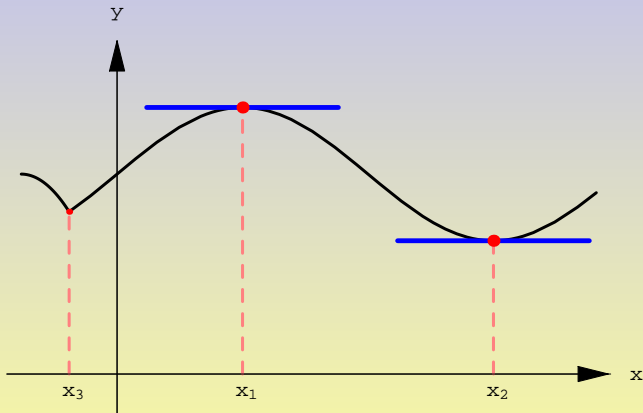
$$F_z(x, y, z) = \frac{y^3}{z} + 2xyz$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)} = -\frac{y \cos x + yz^2}{\frac{y^3}{z} + 2xyz}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y(x, y, z)}{F_z(x, y, z)} = -\frac{\sin x + 3y^2 \ln z + xz^2}{\frac{y^3}{z} + 2xyz}$$

Ekstremi funkcija dvije varijable

Slučaj jedne varijable



Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrice

Otv. i zatv. skup

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parc. der. višeg reda

Diferencijabilnost

Usmjerena derivacija

Tm. srednje vrijednosti

Parc. der. slož. funkc.

Implicitna funkcija

Ekstremi

Uvjetni ekstremi

Ako funkcija $y = f(x)$ ima u točki x_0 lokalni ekstrem i u toj točki postoji prva derivacija, tada je ona jednaka nuli, tj. $f'(x_0) = 0$. Geometrijski, tangenta na graf funkcije f u točki $(x_0, f(x_0))$ je paralelna s x -osi. Moguće je da funkcija u nekoj točki ima ekstrem, a nema derivaciju u toj točki, tj. u toj točki imamo šiljak.

Ako je u nekoj točki prva derivacija jednaka nula, tada u toj točki funkcija ne mora nužno imati ekstrem. Primjer je funkcija $f(x) = x^3$. Dakle, kandidati za ekstreme su nultočke prve derivacije i te točke nazivamo **stacionarne** ili **kritične** točke. Rubne točke i točke u kojima ne postoji prva derivacija treba još posebno ispitati jer i u njima funkcija može imati lokalne ekstreme.

Da li je stacionarna točka lokalni ekstrem ili nije, možemo ispitati pomoću prve ili druge derivacije.

Pomoću prve derivacije

Stacionarna točka je lokalni ekstrem samo ako se predznak prve derivacije lijevo od stacionarne točke razlikuje od predznaka prve derivacije desno od stacionarne točke.

Pomoću druge derivacije

Ako je u stacionarnoj točki druga derivacija strogo veća od nule, tada u toj točki funkcija ima lokalni minimum.

Ako je u stacionarnoj točki druga derivacija strogo manja od nule, tada u toj točki funkcija ima lokalni maksimum.

Ako je u stacionarnoj točki druga derivacija jednaka nuli, tada ovaj test ne daje odgovor pa ispitivanje vršimo pomoću prve derivacije (ili pomoću viših derivacija).

Slučaj dvije varijable

Kažemo da funkcija $z = f(x, y)$ definirana na otvorenom skupu Ω ima **lokalni minimum** u točki $(x_0, y_0) \in \Omega$ ako postoji okolina O točke (x_0, y_0) takva da je

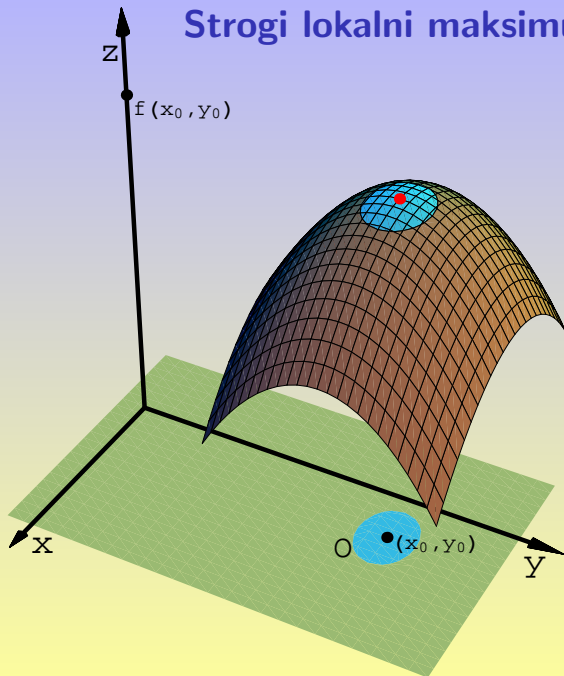
$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0), \quad \forall (x, y) \in O.$$

Kažemo da funkcija $z = f(x, y)$ definirana na otvorenom skupu Ω ima **lokalni maksimum** u točki $(x_0, y_0) \in \Omega$ ako postoji okolina O točke (x_0, y_0) takva da je

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0), \quad \forall (x, y) \in O.$$

Ako vrijede stroge nejednakosti, govorimo o **strogom lokalnom minimumu** odnosno **strogom lokalnom maksimumu**. Lokalne minimume i maksimume jednom riječju zovemo **lokalnim ekstremima**.

Strogi lokalni maksimum



Matematičke metode
za informatičare

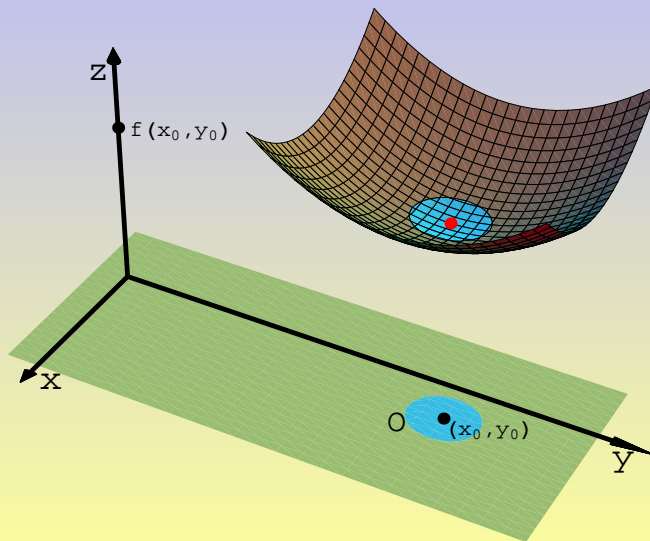
prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrice
Otv. i zatv. skup
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parc. der. višeg reda
Diferencijabilnost
Usmjerena derivacija
Tm. srednje vrijednosti
Parc. der. slož. funkc.
Implicitna funkcija
Ekstremi
Uvjetni ekstremi

Strogi lokalni minimum

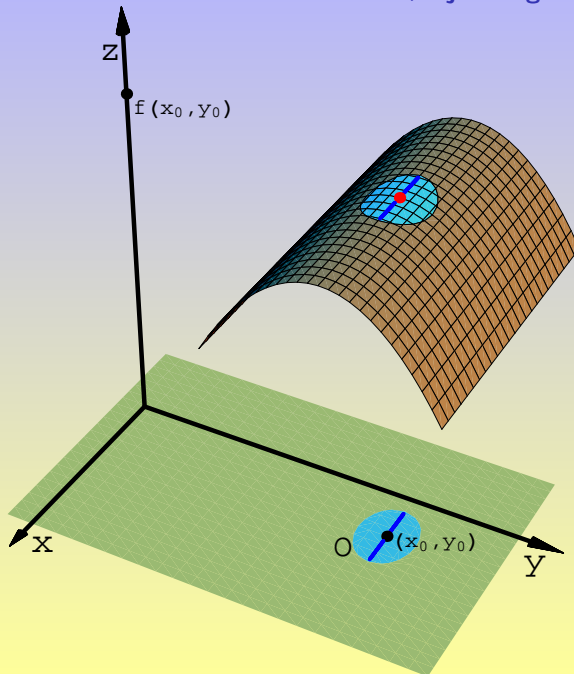
Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat



Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrrike
Otv. i zatv. skup
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parc. der. višeg reda
Diferencijabilnost
Usmjerena derivacija
Tm. srednje vrijednosti
Parc. der. slož. funkc.
Implicitna funkcija
Ekstremi
Uvjetni ekstremi

Lokalni maksimum, nije strogi



Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrice

Otv. i zatv. skup

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parc. der. višeg reda

Diferencijabilnost

Usmjerena derivacija

Tm. srednje vrijednosti

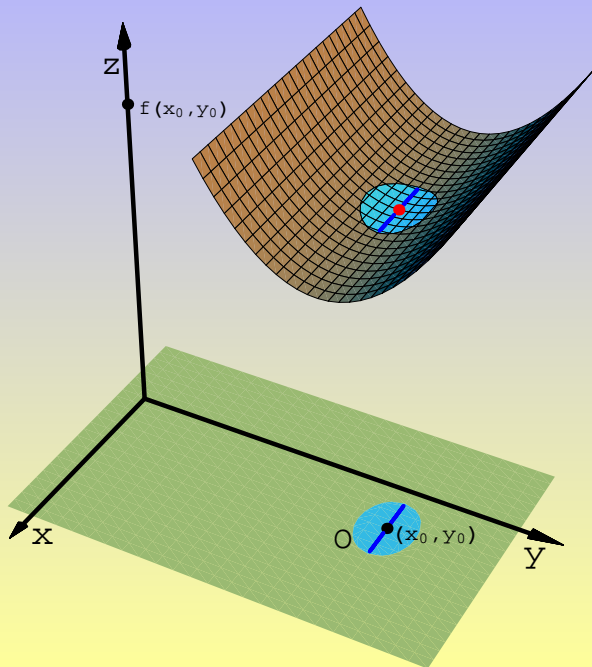
Parc. der. slož. funkc.

Implicitna funkcija

Ekstremi

Uvjetni ekstremi

Lokalni minimum, nije strogi



Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrice
Otv. i zatv. skup
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parc. der. višeg reda
Diferencijabilnost
Usmjerena derivacija
Tm. srednje vrijednosti
Parc. der. slož. funkc.
Implicitna funkcija
Ekstremi
Uvjetni ekstremi



Teorem 48.

Ako funkcija $z = f(x, y)$ ima lokalni ekstrem u točki (x_0, y_0) i ako postoje parcijalne derivacije f_x i f_y u toj točki, tada su one jednake nula, tj. $\nabla f(x_0, y_0) = \mathbf{0}$.

Dokaz.

Ako funkcija $f(x, y)$ ima lokalni ekstrem u točki (x_0, y_0) , tada i funkcija $f(x, y_0)$ ima ekstrem za $x = x_0$. No tada derivacija funkcije $f(x, y_0)$ u točki x_0 mora biti 0. Iz definicije parcijalnih derivacija slijedi da tada mora biti $f_x(x_0, y_0) = 0$. Analogno se dokaže da je i $f_y(x_0, y_0) = 0$.



Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrake

Otv. i zatv. skup

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parc. der. višeg reda

Diferencijabilnost

Usmjerena derivacija

Tm. srednje vrijednosti

Parc. der. slož. funkc.

Implicitna funkcija

Ekstremi

Uvjetni ekstremi

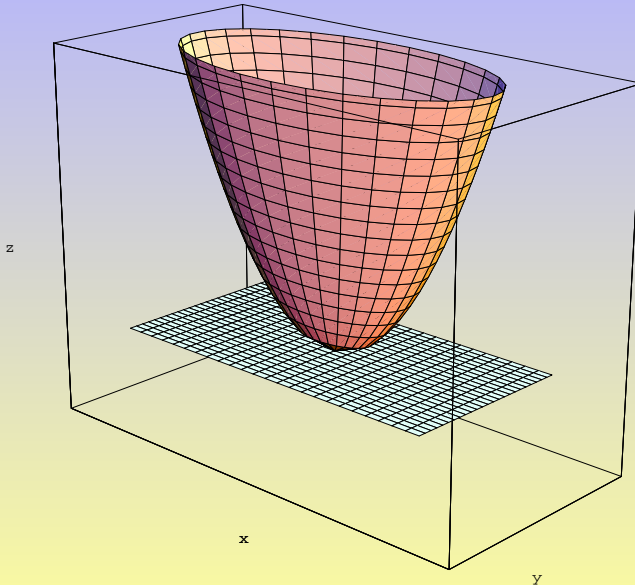
Sjetimo se da jednačba tangencijalne ravnine na graf funkcije $z = f(x, y)$ u točki (x_0, y_0) glasi

$$f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) - (z - z_0) = 0,$$

gdje je $z_0 = f(x_0, y_0)$.

Iz teorema 48 slijedi da je tangencijalna ravnina u točki (x_0, y_0) lokalnog ekstrema paralelna s xy -ravninom, tj. njezina jednačba je

$$z = f(x_0, y_0).$$



- Funkcije više varijabli
- Osnovne definicije
- Nivo-linije
- Kvadrrike
- Otv. i zatv. skup
- Limes funkcije
- Parcijalne derivacije
- Parc. der. višeg reda
- Diferencijabilnost
- Usmjerena derivacija
- Tm. srednje vrijednosti
- Parc. der. slož. funkc.
- Implicitna funkcija
- Ekstremi**
- Uvjetni ekstremi

Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrike

Otv. i zatv. skup

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parc. der. višeg reda

Diferencijabilnost

Usmjerena derivacija

Tm. srednje vrijednosti

Parc. der. slož. funkc.

Implicitna funkcija

Ekstremi

Uvjetni ekstremi

z

x

y

Točke (x, y) ravnine za koje je $\nabla f(x, y) = \mathbf{0}$, tj. u kojima su obje parcijalne derivacije jednake nula, zovemo **stacionarnim točkama** funkcije f .

Kao što smo vidjeli, ako funkcija f ima u točki (x, y) lokalni ekstrem, tada je $\nabla f(x, y) = \mathbf{0}$ ili pak u toj točki gradijent ne postoji. Obrat ne vrijedi, tj. ako u nekoj točki postoje obje parcijalne derivacije i one su jednake nula, tada u toj točki funkcija ne mora imati lokalni ekstrem.

Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrake

Otv. i zatv. skup

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parc. der. višeg reda

Diferencijabilnost

Usmjerena derivacija

Tm. srednje vrijednosti

Parc. der. slož. funkc.

Implicitna funkcija

Ekstremi

Uvjetni ekstremi

Primjer 51.

Odredite stacionarne točke funkcije $f(x, y) = x^2 - y^2 + 7$.

Rješenje

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrike

Otv. i zatv. skup

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parc. der. višeg reda

Diferencijabilnost

Usmjerena derivacija

Tm. srednje vrijednosti

Parc. der. slož. funkc.

Implicitna funkcija

Ekstremi

Uvjetni ekstremi



Primjer 51.

Odredite stacionarne točke funkcije $f(x, y) = x^2 - y^2 + 7$.

Rješenje

$$f_x = 2x, \quad f_y = -2y$$

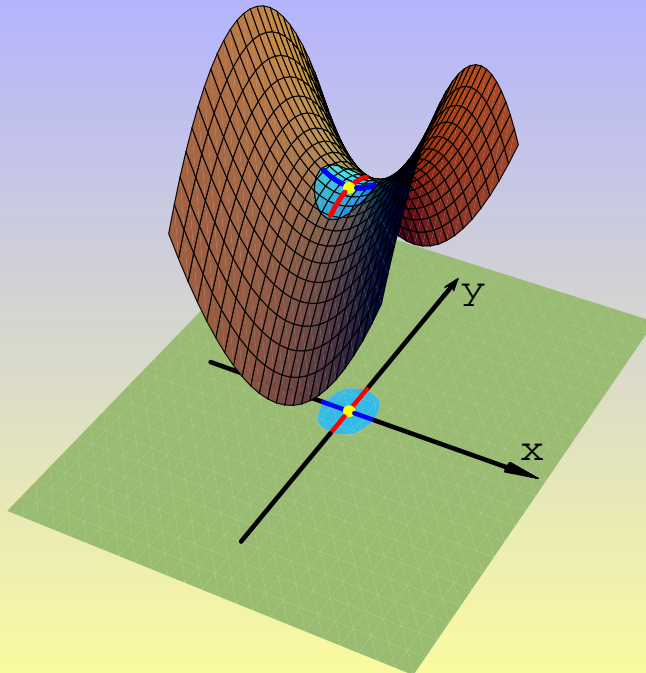
Izjednačimo li parcijalne derivacije s nulom dobivamo samo jednu stacionarnu točku $(0, 0)$. Međutim, u točki $(0, 0)$ funkcija f nema ekstrema. Pomaknemo li se malo za h po x -osi od točke $(0, 0)$ imamo

$$f(h, 0) = h^2 + 7 > 7, \quad (1)$$

a pomaknemo li se malo za k po y -osi od točke $(0, 0)$ imamo

$$f(0, k) = -k^2 + 7 < 7. \quad (2)$$

Kako je $f(0, 0) = 7$ i kako u **svakoj** okolini točke $(0, 0)$ ima točaka i sa x -osi i sa y -osi, iz (1) i (2) slijedi da funkcija f u točki $(0, 0)$ nema ekstrema.



Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrice

Otv. i zatv. skup

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parc. der. višeg reda

Diferencijabilnost

Usmjerena derivacija

Tm. srednje vrijednosti

Parc. der. slož. funkc.

Implicitna funkcija

Ekstremi

Uvjetni ekstremi

Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrice

Otv. i zatv. skup

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parc. der. višeg reda

Diferencijabilnost

Usmjerena derivacija

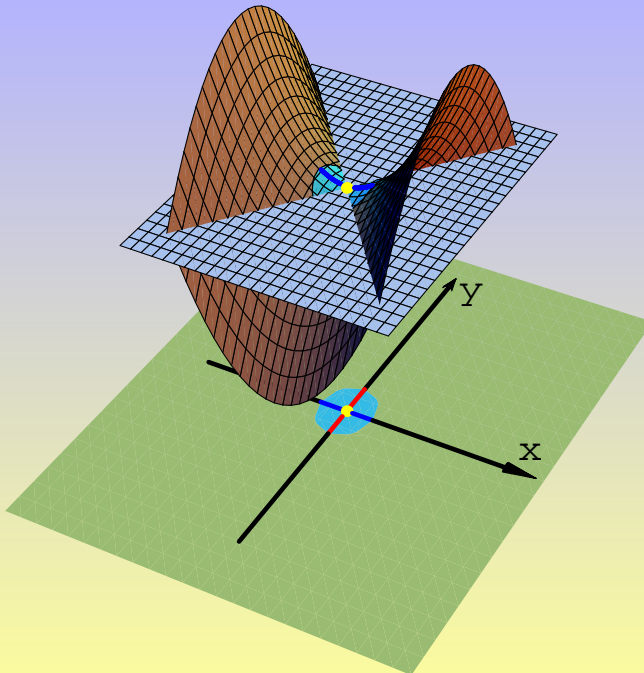
Tm. srednje vrijednosti

Parc. der. slož. funkc.

Implicitna funkcija

Ekstremi

Uvjetni ekstremi



Točka u kojoj su obje parcijalne derivacije funkcije f jednake nula, a u toj točki funkcija ne poprima ekstrem, zove se **sedlasta točka** funkcije f .

Dakle, u stacionarnoj točki funkcija ne mora nužno imati lokalni ekstrem. Treba dodatno proučiti ponašanje funkcije u okolini stacionarne točke na temelju kojeg onda možemo donijeti zaključak.

Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrake

Otv. i zatv. skup

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parc. der. višeg reda

Diferencijabilnost

Usmjerena derivacija

Tm. srednje vrijednosti

Parc. der. slož. funkc.

Implicitna funkcija

Ekstremi

Uvjetni ekstremi

Primjer 52.

Odredite ekstreme funkcije

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2 - xy - 7y.$$

Rješenje

Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrice

Otv. i zatv. skup

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parc. der. višeg reda

Diferencijabilnost

Usmjerena derivacija

Tm. srednje vrijednosti

Parc. der. slož. funkc.

Implicitna funkcija

Ekstremi

Uvjetni ekstremi

Primjer 52.

Odredite ekstreme funkcije

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2 - xy - 7y.$$

Rješenje

$$f_x = 4x - y$$

$$f_y = 2y - x - 7$$

Izjednačimo parcijalne derivacije s nulom i dobivamo

$$4x - y = 0$$

$$-x + 2y = 7.$$

Rješenje gornjeg sustava je točka $(1, 4)$ i to je jedina stacionarna točka funkcije f .

- Funkcije više varijabli
- Osnovne definicije
- Nivo-linije
- Kvadrrike
- Otv. i zatv. skup
- Limes funkcije
- Parcijalne derivacije
- Parc. der. višeg reda
- Diferencijabilnost
- Usmjerena derivacija
- Tm. srednje vrijednosti
- Parc. der. slož. funkc.
- Implicitna funkcija
- Ekstremi**
- Uvjetni ekstremi

Da bismo vidjeli da li u toj točki funkcija ima ekstrem ili ne, treba vidjeti kako se ponaša funkcija u okolini te točke. Najprije, $f(1, 4) = -14$. Sada računamo

$$\begin{aligned} f(1 + h, 4 + k) &= \\ &= 2(1 + h)^2 + (4 + k)^2 - (1 + h)(4 + k) - 7(4 + k), \end{aligned}$$

odnosno

$$f(1 + h, 4 + k) = 2h^2 + k^2 - hk - 14.$$

Nadalje je

$$\begin{aligned} 2h^2 + k^2 - hk &\geq 2h^2 + k^2 - |hk| = \\ &= |h|^2 + (|h|^2 + |k|^2) - |h||k| = h^2 + (|h| - |k|)^2 + |h||k| \geq 0. \end{aligned}$$

Iz prethodnih razmatranja slijedi da je

$$f(1 + h, 4 + k) \geq -14, \quad \forall h, k \in \mathbb{R},$$

pa u točki $(1, 4)$ funkcija f ima lokalni minimum. Štoviše, kako nismo tijekom razmatranja dobili nikakve uvjete na h i k , tj. nije bitno koliko su oni veliki, u točki $(1, 4)$ funkcija f ima globalni minimum, tj. dokazali smo da je

$$2x^2 + y^2 - xy - 7y \geq -14, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Primjer 53.

Odredite ekstreme funkcije $f(x, y) = 1 + \sqrt{x^2 + y^2}$.

Rješenje

Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrike

Otv. i zatv. skup

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parc. der. višeg reda

Diferencijabilnost

Usmjerena derivacija

Tm. srednje vrijednosti

Parc. der. slož. funkc.

Implicitna funkcija

Ekstremi

Uvjetni ekstremi

Primjer 53.

Odredite ekstreme funkcije $f(x, y) = 1 + \sqrt{x^2 + y^2}$.

Rješenje

$$f_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad f_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

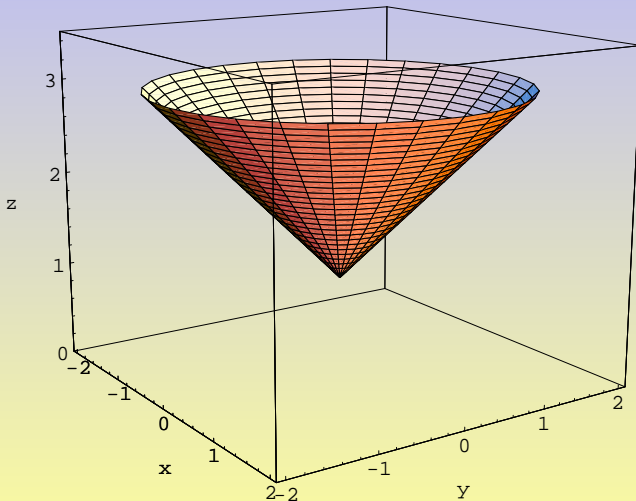
Izjednačimo li parcijalne derivacije s nulom i riješimo sustav, dobivamo jednu kritičnu točku $(0, 0)$ za funkciju f . Ta točka je u domeni funkcije f , ali u toj točki ne postoje parcijalne derivacije, odnosno ne postoji $\nabla f(0, 0)$. S druge strane, kako je $f(0, 0) = 1$ i $\sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$, slijedi da je

$$f(x, y) \geq 1, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

pa u $(0, 0)$ funkcija f ima globalni minimum.

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrrike
Otv. i zatv. skup
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parc. der. višeg reda
Diferencijabilnost
Usmjerena derivacija
Tm. srednje vrijednosti
Parc. der. slož. funkc.
Implicitna funkcija
Ekstremi
Uvjetni ekstremi

$$f(x, y) = 1 + \sqrt{x^2 + y^2}$$



Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrice

Otv. i zatv. skup

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parc. der. višeg reda

Diferencijabilnost

Usmjerena derivacija

Tm. srednje vrijednosti

Parc. der. slož. funkc.

Implicitna funkcija

Ekstremi

Uvjetni ekstremi

Pogledajmo sada kako pomoću parcijalnih derivacija drugog reda možemo ispitati postojanje ekstrema u stacionarnoj točki. Nećemo ulaziti u teoriju, nego ćemo samo opisati postupak.

Neka je (x_0, y_0) stacionarna točka funkcije f , tj.

$$f_x(x_0, y_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0) = 0.$$

Neka je

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{xy}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{vmatrix}.$$

Determinantu $H(x, y)$ zovemo **Hesseova determinanta**.

- Ako je $H(x_0, y_0) < 0$, tada u točki (x_0, y_0) funkcija f nema ekstrema, tj. (x_0, y_0) je sedlasta točka.
- Ako je $H(x_0, y_0) > 0$, tada u točki (x_0, y_0) funkcija f ima ekstrem, i to
 - **lokalni minimum**, ako je $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$
 - **lokalni maksimum**, ako je $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$
- Ako je $H(x_0, y_0) = 0$, tada ovaj test ne daje odgovor, pa treba provesti daljnja ispitivanja.

Sjetimo se ◀ primjera 52 i funkcije

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2 - xy - 7y.$$

Parcijalne derivacije te funkcije su

$$f_x = 4x - y, \quad f_y = 2y - x - 7,$$

a stacionarna točka je $(1, 4)$. Nadalje,

$$f_{xx} = 4, \quad f_{xy} = -1, \quad f_{yy} = 2,$$

pa je Hesseova determinanta

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 7.$$

Specijalno je $H(1, 4) = 7 > 0$ i $f_{xx}(1, 4) = 4 > 0$, pa u $(1, 4)$ funkcija f ima lokalni minimum.

Na temelju ovog testa ne možemo zaključiti odmah da funkcija f ima globalni minimum u točki $(1, 4)$, nego samo da ima lokalni minimum. Za globalni minimum bismo trebali provesti daljnja ispitivanja koja smo proveli u primjeru 52.

Primjer 54.

Odredite ekstreme funkcije $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

Rješenje

Na temelju ovog testa ne možemo zaključiti odmah da funkcija f ima globalni minimum u točki $(1, 4)$, nego samo da ima lokalni minimum. Za globalni minimum bismo trebali provesti daljnja ispitivanja koja smo proveli u primjeru 52.

Primjer 54.

Odredite ekstreme funkcije $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

Rješenje

$$f_x = 3x^2 - 3y, \quad f_y = 3y^2 - 3x$$

Izjednačimo li parcijalne derivacije s 0, dobivamo sustav

$$3x^2 - 3y = 0$$

$$3y^2 - 3x = 0.$$

Iz prve jednadžbe slijedi da je $y = x^2$. Uvrstimo li to u drugu jednadžbu, dobivamo

$$x^4 - x = 0,$$

odnosno

$$x(x^3 - 1) = 0.$$

Realna rješenja te jednadžbe su $x_1 = 0$ i $x_2 = 1$. Iz $y = x^2$ slijedi da je $y_1 = 0$, $y_2 = 1$. Dakle, funkcija f ima dvije stacionarne točke $T_1(0, 0)$ i $T_2(1, 1)$.

Parcijalne derivacije drugog reda od f su

$$f_{xx} = 6x, \quad f_{xy} = -3, \quad f_{yy} = 6y,$$

pa je Hesseova determinanta jednaka

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{vmatrix}.$$

Specijalno, $H(0, 0) = -9 < 0$ pa je $(0, 0)$ sedlasta točka funkcije f . Nadalje,

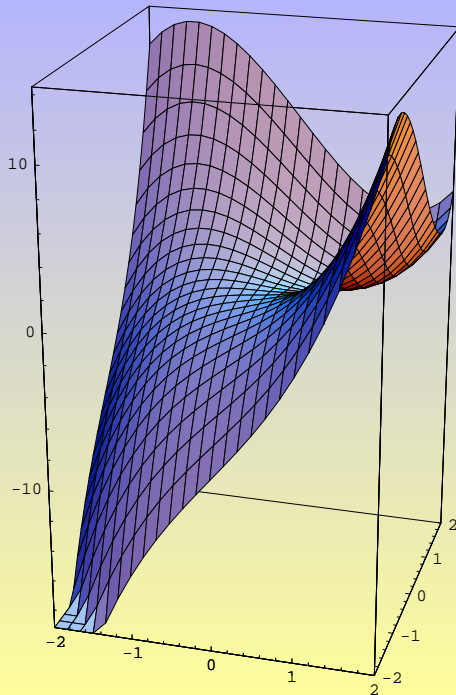
$$H(1, 1) = 27 > 0, \quad f_{xx}(1, 1) = 6 > 0,$$

pa funkcija f u točki $(1, 1)$ ima lokalni minimum i on je jednak $f(1, 1) = -1$.

Primijetimo ovdje da funkcija f nema globalni minimum u točki $(1, 1)$ jer je

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (-\infty, -\infty)} (x^3 + y^3 - 3xy) = -\infty.$$

Graf te funkcije izgleda



Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrice

Otv. i zatv. skup

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parc. der. višeg reda

Diferencijabilnost

Usmjerena derivacija

Tm. srednje vrijednosti

Parc. der. slož. funkc.

Implicitna funkcija

Ekstremi

Uvjetni ekstremi

Primjer 55.

Odredite ekstreme funkcije

$$f(x, y) = \frac{1}{2}(ax^2 + cy^2).$$

Rješenje

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrice

Otv. i zatv. skup

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parc. der. višeg reda

Diferencijabilnost

Usmjerena derivacija

Tm. srednje vrijednosti

Parc. der. slož. funkc.

Implicitna funkcija

Ekstremi

Uvjetni ekstremi



Primjer 55.

Odredite ekstreme funkcije

$$f(x, y) = \frac{1}{2}(ax^2 + cy^2).$$

Rješenje

$$f_x = ax, \quad f_y = cy$$

Izjednačimo li parcijalne derivacije s 0 i riješimo sustav, dobivamo samo jednu stacionarnu točku $(0, 0)$.

$$f_{xx} = a, \quad f_{xy} = 0, \quad f_{yy} = c$$

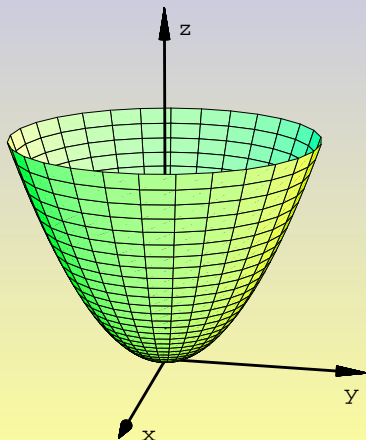
Hesseova determinanta od f je

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{vmatrix} = ac.$$

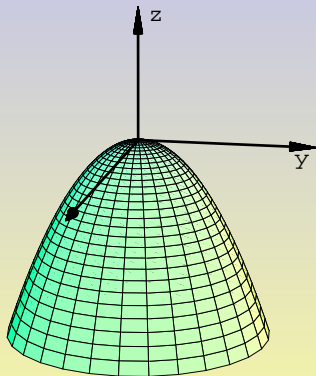
Specijalno je $H(0, 0) = ac$.

Razlikujemo sljedeće slučajeve:

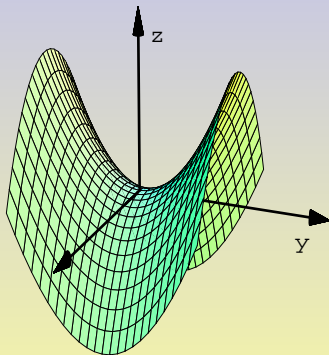
- $a > 0, c > 0$. U tom slučaju f ima lokalni minimum u $(0, 0)$ koji je ujedno i globalni minimum.



- $a < 0, c < 0$. U tom slučaju f ima lokalni maksimum u $(0, 0)$ koji je ujedno i globalni maksimum.



- $a < 0, c > 0$. U tom slučaju je $(0,0)$ sedlasta točka od f .



Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrice

Otv. i zatv. skup

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parc. der. višeg reda

Diferencijabilnost

Usmjerena derivacija

Tm. srednje vrijednosti

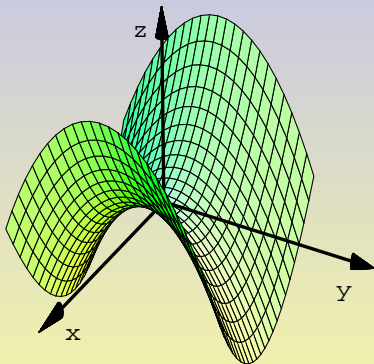
Parc. der. slož. funkc.

Implicitna funkcija

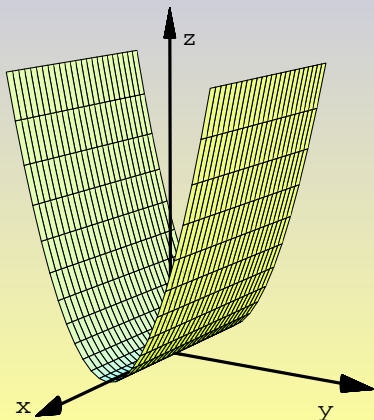
Ekstremi

Uvjetni ekstremi

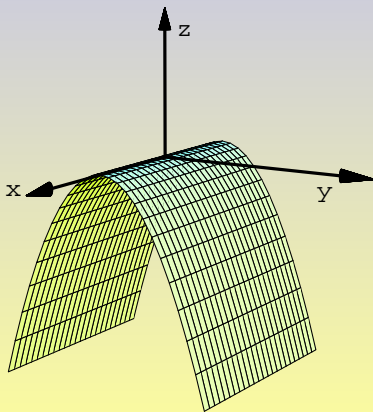
- $a > 0, c < 0$. U tom slučaju je $(0, 0)$ sedlasta točka od f .



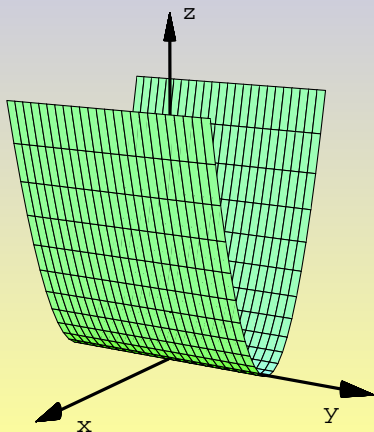
- $a = 0, c > 0$. U tom slučaju f ima lokalni minimum u $(0, 0)$ koji je ujedno i globalni minimum, ali nije strogi. U svim točkama $(x, 0)$, $x \in \mathbb{R}$, f ima globalne minimume koji nisu strogi.



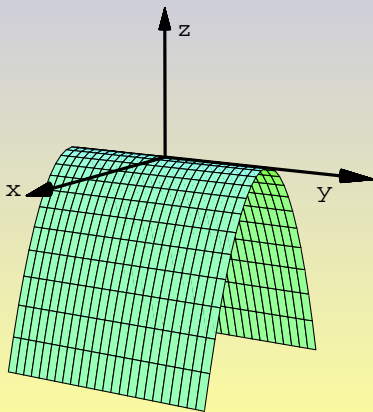
- $a = 0, c < 0$. U tom slučaju f ima lokalni maksimum u $(0, 0)$ koji je ujedno i globalni maksimum, ali nije strogi. U svim točkama $(x, 0)$, $x \in \mathbb{R}$, f ima globalne maksimume koji nisu strogi.



- $a > 0, c = 0$. U tom slučaju f ima lokalni minimum u $(0, 0)$ koji je ujedno i globalni minimum, ali nije strogi. U svim točkama $(0, y)$, $y \in \mathbb{R}$, f ima globalne minimume koji nisu strogi.



- $a < 0, c = 0$. U tom slučaju f ima lokalni maksimum u $(0, 0)$ koji je ujedno i globalni maksimum, ali nije strogi. U svim točkama $(0, y)$, $y \in \mathbb{R}$, f ima globalne maksimume koji nisu strogi.



Uvjetni ekstremi

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Pogledajmo funkciju $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ zadanu s

$$f(x, y) = ax + by + c, \quad a^2 + b^2 \neq 0, \quad \text{tj. } z \neq \text{const.}$$

Graf te funkcije je ravnina i jasno je da ta funkcija nema ekstrema na \mathbb{R}^2 . Naime, parcijalne derivacije te funkcije su

$$f_x = a, \quad f_y = b,$$

a kako je barem jedan od brojeva a i b različit od nule, ta funkcija nema stacionarnih točaka pa onda ni ekstrema.

No, u većini situacija nas ne zanimaju ekstremi funkcije na čitavoj njezinoj domeni nego na nekom podskupu, ili još specijalnije, ponekad treba naći ekstreme funkcije uz neki dodatni uvjet $g(x, y) = 0$.

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrrike
Otv. i zatv. skup
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parc. der. višeg reda
Diferencijabilnost
Usmjerena derivacija
Tm. srednje vrijednosti
Parc. der. slož. funkc.
Implicitna funkcija
Ekstremi

Uvjetni ekstremi



Tako npr., možemo tražiti ekstreme funkcije

$$f(x, y) = ax + by + c, \quad a^2 + b^2 \neq 0,$$

uz uvjet

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2,$$

tj.

$$g(x, y) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - r^2.$$

Drugim riječima, pitamo se da li f na kružnici

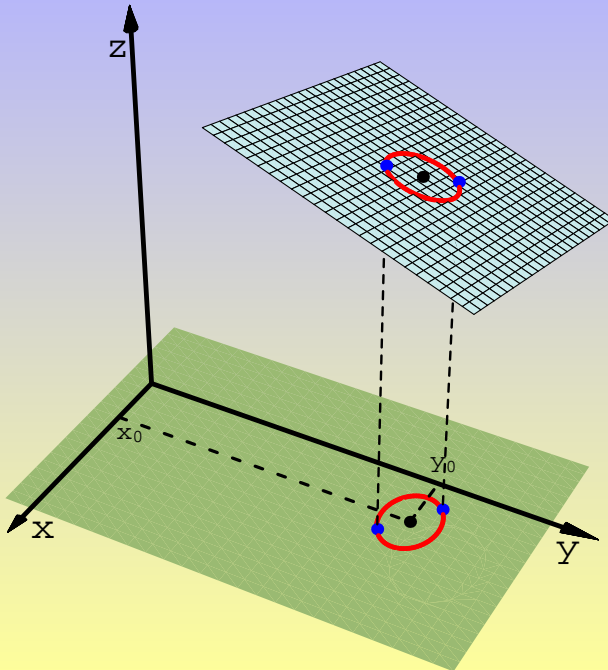
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

postiže ekstreme i u kojim točkama. Naravno, pitanje je da li takve točke postoje, i ako postoje kako ih pronaći.

Gledajući sliku, uvjereni smo da takve točke postoje.

Pitanje je kako da ih pronađemo.

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike
Otv. i zatv. skup
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parc. der. višeg reda
Diferencijabilnost
Usmjerena derivacija
Tm. srednje vrijednosti
Parc. der. slož. funkc.
Implicitna funkcija
Ekstremi
Uvjetni ekstremi



Isto tako, mogli smo npr., tražiti ekstreme funkcije

$$f(x, y) = ax + by + c, \quad a^2 + b^2 \neq 0$$

uz uvjet

$$Ax + By + C = 0,$$

tj. ekstreme funkcije f na pravcu $Ax + By + C = 0$.

Gledajući sliku vidimo da uz taj uvjet f nema ekstrema, odnosno da funkcija f na pravcu $Ax + By + C = 0$ ne postiže niti minimum, niti maksimum (osim možda za neki specijalni pravac).

Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrrike

Otv. i zatv. skup

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parc. der. višeg reda

Diferencijabilnost

Usmjerena derivacija

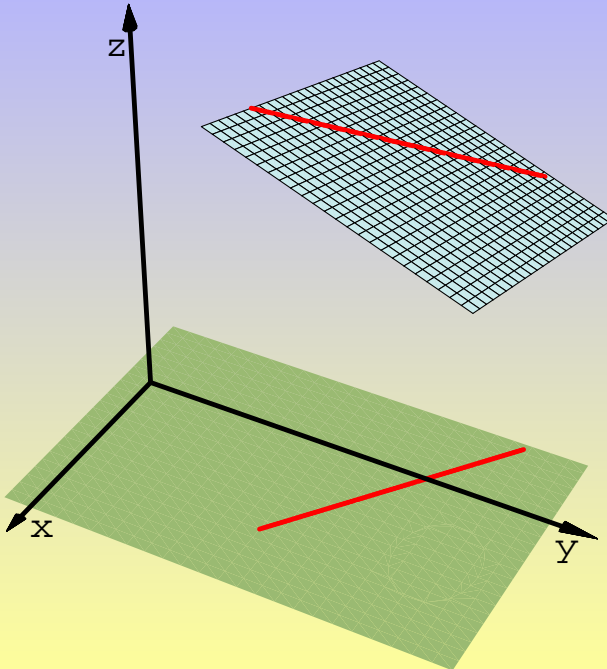
Tm. srednje vrijednosti

Parc. der. slož. funkc.

Implicitna funkcija

Ekstremi

Uvjetni ekstremi



Sljedeći teorem govori o postojanju ekstrema neprekidne funkcije na kompaktnom skupu.

Teorem 49 (O ekstremima neprekidne funkcije na kompaktnom skupu).

Neka je $K \subseteq \mathbb{R}^2$ kompaktna skup, a $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Tada f poprima globalni minimum i maksimum na skupu K .

Dakle, iz ovog teorema slijedi da funkcija

$$f(x, y) = ax + by + c$$

poprima minimum i maksimum na kružnici

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

jer je kružnica kompaktna skup u \mathbb{R}^2 .

Opišimo sada kako se traže ekstremi funkcije $z = f(x, y)$ uz uvjet $g(x, y) = 0$. Prva ideja koja se nameće je da iz uvjeta $g(x, y) = 0$ izrazimo jednu od varijabli x i y pomoću preostale, npr. $y = \varphi(x)$ pa onda tražimo ekstreme funkcije jedne varijable $z(x) = f(x, \varphi(x))$. No, u većini situacija uvjet može biti kompliciran pa to nije moguće napraviti, pa nam onda preostaje da se uvjetom služimo onako kako je zadan.

Uz pretpostavku da su funkcije f i g diferencijabilne imamo

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

$$0 = \frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy$$

Iz druge jednakosti uz uvjet $\frac{\partial g}{\partial y} \neq 0$ slijedi

$$dy = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial y}} dx.$$

Uvrstimo li to u prvu jednakost, dobivamo

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial y}} \right) dx.$$

Kako u stacionarnoj točki mora biti $df = 0$, slijedi

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial y}} = 0,$$

odnosno

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} = 0,$$

ili u obliku determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix} = 0.$$

Zaključujemo da je prvi redak proporcionalan s drugim, tj.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \frac{\partial g}{\partial y},$$

odnosno

$$\nabla f = \lambda \nabla g.$$

Dakle, dokazali smo da uz uvjet $\nabla g(P_0) \neq \mathbf{0}$ u stacionarnoj točki P_0 mora vrijediti

$$\nabla f(P_0) = \lambda \nabla g(P_0).$$

Ovo pokazuje da se traženje ekstrema funkcije $z = f(x, y)$ uz uvjet $g(x, y) = 0$ može svesti na traženje ekstrema funkcije

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

koju zovemo **Lagrangeova funkcija**, a faktor λ zovemo **Lagrangeov multiplikator**.

Zaista, deriviramo li funkciju L po x i y dobivamo

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y}.$$

i izjednačimo derivacije s 0, vidimo da je to ekvivalentno s
uvjetom $\nabla f = \lambda \nabla g$. Deriviramo li funkciju L po λ
dobivamo

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = g(x, y),$$

što nakon izjednačavanja s nulom daje početni uvjet
 $g(x, y) = 0$.

Primjer 56.

Nađite točke na krivulji $xy = 1$ koje su najbliže ishodištu.

Rješenje

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrice

Otv. i zatv. skup

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parc. der. višeg reda

Diferencijabilnost

Usmjerena derivacija

Tm. srednje vrijednosti

Parc. der. slož. funkc.

Implicitna funkcija

Ekstremi

Uvjetni ekstremi



Primjer 56.

Nađite točke na krivulji $xy = 1$ koje su najbliže ishodištu.

Rješenje

Udaljenost dviju točaka A i B u ravnini se računa po formuli

$$d(A, B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}.$$

Specijalno, udaljenost točke $T(x, y)$ od ishodišta je jednaka

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Stoga definiramo funkciju

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

i tražimo njezine ekstreme, ali ne na čitavoj domeni, nego uz uvjet $xy = 1$.

Kod definiranja funkcije f smo izostavili korijen, što će nam olakšati deriviranje, a korijen postiže ekstreme u istim točkama u kojima ih postiže izraz pod korijenom. Sada definiramo Lagrangeovu funkciju

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(xy - 1).$$

Njezine parcijalne derivacije su

$$L_x = 2x + \lambda y$$

$$L_y = 2y + \lambda x.$$

$$L_\lambda = xy - 1$$

Izjednačimo li te derivacije s 0, dobivamo sustav

$$2x + \lambda y = 0$$

$$2y + \lambda x = 0.$$

$$xy - 1 = 0$$

Iz prvih dviju jednadžbi dobivamo

$$\lambda = -\frac{2x}{y}, \quad \lambda = -\frac{2y}{x}$$

odnosno

$$x^2 = y^2. \quad (*)$$

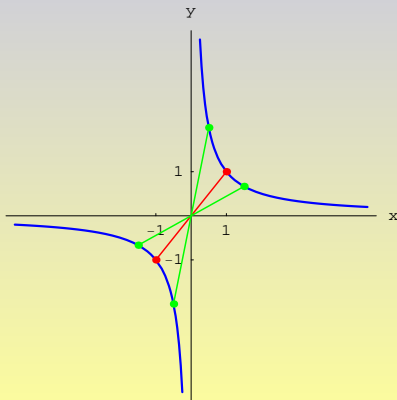
Iz treće jednadžbe slijedi $y = \frac{1}{x}$, pa uvrstimo li to u (*)
dobivamo

$$x^4 = 1.$$

Stoga su rješenja početnog sustava

$$(x_1, y_1) = (1, 1), \quad (x_2, y_2) = (-1, -1).$$

Dakle imamo dvije stacionarne točke $(1, 1)$ i $(-1, -1)$ od funkcije f uz uvjet $xy = 1$. Sada je pitanje da li u tim točkama funkcija ima ekstreme. Sada bismo trebali napraviti dodatna ispitivanja. Međutim iz prirode problema jasno je da minimum postoji, a da maksimuma nema.



Kako je $f(1, 1) = f(-1, -1) = 2$, postoje dvije točke $(1, 1)$ i $(-1, -1)$ na hiperboli $xy = 1$ koje su najbliže ishodištu i od njega su udaljene za $\sqrt{2}$.

Opišimo sada kako se u općenitom slučaju traže ekstremi kada je zadano više uvjeta. Neka je zadana realna funkcija n varijabli

$$z = f(x_1, \dots, x_n)$$

i neka je zadano m uvjeta ($m < n$)

$$g_1(x_1, \dots, x_n) = 0$$

$$g_2(x_1, \dots, x_n) = 0$$

$$\vdots$$

$$g_m(x_1, \dots, x_n) = 0.$$

Tada je traženje ekstrema funkcije f uz zadane uvjete ekvivalentno s traženjem ekstrema Lagrangeove funkcije

$$L(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(x_1, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x_1, \dots, x_n)$$

pri čemu su $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$.

Primjer 57.

Odredite udaljenost točke $T_1(x_1, y_1, z_1)$ od ravnine

$$\pi \dots Ax + By + Cz + D = 0.$$

Rješenje

Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrike

Otv. i zatv. skup

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parc. der. višeg reda

Diferencijabilnost

Usmjerena derivacija

Tm. srednje vrijednosti

Parc. der. slož. funkc.

Implicitna funkcija

Ekstremi

Uvjetni ekstremi



$$d(T_1, \pi) = \min_{T \in \pi} d(T_1, T)$$

Geometrijski je jasno da se taj minimum dostiže za onu točku $T \in \pi$ za koju je $TT_1 \perp \pi$. S druge strane je

$$d^2(T, T_1) = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2,$$

pa definiramo funkciju

$$f(x, y, z) = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2.$$

Tražimo ekstreme (tj. minimum) funkcije f uz uvjet

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

U tu svrhu definiramo Lagrangeovu funkciju

$$L(x, y, z, \lambda) = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 + \lambda(Ax + By + Cz + D)$$

Parcijalne derivacije te funkcije su

$$L_x = 2(x - x_1) + A\lambda$$

$$L_y = 2(y - y_1) + B\lambda$$

$$L_z = 2(z - z_1) + C\lambda$$

$$L_\lambda = Ax + By + Cz + D.$$

Izjednačimo li derivacije sa 0, dobivamo sustav

$$2(x - x_1) + A\lambda = 0$$

$$2(y - y_1) + B\lambda = 0$$

$$2(z - z_1) + C\lambda = 0$$

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Iz prve tri jednadžbe slijedi da je

$$\begin{aligned}x &= -\frac{A\lambda}{2} + x_1 \\y &= -\frac{B\lambda}{2} + y_1, \\z &= -\frac{C\lambda}{2} + z_1\end{aligned}\quad (\clubsuit)$$

Uvrstimo to u četvrtu jednadžbu pa dobivamo

$$\lambda = 2 \cdot \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{A^2 + B^2 + C^2}.\quad (\spadesuit)$$

Sada iz (\clubsuit) i (\spadesuit) slijedi da je

$$x - x_1 = -A \cdot \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{A^2 + B^2 + C^2}$$

$$y - y_1 = -B \cdot \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{A^2 + B^2 + C^2}$$

$$z - z_1 = -C \cdot \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{A^2 + B^2 + C^2}$$

Uvrstimo li to u

$$d^2(T, T_1) = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2,$$

dobivamo

$$d^2(T, T_1) = \frac{A^2 + B^2 + C^2}{(A^2 + B^2 + C^2)^2} \cdot (Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D)^2,$$

odnosno

$$d^2(T, T_1) = \frac{(Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D)^2}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Stoga je

$$d(T, T_1) = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Pogledajmo još jedan primjer traženja ekstrema na kompaktnom skupu s nepraznim interiorom.

Primjer 58.

Odredite ekstreme funkcije $f(x, y) = 10 - x - y$ na skupu

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Rješenje

Zapravo, tražimo ekstreme funkcije f na krugu polumjera 1 sa središtem u ishodištu. Parcijalne derivacije funkcije f su

$$f_x = -1, \quad f_y = -1.$$

Vidimo da f nema stacionarnih točaka, pa funkcija f ne postiže ekstreme u interioru skupa S . Kako je S kompaktan skup, a f neprekidna funkcija, onda ona mora postizati minimum i maksimum na skupu S . Kako se taj minimum i maksimum ne postižu u unutrašnjosti skupa S , onda se oni postižu na njegovom rubu, tj. na kružnici $x^2 + y^2 = 1$. Stoga, sada trebamo tražiti ekstreme funkcije f uz uvjet $x^2 + y^2 = 1$.

Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrike

Otv. i zatv. skup

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parc. der. višeg reda

Diferencijabilnost

Usmjerena derivacija

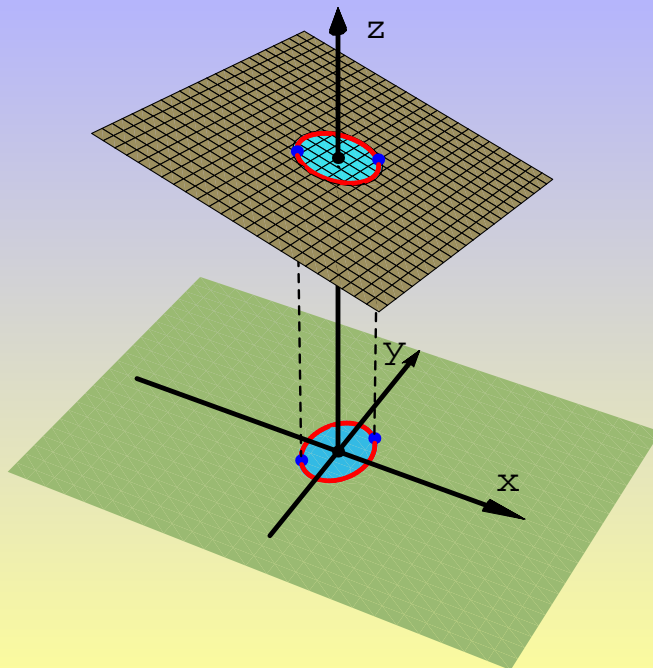
Tm. srednje vrijednosti

Parc. der. slož. funkc.

Implicitna funkcija

Ekstremi

Uvjetni ekstremi



Definiramo Lagrangeovu funkciju

$$L(x, y, \lambda) = 10 - x - y + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Parcijalne derivacije te funkcije su

$$L_x = -1 + 2\lambda x$$

$$L_y = -1 + 2\lambda y$$

$$L_\lambda = x^2 + y^2 - 1.$$

Izjednačimo li derivacije s 0, dobivamo sustav

$$-1 + 2\lambda x = 0$$

$$-1 + 2\lambda y = 0$$

$$x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Iz prvih dviju jednadžbi dobivamo

$$x = \frac{1}{2\lambda}, \quad y = \frac{1}{2\lambda}.$$

Uvrstimo li to u treću jednadžbu, dobit ćemo

$$\lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Dakle, dobivamo dvije stacionarne točke

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \quad \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2} \right).$$

Kako je S kompaktan skup, u jednoj od njih f poprima minimum, a u drugoj maksimum na S .

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 10 - \sqrt{2}, \quad f\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right) = 10 + \sqrt{2}$$

Dio VII

Plohe u prostoru

- Plohe u prostoru
 - Zadavanje plohe
 - Sfera i elipsoid
 - Torus
 - Rotacijske plohe
 - Pravčaste plohe
 - Tangencijalna ravnina i normala plohe

Plohe u prostoru

Zadavanje plohe

Sfera i elipsoid

Torus

Rotacijske plohe

Pravčaste plohe

Tangencijalna ravnina

Zadavanje plohe

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Plohe u prostoru

Zadavanje plohe

Sfera i elipsoid

Torus

Rotacijske plohe

Pravčaste plohe

Tangencijalna ravnina

Najjednostavnija ploha u prostoru je **ravnina**. Upoznali smo razne oblike jednačbe ravnine i to:

- Opći ili implicitni oblik jednačbe ravnine

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

gdje su $A, B, C, D \in \mathbb{R}$, $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$

- Eksplicitni oblik jednačbe ravnine kojeg možemo dobiti iz općeg oblika uz uvjet da je $C \neq 0$

$$z = -\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y - \frac{D}{C}$$

- Vektorski oblik jednadžbe ravnine

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + u\vec{a} + v\vec{b},$$

gdje je \vec{r}_0 radijvektor točke kojom ravnina prolazi, a razapeta je vektorima \vec{a} i \vec{b} .

- Parametarski oblik jednadžbe ravnine kojeg dobijemo iz vektorskog oblika jednadžbe ravnine

$$x = x_0 + a_x u + b_x v$$

$$y = y_0 + a_y u + b_y v$$

$$z = z_0 + a_z u + b_z v$$

gdje su

$$\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0), \quad \vec{a} = (a_x, a_y, a_z), \quad \vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$$

Važno je uočiti kod parametarskog oblika da su parametri u i v proizvoljni realni brojevi i da za svaki izbor $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ dobijemo neku točku promatrane ravnine u prostoru. Mijenjajući parametre u i v dobijemo sve točke promatrane ravnine i samo te točke. Stoga na parametarski oblik jednadžbe ravnine možemo gledati kao na preslikavanje

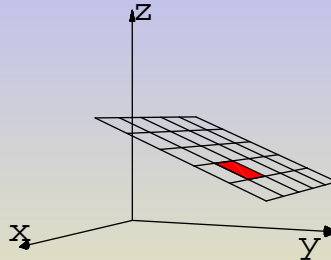
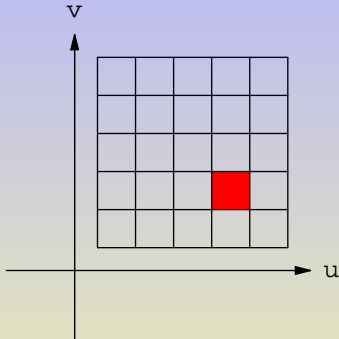
$$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

koje svakoj točki $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ pridružuje točku $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, gdje je

$$x = x_0 + a_x u + b_x v$$

$$y = y_0 + a_y u + b_y v$$

$$z = z_0 + a_z u + b_z v$$



$$x(u, v) = x_0 + a_x u + b_x v$$

$$y(u, v) = y_0 + a_y u + b_y v$$

$$z(u, v) = z_0 + a_z u + b_z v$$

Plohu \mathcal{P} u prostoru možemo zadati na tri različita načina:

- Implicitni oblik jednadžbe plohe

$$\mathcal{P} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : F(x, y, z) = 0 \right\}$$

- Eksplicitni oblik jednadžbe plohe

$$\mathcal{P} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y) \right\}$$

- Parametarski oblik jednadžbe plohe

$$\mathcal{P} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v) \right\}$$

Daljnje je pitanje uvjeta koje moraju zadovoljavati pojedini oblici jednadžbe plohe kako bismo ih mogli korisno upotrijebiti pri proučavanju ploha.

Ako je ploha zadana implicitno jednađžbom

$$F(x, y, z) = 0,$$

tada tražimo da je funkcija F diferencijabilna, tj. postoji diferencijal

$$dF = F_x dx + F_y dy + F_z dz,$$

pri čemu je još u promatranoj točki barem jedna od parcijalnih derivacija F_x , F_y , F_z različita od nule.

Kao što ćemo vidjeti kasnije, vektor (F_x, F_y, F_z) je normala tangencijalne ravnine na plohu zadanu implicitno jednađžbom $F(x, y, z) = 0$, pa nam gornji uvjeti osiguravaju da ploha u svakoj svojoj točki ima tangencijalnu ravninu, odnosno da normala ne degenerira u nulvektor.

Ako je ploha zadana eksplicitno jednadžbom

$$z = f(x, y),$$

tada tražimo da je f diferencijabilna funkcija, tj. postoji diferencijal

$$dz = f_x dx + f_y dy.$$

Kasnije ćemo vidjeti da je vektor $(f_x, f_y, -1)$ normala tangencijalne ravnine na plohu zadanu eksplicitno jednadžbom $z = f(x, y)$, pa nam gornji uvjet osigurava da u svakoj točki ploha ima tangencijalnu ravninu.

Ako je ploha zadana parametarski jednadžbama

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v),$$

tada tražimo da su preslikavanja x, y, z diferencijabilna i da je rang matrice

$$\begin{bmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{bmatrix}$$

jednak 2. Točke u kojima je taj uvjet ispunjen zovemo **regularne točke**.

Radi se o tome da je preslikavanje

$$(u, v) \mapsto (x, y, z)$$

zadano vektorskom jednadžbom

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}$$

diferencijabilno i obostrano jednoznačno (tj. ploha ne presijeca samu sebe). S druge strane, regularnost nam osigurava da su vektori \mathbf{r}_u i \mathbf{r}_v linearno nezavisni, što je važno jer ćemo vidjeti kasnije da je vektor

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$$

normala tangencijalne ravnine na plohu zadanu parametarski.

Plohe u prostoru

Zadavanje plohe

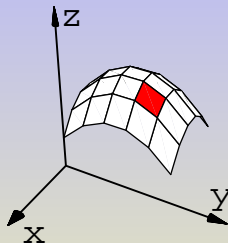
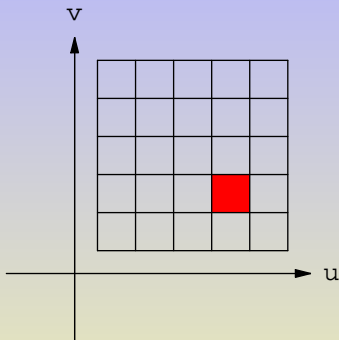
Sfera i elipsoid

Torus

Rotacijske plohe

Pravčaste plohe

Tangencijalna ravnina



$$x = x(u, v)$$

$$y = y(u, v)$$

$$z = z(u, v)$$

Neka je M ploha zadana parametarskim jednadžbama

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v),$$

odnosno

$$r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

pri čemu je

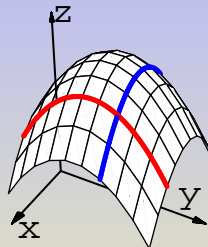
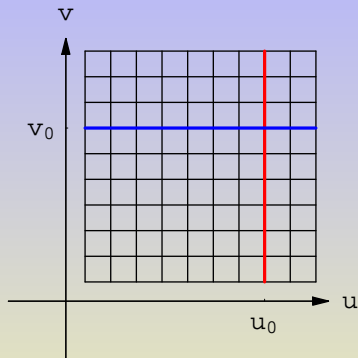
$$r : D \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad D = I \times J \subseteq \mathbb{R}^2,$$

gdje su I i J otvoreni intervali.

Uočimo točku $(u_0, v_0) \in D$. Restrikcija od r na $I \times \{v_0\}$ je očito krivulja $r(u, v_0) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$. Ta se krivulja zove **parametarska u -crta** ili **u -krivulja**. Njezin graf se nalazi na plohi M i prolazi točkom T_0 .

Isto tako, restrikcija od r na $\{u_0\} \times J$ je krivulja $r(u_0, v) : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ čiji graf je također na plohi M i prolazi točkom T_0 , a zove se **parametarska v -crta** ili **v -krivulja**.

Skup svih parametarskih u -crta i v -crta tvori jednu mrežu krivulja koju zovemo **parametarska mreža plohe M** .



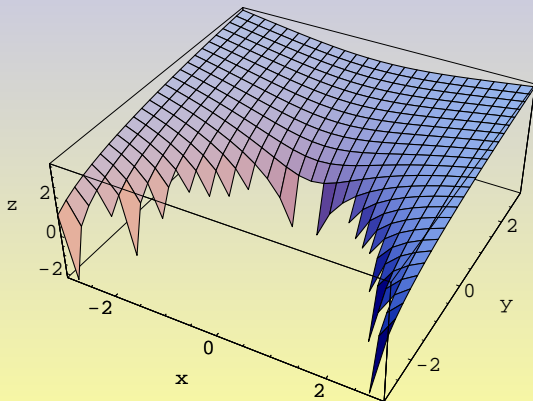
Plava krivulja na plohi je u -krivulja, a crvena krivulja na plohi je v -krivulja.

Parametarski oblik jednadžbe plohe je najvažniji od ova tri oblika. S druge strane, ploha može općenito imati više različitih parametrizacija, što može biti korisno u primjenama, pogotovo kod crtanja plohe na računalu. Pogledajmo jedan primjer iz kojeg ćemo vidjeti važnost pogodnog odabira parametrizacije plohe.

Pretpostavimo da želimo na računalu, npr. pomoću programskog paketa Mathematica, nacrtati plohu zadanu eksplicitno jednadžbom $z = \ln(2x^2 + 5y)$. Mathematica ima naredbu Plot3D koja crta plohu zadanu eksplicitno na nekom pravokutniku. Napišemo li

$$\text{Plot3D}[\text{Log}[2x^2 + 5y], \{x, -3, 3\}, \{y, -3, 3\}]$$

time smo Mathematici rekli da neka nacrtaj graf zadane funkcije birajući varijable x i y između -3 i 3 . Nakon nekoliko javljenih grešaka Mathematica će dati ovakvu sliku



Ne bismo trebali biti previše zadovoljni takvom slikom.
Kao prvo, zašto su takve "špice" na pojedinim dijelovima
kad je zadana funkcija dovoljno "lijepa" da se to ne bi
smjelo dogoditi, i s druge strane, zašto nam je
Mathematica u toku crtanja grafa javila neke greške.

Navedeni problemi se javljaju zbog domene funkcije

$$z = \ln(2x^2 + 5y).$$

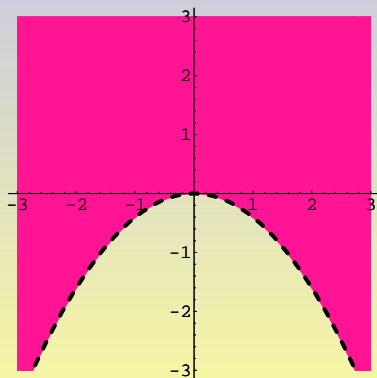
Odredimo domenu te funkcije. Zbog logaritma mora biti

$$2x^2 + 5y > 0,$$

odnosno

$$y > -\frac{2}{5}x^2.$$

Dakle, u domeni zadane funkcije se nalaze sve točke ravnine koje su izvan parabole $y = -\frac{2}{5}x^2$. Taj skup u ravnini izgleda ovako



Mi smo zapravo Mathematici rekli da nam nacrtaj graf te funkcije na kvadratu čiji su vrhovi u točkama

$$(-3, -3), \quad (3, -3), \quad (3, 3), \quad (-3, 3).$$

No, taj kvadrat nije čitav sadržan u domeni te funkcije i to je razlog zašto nam je Mathematica javljala greške i na kraju dala "ružan" graf.

Kako ipak nacrtati tu plohu na zadanom kvadratu, tj. kako prisiliti Mathematicu da izbjegava točke koje su istovremeno unutar zadanog kvadrata i unutar parabole

$$y = -\frac{2}{5}x^2 ?$$

Stvar je u tome da jednadžbu plohe napišemo u parametarskom obliku, a Mathematica nam nudi naredbu ParametricPlot3D za crtanje plohe koja je zadana u parametarskom obliku. Međutim, nije baš svejedno koju parametrizaciju odaberemo. Ako bismo varijable x i y uzeli za parametre, tj. ako stavimo

$$x = u, \quad y = v$$

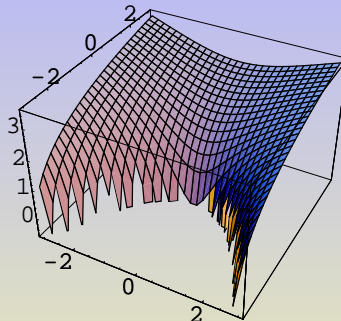
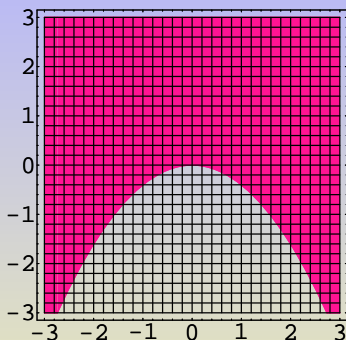
dobivamo parametrizaciju

$$r_1(u, v) = (u, v, \ln(2u^2 + 5v)).$$

Napišemo li sada u Mathematici

```
ParametricPlot3D[{u, v, Log[2u2 + 5v]}, {u, -3, 3}, {v, -3, 3}]
```

rezultat će biti isti kao i prije. Mathematica će opet javljati greške i dati "ružan" graf. Zašto? Naime, ovom parametrizacijom nismo ništa promijenili "šetnju" po domeni. Kada je jedan od parametara u i v fiksiran, a drugi se mijenja, mi se tada po domeni šćemo paralelno s jednom od koordinatnih osi, što opet nije dobro jer ako su $u, v \in [-3, 3]$, opet ćemo ući unutar parabole $y = -\frac{2}{5}x^2$. Drugim riječima, u -crte i v -crte u uv -ravnini su pravci paralelni s koordinatnim osima.



$$r_1(u, v) = (u, v, \ln(2u^2 + 5v))$$

$$u, v \in [-3, 3]$$

Pitanje je koju parametrizaciju uzeti. Trebalo bi uzeti onu parametrizaciju takvu da dok je jedan od parametara u i v fiksiran, a drugi se mijenja, da se tada šćemo po paraboli "paralelnoj" sa parabolom $y = -\frac{2}{5}x^2$, tj. po paraboli $y = -\frac{2}{5}x^2 + c$, gdje je $c \in \langle 0, \infty \rangle$.

U tu svrhu stavimo da je

$$x = u, \quad y = -\frac{2}{5}u^2 + v,$$

pa dobivamo parametrizaciju

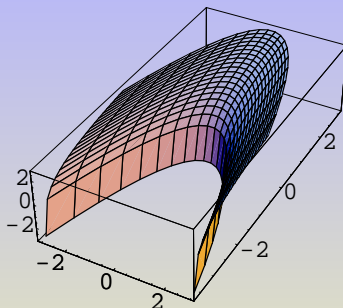
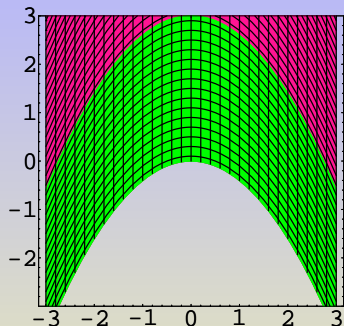
$$r_2(u, v) = \left(u, -\frac{2}{5}u^2 + v, \ln 5v \right).$$

Što smo dobili ovom parametrizacijom?

Mijenjajući parametar v dobivamo parabole "paralelne" s parabolom $y = -\frac{2}{5}x^2$, tj. kada je $v = v_0$ fiksiran, a u se mijenja, mi se šćemo po paraboli $y = -\frac{2}{5}x^2 + v_0$, što smo i htjeli. Kada je $u = u_0$ fiksiran, tada se šćemo po pravcu paralelnom s y -osi, tj. preciznije, po polupravcu paralelnom s y -osi koji ima početak na paraboli $y = -\frac{2}{5}x^2$ i nalazi se izvan nje. Stoga, ako je $u \in \mathbb{R}$, $v \in \langle 0, \infty \rangle$, nikad nećemo izaći izvan promatranog skupa. Dakle, ovo je tražena parametrizacija koja će nam dati "lijepi" graf. Napišemo li sada u Mathematici

$$\text{ParametricPlot3D}[\{u, -\frac{2}{5}u^2 + v, \ln[5v]\}, \{u, -3, 3\}, \{v, 0.01, 3\}]$$

dobivamo



$$r_2(u, v) = \left(u, -\frac{2}{5}u^2 + v, \ln 5v \right)$$

$$u \in [-3, 3], \quad v \in [0.01, 3]$$

Na taj način je nacrtan graf samo za točke u zelenom dijelu domene.

Kako nacrtati graf na preostalom dijelu kvadrata koji jest u domeni zadane funkcije. Trik je u tome da se uzme veći interval za parametar v , npr. $v \in [0.01, 8]$. Na taj način ćemo dodatnim parabolama popuniti preostali dio kvadrata, ali ćemo pokupiti i točke izvan tog kvadrata (koje jesu u domeni, ali mi ne želimo na tom dijelu crtati plohu).

Plohe u prostoru

Zadavanje plohe

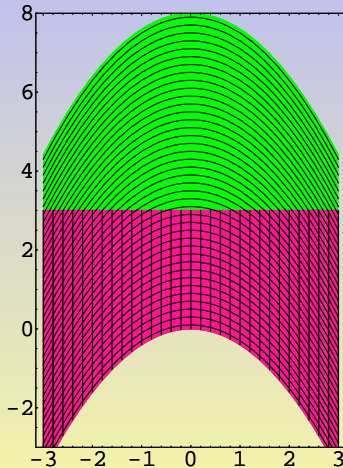
Sfera i elipsoid

Torus

Rotacijske plohe

Pravčaste plohe

Tangencijalna ravnina



Mathematica nam nudi opciju PlotRange kojom određujemo koje će točke na grafu biti prikazane, a koje ne. Na primjer, kada napišemo

$$\text{PlotRange} \rightarrow \{\{-3,3\},\{-3,3\},\{-4,4\}\}$$

Mathematica će prikazati samo onaj dio grafa koji se nalazi unutar kocke koja sadrži točke (x, y, z) za čije koordinate vrijedi

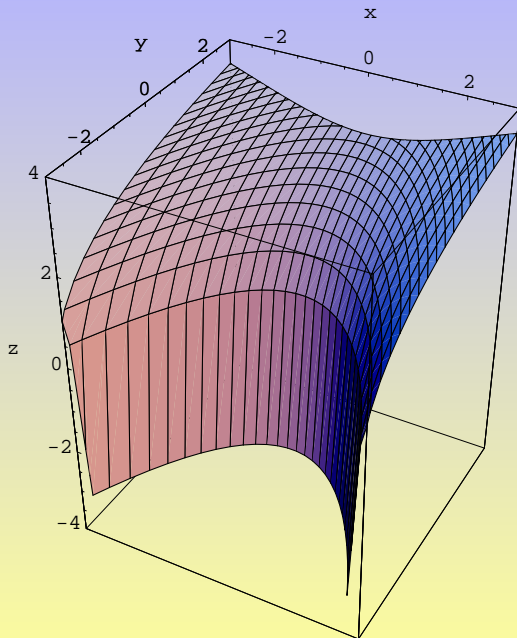
$$x \in [-3, 3], \quad y \in [-3, 3], \quad z \in [-4, 4].$$

Dakle, napišemo li

$$\text{ParametricPlot3D}[\{u, -\frac{2}{5}u^2+v, \ln[5v]\}, \{u, -3, 3\}, \{v, 0.01, 8\},$$

$$\text{PlotRange} \rightarrow \{\{-3, 3\}, \{-3, 3\}, \{-4, 4\}\}]$$

dobit ćemo graf na željenom području.



Sfera i elipsoid

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Plohe u prostoru
Zadavanje plohe

Sfera i elipsoid

Torus

Rotacijske plohe

Pravčaste plohe

Tangencijalna ravnina

Implicitna jednadžba sfere polumjera R s centrom u ishodištu glasi

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad (*)$$

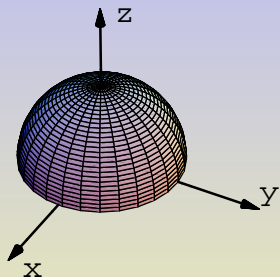
a s centrom u točki (x_0, y_0, z_0)

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2.$$

Napišemo li eksplicitni oblik od $(*)$, dobivamo

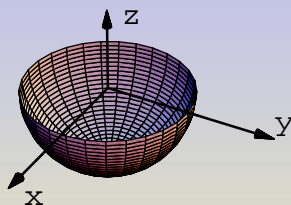
$$z = \pm \sqrt{R^2 - x^2 - y^2},$$

pri čemu ako uzmemo predznak "+" dobivamo gornju polusferu, a za predznak "-" donju polusferu.



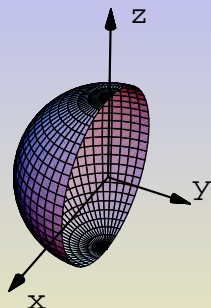
gornja polusfera

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$



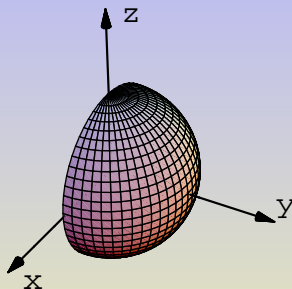
donja polusfera

$$z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$



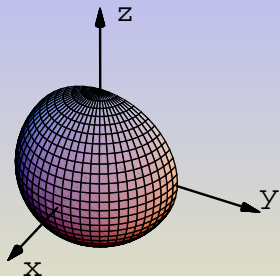
lijeva polusfera

$$y = -\sqrt{R^2 - x^2 - z^2}$$



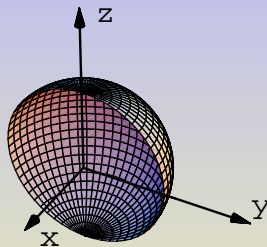
desna polusfera

$$y = \sqrt{R^2 - x^2 - z^2}$$



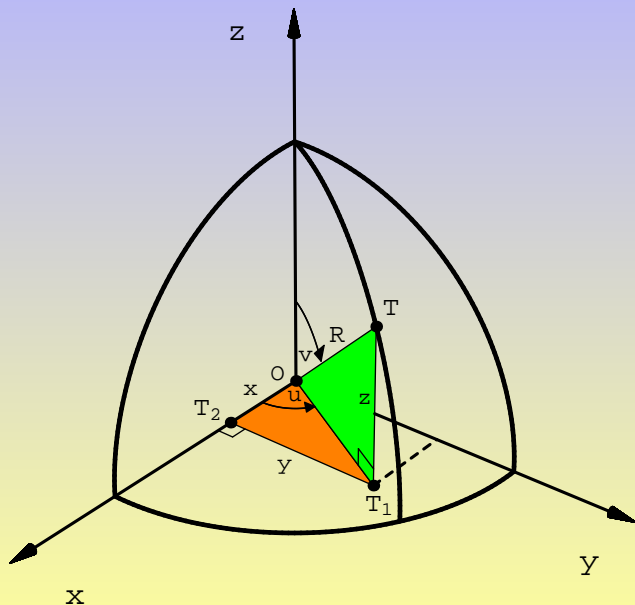
prednja polusfera

$$x = \sqrt{R^2 - y^2 - z^2}$$



stražnja polusfera

$$x = -\sqrt{R^2 - y^2 - z^2}$$



Izvedimo sada parametarske jednadžbe sfere

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Neka je $T(x, y, z)$ točka na zadanoj sferi. Neka je $T_1(x, y, 0)$ ortogonalna projekcija točke T na xy -ravninu. Tada su trokuti OT_1T i OT_2T_1 pravokutni (vidi sliku). Iz trokuta OT_1T slijedi

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - v\right) = \frac{|T_1T|}{|OT|} = \frac{z}{R},$$

odnosno

$$z = R \cos v.$$

Iz trokuta OT_2T_1 slijedi

$$\cos u = \frac{|OT_2|}{|OT_1|} = \frac{x}{|OT_1|}, \quad \sin u = \frac{|T_2T_1|}{|OT_1|} = \frac{y}{|OT_1|}. \quad (\diamond)$$

Iz trokuta OT_1T dobivamo da je

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right) = \frac{|OT_1|}{|OT|} = \frac{|OT_1|}{R},$$

odnosno

$$|OT_1| = R \sin v. \quad (\diamond)$$

Uvrstimo li (\diamond) u (\diamond) dobivamo

$$x = R \sin v \cos u, \quad y = R \sin v \sin u.$$

Dakle, parametarske jednadžbe sfere su

$$x = R \cos u \sin v$$

$$y = R \sin u \sin v$$

$$z = R \cos v$$

ili u vektorskom obliku

$$r(u, v) = (R \cos u \sin v, R \sin u \sin v, R \cos v),$$

gdje je

$$u \in [0, 2\pi], \quad v \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Ova parametrizacija se još zove i **geografska parametrizacija** sfere jer su ovdje u -crte paralele, a v -crte su meridijani.

Uređenu trojku (R, u, v) zovemo **sferne koordinate** točke u prostoru.

Implicitna jednadžba elipsoida sa središtem u ishodištu čije su poluosi a , b i c glasi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Gledajući parametarske jednadžbe sfere lako možemo zaključiti i provjeriti da su parametarske jednadžbe elipsoida

$$x = a \cos u \sin v$$

$$y = b \sin u \sin v$$

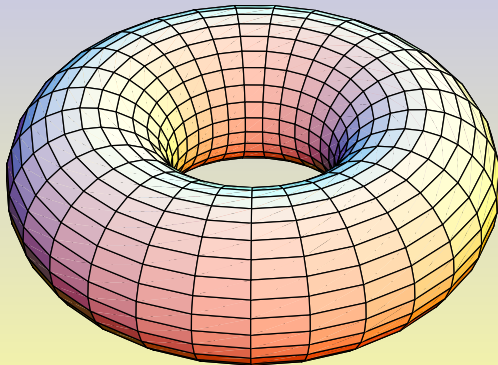
$$z = c \cos v$$

Zadatak 22.

Izvedite parametarske jednadžbe ostalih kvadrika.

Torus

Torus je ploha koja nastaje rotacijom kružnice oko neke osi.



Bez smanjenja općenitosti, neka je R polumjer centralne linije torusa, tj. kružnice po kojoj rotira središte manje kružnice, a r polumjer kružnice koja rotira. Uzmimo da je $r < R$. Neka je z -os os rotacije i neka torus nastaje rotacijom kružnice

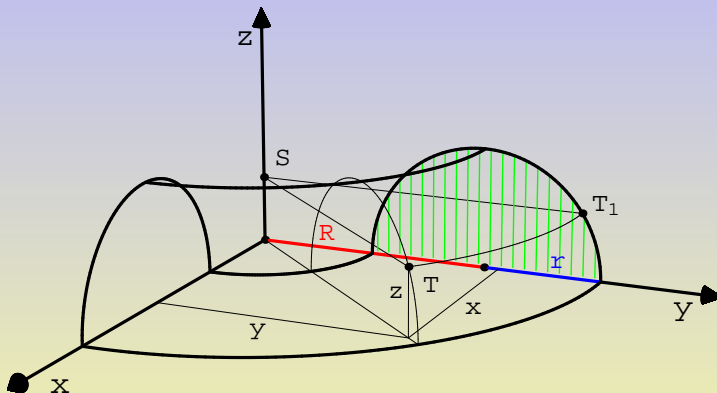
$$\begin{cases} (y - R)^2 + z^2 = r^2 \\ x = 0 \end{cases}.$$

Neka je $T(x, y, z)$ točka na torusu nastala rotacijom točke $T_1(0, y_1, z_1)$ zadane kružnice oko z -osi. Tada je

$$z_1 = z \quad \text{i} \quad |ST_1| = |ST|.$$

Sa slike se vidi da je

$$|ST| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$



Prema tome, T_1 ima koordinate

$$T_1(0, \sqrt{x^2 + y^2}, z).$$

Točka T_1 je na zadanoj kružnici pa vrijedi

$$(y_1 - R)^2 + z_1^2 = r^2,$$

odnosno

$$(\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 = r^2.$$

Kvadriramo li prethodnu jednakost, dobivamo

$$x^2 + y^2 - 2R\sqrt{x^2 + y^2} + R^2 + z^2 = r^2,$$

odnosno

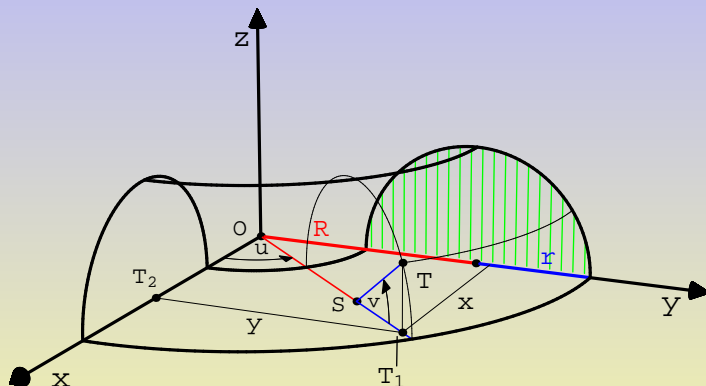
$$x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2 = 2R\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Kvadriramo li još jedanput prethodnu jednakost dobivamo implicitnu jednadžbu torusa

$$(x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2)^2 - 4R^2(x^2 + y^2) = 0.$$

Vidimo da je torus algebarska ploha 4. reda.

Izvedimo sada još i parametarske jednadžbe torusa.



Neka je $T(x, y, z)$ točka na torusu. Uz oznake sa slike vidimo da je

$$z = |TT_1|, \quad |ST| = r, \quad |OS| = R.$$

Nadalje, trokut TT_1S je pravokutan pa imamo

$$z = r \sin v, \quad |ST_1| = r \cos v.$$

Isto tako,

$$|OT_1| = |OS| + |ST_1| = R + r \cos v.$$

Iz pravokutnog trokuta OT_2T_1 slijedi

$$x = |OT_1| \cos u, \quad y = |OT_1| \sin u.$$

Iz navedenih razmatranja dobivamo parametarske
jednadžbe torusa

$$x = (R + r \cos v) \cos u$$

$$y = (R + r \cos v) \sin u$$

$$z = r \sin v$$

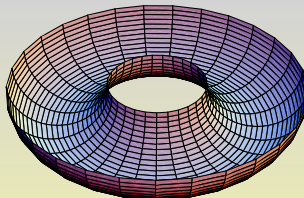
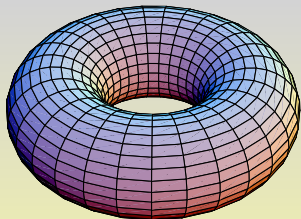
pri čemu je

$$u \in [0, 2\pi], \quad v \in [0, 2\pi].$$

U ovoj parametrizaciji u -crte su horizontalne kružnice na torusu, a v -crte su poprečne kružnice.

Razlikujemo tri vrste torusa:

- **Ring torus:** $r < R$



Plohe u prostoru

Zadavanje plohe

Sfera i elipsoid

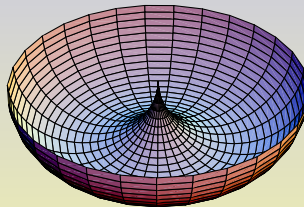
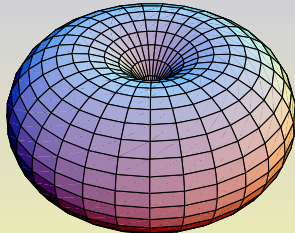
Torus

Rotacijske plohe

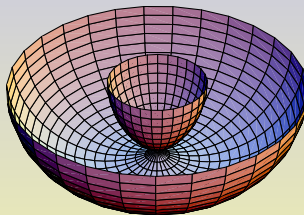
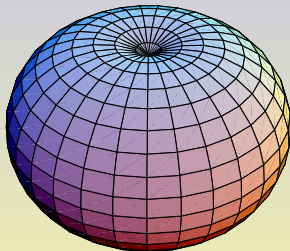
Pravčaste plohe

Tangencijalna ravnina

- **Horn torus:** $r = R$



- **Spindle torus:** $r > R$



Rotacijske plohe

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Plohe u prostoru
Zadavanje plohe
Sfera i elipsoid
Torus

Rotacijske plohe

Pravčaste plohe
Tangencijalna ravnina

Rotacijska ploha je skup točaka prostora koji nastaje rotacijom neke krivulje oko neke osi. Tu krivulju zovemo **generatrisa** ili **profilna krivulja** te plohe.

Uzmimo da je zadana krivulja u yz -ravnini jednadžbom

$$f(y, z) = 0$$

i neka je os z os rotacije i pretpostavimo da krivulja ne siječe os z . Nađimo implicitnu jednadžbu plohe koja nastaje rotacijom ove krivulje oko osi z .



Plohe u prostoru

Zadavanje plohe

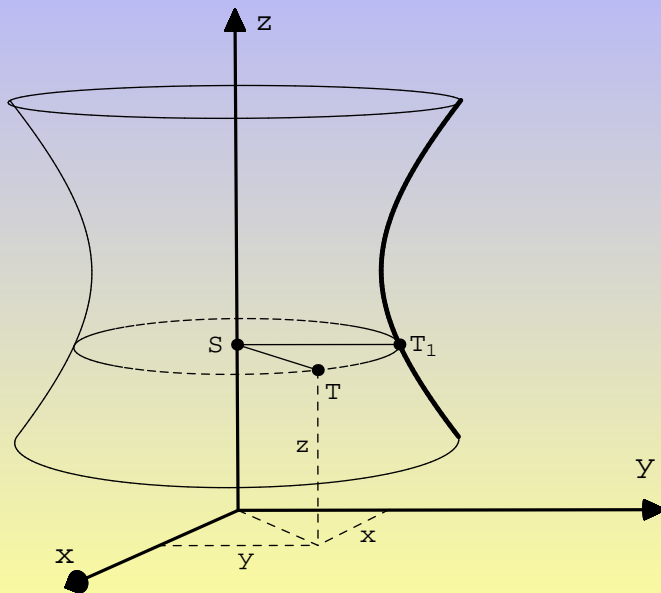
Sfera i elipsoid

Torus

Rotacijske plohe

Pravčaste plohe

Tangencijalna ravnina



Neka je $T(x, y, z)$ točka plohe nastala rotacijom točke $T_1(0, y_1, z_1)$ krivulje $f(y, z) = 0$ oko osi z . Sa slike vidimo da vrijedi

$$z_1 = z, \quad y_1 = |ST_1| = |ST| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Stoga točka T_1 ima koordinate $(0, \sqrt{x^2 + y^2}, z)$.

Kako je točka T_1 na zadanoj krivulji, slijedi da je

$$f(y_1, z_1) = 0,$$

a iz toga dobivamo implicitnu jednadžbu rotacijske plohe

$$f(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0.$$

Izvedimo sada još i parametarske jednadžbe rotacijske plohe. Pretpostavimo da je ploha dobivena rotacijom krivulje

$$c(u) = (0, g(u), h(u)), \quad u \in I \subseteq \mathbb{R}$$

koja se nalazi u yz -ravnini i rotira oko osi z .

Neka je $T(x, y, z)$ točka plohe nastala rotacijom točke $T_1(0, y_1, z_1)$ krivulje c oko osi z . Tada je

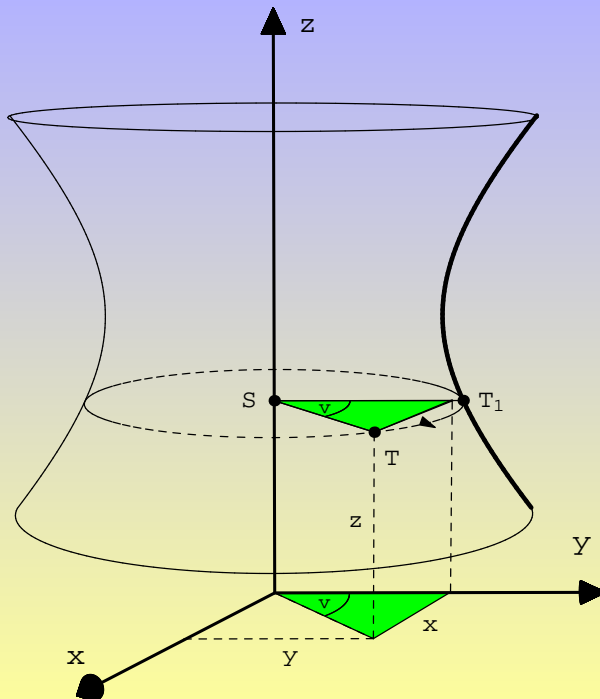
$$z = z_1 = h(u), \quad |ST| = |ST_1| = y_1 = g(u).$$

Nadalje, iz označenih trokuta na slici slijedi

$$\sin v = \frac{x}{|ST|}, \quad \cos v = \frac{y}{|ST|},$$

odnosno

$$x = g(u) \sin v, \quad y = g(u) \cos v.$$



Dakle, parametarske jednadžbe plohe dobivene rotacijom krivulje

$$c(u) = (0, g(u), h(u))$$

oko osi z su

$$x = g(u) \sin v$$

$$y = g(u) \cos v$$

$$z = h(u)$$

gdje je $u \in I$, $v \in [0, 2\pi]$.

U slučaju da zadana krivulja rotira oko osi y , parametarske jednadžbe dobivene plohe su

$$x = h(u) \sin v$$

$$y = g(u)$$

$$z = h(u) \cos v$$

Parametarske jednadžbe plohe dobivene rotacijom krivulje

$$c(u) = (g(u), 0, h(u))$$

oko osi x su

$$x = g(u)$$

$$y = h(u) \sin v$$

$$z = h(u) \cos v$$

a u slučaju rotacije oko osi z

$$x = g(u) \cos v$$

$$y = g(u) \sin v$$

$$z = h(u)$$

Parametarske jednadžbe plohe dobivene rotacijom krivulje

$$c(u) = (g(u), h(u), 0)$$

oko osi x su

$$x = g(u)$$

$$y = h(u) \cos v$$

$$z = h(u) \sin v$$

a u slučaju rotacije oko osi y

$$x = g(u) \cos v$$

$$y = h(u)$$

$$z = g(u) \sin v$$

Primjeri rotacionih ploha

- sfera
- torus
- jednoplohi rotacioni hiperboloid – nastaje rotacijom hiperbole $y^2 - z^2 = 1$ oko z osi. Njegova implicitna jednadžba glasi

$$\sqrt{x^2 + y^2}^2 - z^2 = 1,$$

odnosno

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1.$$

Parametarske jednadžbe hiperbole $y^2 - z^2 = 1$ su

$$c(u) = (0, \operatorname{ch} u, \operatorname{sh} u)$$

gdje je

$$\operatorname{ch} u = \frac{e^u + e^{-u}}{2}, \quad \operatorname{sh} u = \frac{e^u - e^{-u}}{2}.$$

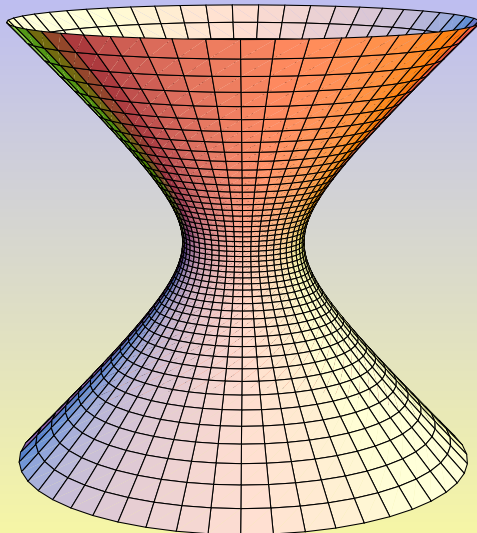
Stoga su parametarske jednačbe rotacionog hiperboloida

$$x = \operatorname{ch} u \sin v$$

$$y = \operatorname{ch} u \cos v$$

$$z = \operatorname{sh} u$$

gdje je $u \in \mathbb{R}$, $v \in [0, 2\pi]$.



- Neka je $z = \sin y$ sinusoida u yz -ravnini. Rotacijom te sinusoide oko osi z dobivamo plohu čija je implicitna jednadžba

$$z - \sin \sqrt{x^2 + y^2} = 0,$$

a parametarske jednadžbe

$$x = u \sin v$$

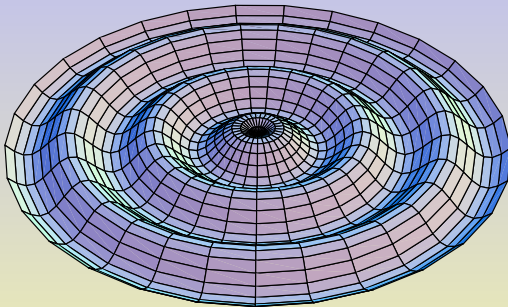
$$y = u \cos v$$

$$z = \sin u$$

gdje je $u \in [0, \infty)$, $v \in [0, 2\pi]$.

Plohe u prostoru
Zadavanje plohe
Sfera i elipsoid
Torus

Rotacijske plohe
Pravčaste plohe
Tangencijalna ravnina



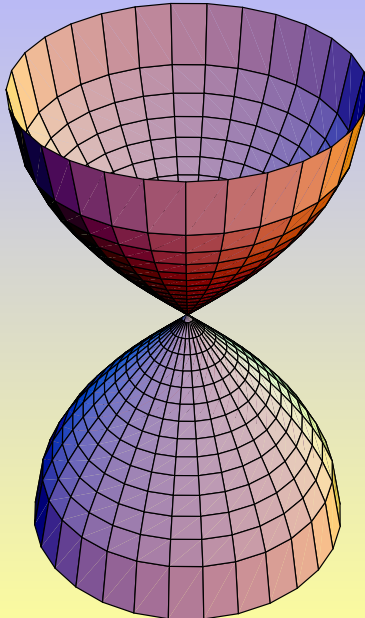
- Neka je $z = \arcsin y$ krivulja u yz -ravnini. Ta krivulja siječe os z . Rotacijom te krivulje oko osi z dobivamo plohu čije su parametarske jednadžbe

$$x = u \sin v$$

$$y = u \cos v$$

$$z = \arcsin u$$

gdje je $u \in [-1, 1]$, $v \in [0, 2\pi]$.



- Neka je $z = \arcsin(y - 1)$ krivulja u yz -ravnini. Ta krivulja ne siječe os z . Rotacijom te krivulje oko osi z dobivamo plohu čija je implicitna jednadžba

$$z - \arcsin(\sqrt{x^2 + y^2} - 1) = 0,$$

a parametarske jednadžbe su

$$x = u \sin v$$

$$y = u \cos v$$

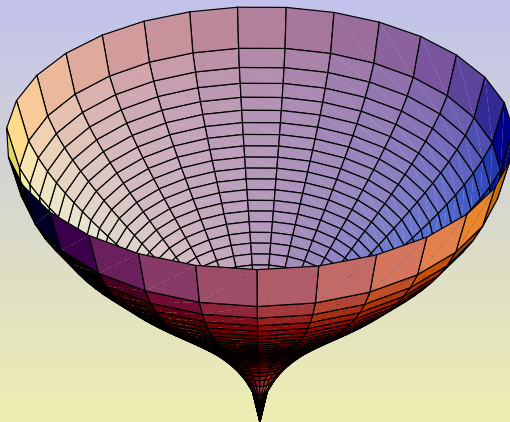
$$z = \arcsin(u - 1)$$

gdje je $u \in [0, 2]$, $v \in [0, 2\pi]$.

Plohe u prostoru
Zadavanje plohe
Sfera i elipsoid
Torus

Rotacijske plohe

Pravčaste plohe
Tangencijalna ravnina



- Neka je $z = \arcsin(y - 2)$ krivulja u yz -ravnini. Ta krivulja ne siječe os z . Rotacijom te krivulje oko osi z dobivamo plohu čija je implicitna jednadžba

$$z - \arcsin(\sqrt{x^2 + y^2} - 2) = 0,$$

a parametarske jednadžbe su

$$x = u \sin v$$

$$y = u \cos v$$

$$z = \arcsin(u - 2)$$

gdje je $u \in [1, 3]$, $v \in [0, 2\pi]$.

Plohe u prostoru

Zadavanje plohe

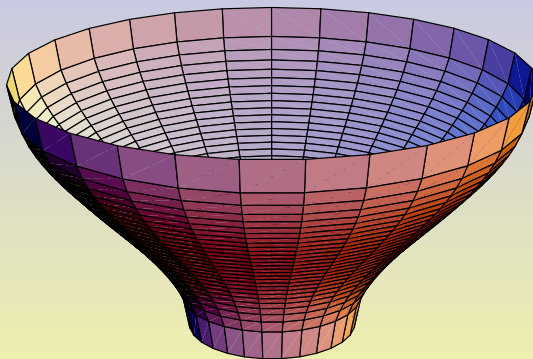
Sfera i elipsoid

Torus

Rotacijske plohe

Pravčaste plohe

Tangencijalna ravnina



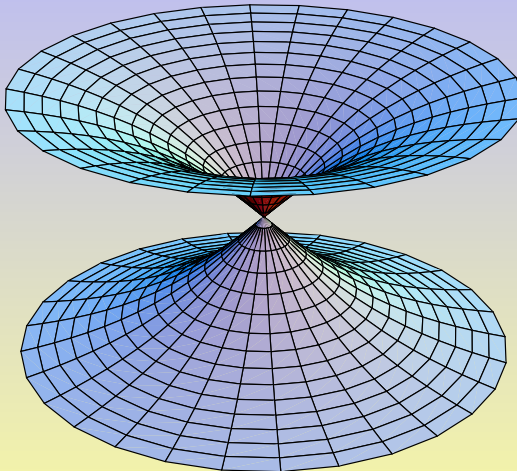
- Neka je $z = \operatorname{arctg} y$ krivulja u yz -ravnini. Ta krivulja siječe os z . Rotacijom te krivulje oko osi z dobivamo plohu čije su parametarske jednadžbe

$$x = u \sin v$$

$$y = u \cos v$$

$$z = \operatorname{arctg} u$$

gdje je $u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $v \in [0, 2\pi]$.



- Pseudosfera je ploha koja nastaje rotacijom oko osi z traktrise

$$c(u) = \left(0, a \sin u, a \left(\ln \frac{u}{2} + \cos u \right) \right).$$

Parametarske jednadžbe pseudosfere su

$$x = a \sin u \sin v$$

$$y = a \sin u \cos v$$

$$z = a \left(\ln \frac{u}{2} + \cos u \right)$$

gdje je $u \in \langle 0, \infty \rangle$, $v \in [0, 2\pi]$.

Plohe u prostoru

Zadavanje plohe

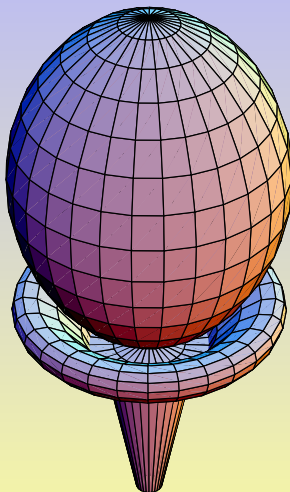
Sfera i elipsoid

Torus

Rotacijske plohe

Pravčaste plohe

Tangencijalna ravnina



U svakoj točki krivulje

$$R \dots c(u) = (x(u), y(u), z(u)), \quad u \in I \subseteq \mathbb{R}$$

položimo pravac s vektorom smjera $e(u)$ i na taj način dobijemo plohu koju zovemo pravčasta ploha.

Parametarska jednadžba pravčaste plohe je

$$r(u, v) = c(u) + v \cdot e(u),$$

gdje je $u \in I, v \in \mathbb{R}$.

Krivulju R zovemo **ravnalica** pravčaste plohe, a pravce koji prolaze točkama krivulje R zovemo **izvodnice** pravčaste plohe.

Plohe u prostoru

Zadavanje plohe

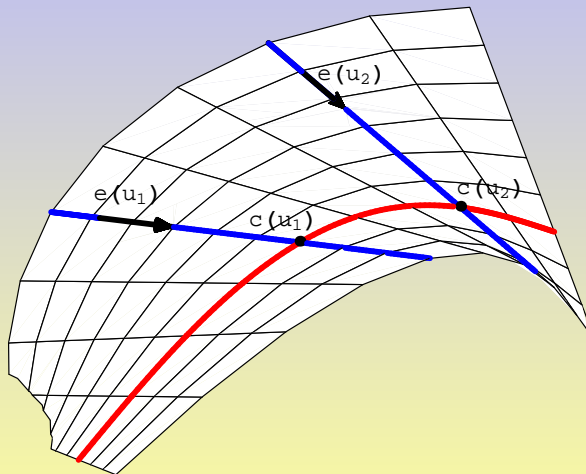
Sfera i elipsoid

Torus

Rotacijske plohe

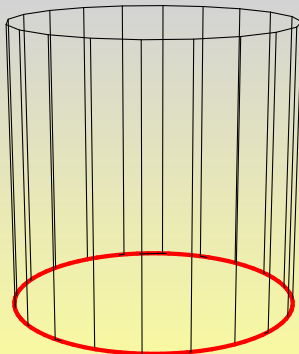
Pravčaste plohe

Tangencijalna ravnina



Specijalne vrste pravčastih ploha

- **Cilindrične plohe ili valjci** su pravčaste plohe kod kojih je $e(u) = \text{const.}$, tj. izvodnice su međusobno paralelni pravci.



Plohe u prostoru

Zadavanje plohe

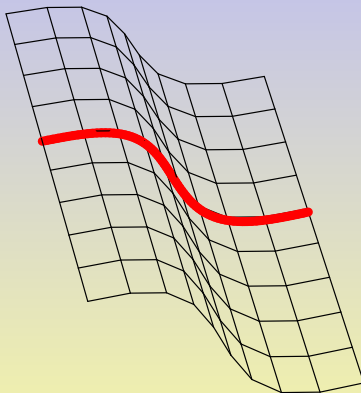
Sfera i elipsoid

Torus

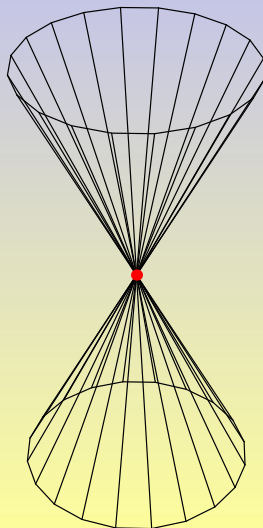
Rotacijske plohe

Pravčaste plohe

Tangencijalna ravnina



- **Konusne plohe** su pravčaste plohe kod kojih je krivulja R jedna točka, tj. $c(u) = \text{const.}$



Plohe u prostoru
Zadavanje plohe
Sfera i elipsoid
Torus
Rotacijske plohe
Pravčaste plohe
Tangencijalna ravnina

- **Konoidi** su pravčaste plohe čije izvodnice su okomite na neki zadani pravac. Ako su izvodnice okomite, npr. na os z , tada se lako vidi da su parametarske jednadžbe konoida

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = f(v).$$

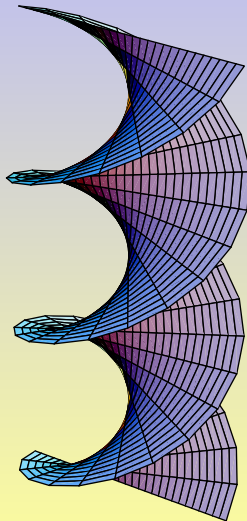
Helikoid je specijalni slučaj konoida kada je $f(v) = cv$, gdje je c konstanta. Parametarske jednadžbe helikoida su

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = cv.$$

Plückerov konoid ima parametarske jednadžbe

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = c \sin 2v.$$

Helikoid



Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Plohe u prostoru

Zadavanje plohe

Sfera i elipsoid

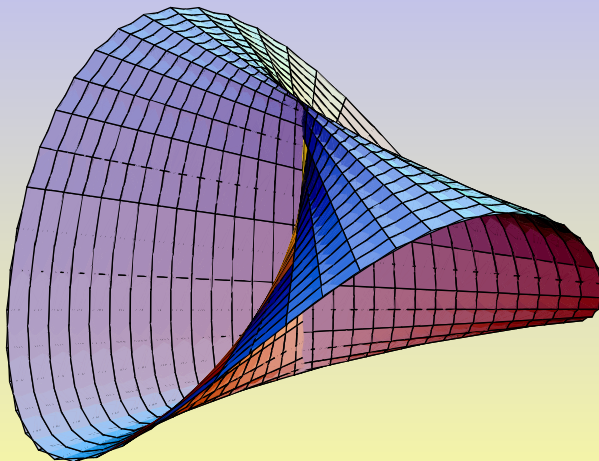
Torus

Rotacijske plohe

Pravčaste plohe

Tangencijalna ravnina

Plückerov konoid



Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Plohe u prostoru

Zadavanje plohe

Sfera i elipsoid

Torus

Rotacijske plohe

Pravčaste plohe

Tangencijalna ravnina

Jednoplhi hiperboloid

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Plohe u prostoru
Zadavanje plohe
Sfera i elipsoid
Torus
Rotacijske plohe
Pravčaste plohe
Tangencijalna ravnina

Sjetimo se da je jednoplhi hiperboloid $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ rotaciona ploha. No, on je i pravčasta ploha. Naime,

$$r_1(u, v) = (\cos u, \sin u, 0) + v(-\sin u, \cos u, 1)$$

i

$$r_2(u, v) = (\cos u, \sin u, 0) + v(\sin u, -\cos u, 1)$$

su dvije različite parametrizacije hiperboloida

$x^2 + y^2 - z^2 = 1$. Kažemo da je hiperboloid dvostruko pravčast.

Plohe u prostoru

Zadavanje plohe

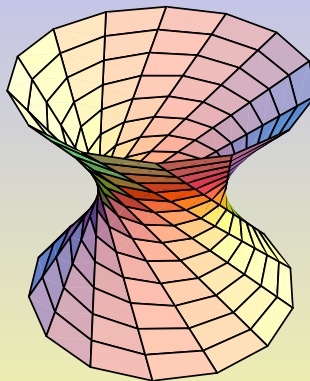
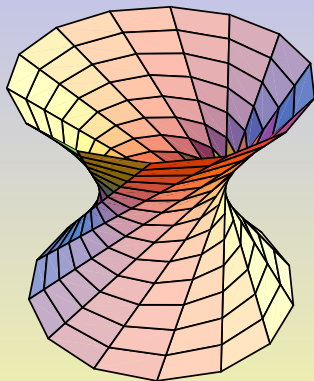
Sfera i elipsoid

Torus

Rotacijske plohe

Pravčaste plohe

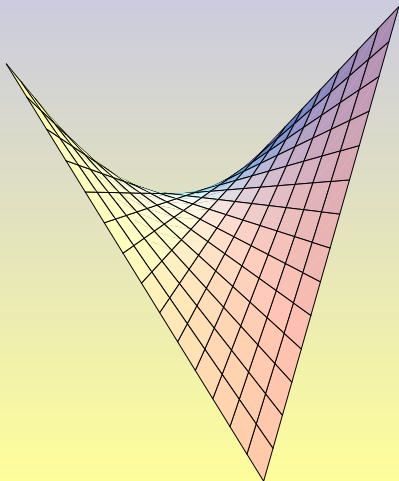
Tangencijalna ravnina



Hiperbolni paraboloid

Hiperbolni paraboloid $z = xy$ je pravčasta ploha. Njegova parametrizacija je

$$r(u, v) = (u, v, uv).$$



Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Plohe u prostoru

Zadavanje plohe

Sfera i elipsoid

Torus

Rotacijske plohe

Pravčaste plohe

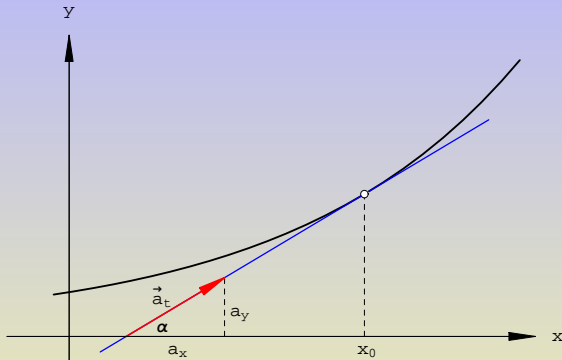
Tangencijalna ravnina

Tangencijalna ravnina i normala plohe

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Plohe u prostoru
Zadavanje plohe
Sfera i elipsoid
Torus
Rotacijske plohe
Pravčaste plohe
Tangencijalna ravnina



$$\vec{a}_t = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}, \quad \operatorname{tg} \alpha = f'(x_0), \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{a_y}{a_x}$$

Kako nam je važan samo smjer, možemo uzeti $a_x = 1$, pa je vektor smjera tangente jednak $\vec{a}_t = (1, f'(x_0))$.

$$t \dots f'(x_0)(x - x_0) - (y - y_0) = 0$$



Kao i u prostoru, tako je i u ravnini svaki pravac određen točkom i vektorom smjera. Ako pravac prolazi točkom $T_0(x_0, y_0)$ i ima vektor smjera $\vec{s} = (s_x, s_y)$, tada on ima jednadžbu

$$\frac{x - x_0}{s_x} = \frac{y - y_0}{s_y}$$

koju zovemo kanonski oblik jednadžbe pravca. U slučaju tangente iz prethodnih razmatranja slijedi da tangenta na graf funkcije f u točki (x_0, y_0) ima vektor smjera $(1, f'(x_0))$, pa je njezina jednadžba

$$\frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y_0}{f'(x_0)},$$

odnosno nakon sređivanja

$$f'(x_0)(x - x_0) - (y - y_0) = 0.$$

Plohe u prostoru

Zadavanje plohe

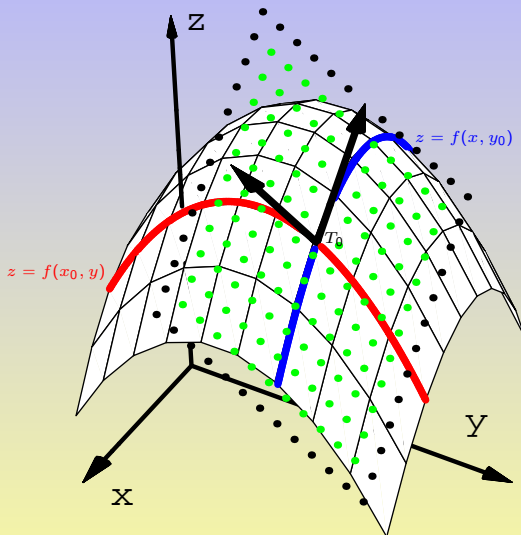
Sfera i elipsoid

Torus

Rotacijske plohe

Pravčaste plohe

Tangencijalna ravnina



Neka je ploha zadana eksplicitno jednačbom $z = f(x, y)$
i neka je $T_0(x_0, y_0, z_0)$ točka na toj plohi, gdje je
 $z_0 = f(x_0, y_0)$.

Iz prethodnih razmatranja i definicije parcijalnih derivacija
slijedi da je vektor smjera tangente na krivulju

$$z = f(x, y_0)$$

u točki T_0 jednak

$$(1, 0, z_x(x_0, y_0)),$$

a vektor smjera tangente na krivulju

$$z = f(x_0, y)$$

u toj istoj točki je

$$(0, 1, z_y(x_0, y_0)).$$

Ravninu koja prolazi točkom $T_0(x_0, y_0, z_0)$ i razapeta je vektorima

$$(1, 0, z_x(x_0, y_0)), \quad (0, 1, z_y(x_0, y_0))$$

zovemo **tangencijalna ravnina** plohe $z = f(x, y)$ u točki T_0 . Njezina jednadžba je

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ 1 & 0 & z_x(x_0, y_0) \\ 0 & 1 & z_y(x_0, y_0) \end{vmatrix} = 0,$$

odnosno

$$z_x(x_0, y_0)(x - x_0) + z_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0.$$

Često jednadžbu tangencijalne ravnine u točki $T_0(x_0, y_0, z_0)$ plohe $z = f(x, y)$ zapisujemo kao

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{T_0} (x - x_0) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{T_0} (y - y_0) - (z - z_0) = 0,$$

pri čemu treba parcijalne derivacije izračunati u točki T_0 , tj. preciznije u točki (x_0, y_0) .

Normala plohe $z = f(x, y)$ u točki $T_0(x_0, y_0, z_0)$ je pravac

$$n \dots \frac{x - x_0}{z_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{z_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

Neka je ploha zadana implicitno jednadžbom

$$F(x, y, z) = 0$$

i neka je $T_0(x_0, y_0, z_0)$ točka na plohi. Neka je

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

krivulja na zadanoj plohi koja prolazi točkom T_0 i neka je

$\vec{r}(t_0) = T_0$. Tada je

$$F(\vec{r}(t)) = F(x(t), y(t), z(t)) = 0.$$

Deriviramo li prethodnu jednakost po t , dobivamo

$$\frac{dF}{dt}(\vec{r}(t)) = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{dt} = 0$$

odnosno

$$\nabla F(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) = 0.$$

Dakle, dokazali smo sljedeće: ako uzmemo bilo koju glatku krivulju na plohi $F(x, y, z) = 0$ koja prolazi točkom T_0 te plohe, tada je $\nabla F(T_0)$ okomit na tangencijalni vektor te krivulje u točki T_0 .

Stoga je prirodna sljedeća definicija. Tangencijalna ravnina plohe $F(x, y, z) = 0$ u točki $T_0(x_0, y_0, z_0)$ je ravnina

$$(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \nabla F(T_0) = 0.$$

Raspišemo li to koordinatno

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (F_x, F_y, F_z) = 0$$

dobivamo

$$(F_x)_{T_0}(x - x_0) + (F_y)_{T_0}(y - y_0) + (F_z)_{T_0}(z - z_0) = 0,$$

pri čemu treba izračunati parcijalne derivacije u točki $T_0(x_0, y_0, z_0)$.

Dakle, tangente svih glatkih krivulja na plohi

$$F(x, y, z) = 0$$

koje prolaze točkom T_0 leže u tangencijalnoj ravnini zadane plohe u točki T_0 .

Normala plohe $F(x, y, z) = 0$ u točki $T_0(x_0, y_0, z_0)$ je pravac

$$n \dots \frac{x - x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}$$

Plohe u prostoru

Zadavanje plohe

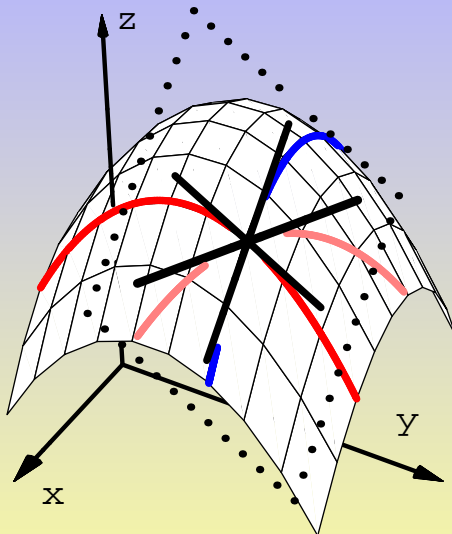
Sfera i elipsoid

Torus

Rotacijske plohe

Pravčaste plohe

Tangencijalna ravnina



Specijalno, ako je ploha zadana eksplicitno sa

$$z = f(x, y),$$

tada je njezin implicitni oblik

$$f(x, y) - z = 0,$$

odnosno

$$F(x, y, z) = f(x, y) - z.$$

Tada je

$$F_x = f_x, \quad F_y = f_y, \quad F_z = -1,$$

pa je u tom slučaju jednadžba tangencijalne ravnine u
točki $T_0(x_0, y_0, z_0)$

$$(f_x)_{T_0}(x - x_0) + (f_y)_{T_0}(y - y_0) - (z - z_0) = 0,$$

što se podudara s prethodnim razmatranjima.

Primjer 59.

Odredite jednadžbu tangencijalne ravnine i normale na plohu $x^2 - y^2 - z^2 = 4$ u točki $T_0(3, 2, 1)$.

Rješenje

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Plohe u prostoru
Zadavanje plohe
Sfera i elipsoid
Torus
Rotacijske plohe
Pravčaste plohe
Tangencijalna ravnina



Primjer 59.

Odredite jednadžbu tangencijalne ravnine i normale na plohu $x^2 - y^2 - z^2 = 4$ u točki $T_0(3, 2, 1)$.

Rješenje

$$x_0 = 3, \quad y_0 = 2, \quad z_0 = 1, \quad F(x, y, z) = x^2 - y^2 - z^2 - 4$$

$$F_x = 2x, \quad F_y = -2y, \quad F_z = -2z$$

$$(F_x)_{T_0} = 6, \quad (F_y)_{T_0} = -4, \quad (F_z)_{T_0} = -2$$

Jednadžba tangencijalne ravnine je

$$(F_x)_{T_0}(x - x_0) + (F_y)_{T_0}(y - y_0) + (F_z)_{T_0}(z - z_0) = 0,$$

odnosno

$$6(x - 3) - 4(y - 2) - 2(z - 1) = 0,$$

i konačno nakon sređivanja

$$3x - 2y - z - 4 = 0.$$

Jednadžba normale je

$$\frac{x - x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)},$$

odnosno nakon uvrštavanja

$$\frac{x - 3}{6} = \frac{y - 2}{-4} = \frac{z - 1}{-2}.$$

Neka je ploha zadana parametarski s

$$r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)). \quad (*)$$

Jednadžbom $r = r(u_0, v)$ definirana je jedna v -krivulja točkom $T(u_0, v_0)$ s vektorom tangente $r_v(u_0, v_0)$ kojeg kratko zapisujemo s r_v^0 .

Nadalje, jednadžbom $r = r(u, v_0)$ definirana je jedna u -krivulja točkom $T(u_0, v_0)$ s vektorom tangente $r_u(u_0, v_0)$ kojeg kratko zapisujemo s r_u^0 .

Ako je $T(u_0, v_0)$ regularna točka, tada su vektori r_u^0 i r_v^0 linearno nezavisni pa određuju ravninu čija je normala vektor $r_u^0 \times r_v^0$, a koju zovemo tangencijalna ravnina u točki $T(u_0, v_0)$ plohe zadane parametarski s $(*)$.

Sljedeća lema opravdava prethodnu definiciju tangencijalne ravnine plohe koja je zadana parametarski.

Lema 11.

Ako je ploha zadana parametarski s

$$r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

pri čemu je r diferencijabilna funkcija (tj. koordinatne funkcije su diferencijabilne), tada tangenta svake krivulje koja leži na zadanoj plohi i prolazi točkom $T(u_0, v_0)$ leži u ravnini određenoj vektorima r_u^0 i r_v^0 .

Dokaz.

Neka je K krivulja na zadanoj plohi koja prolazi točkom $T(u_0, v_0)$. Tada je njezina jednadžba

$$r(t) = r(u(t), v(t))$$

pri čemu je $u(t_0) = u_0$, $v(t_0) = v_0$.

Deriviranjem po parametru t dobivamo

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial r}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial r}{\partial v} \frac{dv}{dt}.$$

Uvrstimo li gore $u = u_0$ i $v = v_0$, dobivamo

$$\frac{dr^0}{dt} = \frac{du}{dt} r_u^0 + \frac{dv}{dt} r_v^0.$$

Iz posljednje jednakosti slijedi da je vektor tangente $\frac{dr^0}{dt}$

krivulje K u točki $T(u_0, v_0)$ linearna kombinacija vektora r_u^0 i r_v^0 sa skalarima $\frac{du}{dt}$ i $\frac{dv}{dt}$ izračunatima u $T(u_0, v_0)$. ♡

Primjer 60.

Odredite tangencijalnu ravninu i normalu u točki $(3, 0, 0)$ torusa

$$r(u, v) = ((2 + \cos v) \cos u, (2 + \cos v) \sin u, \sin v).$$

Rješenje

Plohe u prostoru
Zadavanje plohe
Sfera i elipsoid
Torus
Rotacijske plohe
Pravčaste plohe
Tangencijalna ravnina

krivulje K u točki $T(u_0, v_0)$ linearna kombinacija vektora r_u^0 i r_v^0 sa skalarima $\frac{du}{dt}$ i $\frac{dv}{dt}$ izračunatima u $T(u_0, v_0)$. ♡

Primjer 60.

Odredite tangencijalnu ravninu i normalu u točki $(3, 0, 0)$ torusa

$$r(u, v) = ((2 + \cos v) \cos u, (2 + \cos v) \sin u, \sin v).$$

Rješenje

$$r(0, 0) = (3, 0, 0), \text{ pa je } u_0 = 0, v_0 = 0$$

$$r_u = (-(2 + \cos v) \sin u, (2 + \cos v) \cos u, 0)$$

$$r_v = (-\sin v \cos u, -\sin v \sin u, \cos v)$$

$$r_u(0, 0) = (0, 3, 0), r_v(0, 0) = (0, 0, 1)$$

$$r_u(0,0) \times r_v(0,0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (3, 0, 0) = 3(1, 0, 0)$$

Za normalu tangencijalne ravnine možemo uzeti vektor $(1, 0, 0)$, a točka je $T(3, 0, 0)$. Dakle, jednačba tangencijalne ravnine u točki $(3, 0, 0)$ je

$$\pi_t \dots 1 \cdot (x - 3) + 0 \cdot (y - 0) + 0 \cdot (z - 0) = 0,$$

odnosno

$$\pi_t \dots x = 3.$$

Jednačba normale u točki $(3, 0, 0)$ je

$$n \dots \frac{x - 3}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{0}.$$

Dio VIII

Krivulje u prostoru

Krivulje u prostoru
Definicija krivulje
Jednadžba tangente
Duljina luka krivulje
Reparametrizacija
Oskulacijska ravnina
Frenetov trobrid
Fleksija i torzija
Frenetove formule
Opći parametar

● Krivulje u prostoru

- Definicija krivulje
- Jednadžba tangente na prostornu krivulju
- Duljina luka krivulje
- Reparametrizacija krivulje
- Oskulacijska ravnina
- Frenetov trobrid
- Fleksija i torzija
- Frenetove formule
- Krivulje parametrizirane općim parametrom

Krivulje u prostoru

Definicija krivulje
Jednadžba tangente
Duljina luka krivulje
Reparametrizacija
Oskulacijska ravnina
Frenetov trobrid
Fleksija i torzija
Frenetove formule
Opći parametar

Definicija krivulje

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Krivulju \mathcal{K} u ravnini možemo zadati na tri načina:

- **EksPLICITNI oblik** jednadžbe krivulje

$$\mathcal{K} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\}$$

- **IMPLICITNI oblik** jednadžbe krivulje

$$\mathcal{K} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : F(x, y) = 0\}$$

- **PARAMETARSKI oblik** jednadžbe krivulje

$$\mathcal{K} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = x(t), y = y(t)\}$$

Krivulje u prostoru

Definicija krivulje

Jednadžba tangente

Duljina luka krivulje

Reparametrizacija

Oskulacijska ravnina

Frenetov trobrid

Fleksija i torzija

Frenetove formule

Opći parametar



Na parametarski oblik jednadžbe krivulje možemo gledati kao na preslikavanje

$$c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$$

gdje je $I \subseteq \mathbb{R}$ interval, koje svakom $t \in I$ pridružuje točku $(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$, tj.

$$c(t) = (x(t), y(t)).$$

U eksplicitnom, implicitnom i parametarskom obliku jednadžbe krivulje nije dovoljno samo da zahtijevamo da su odgovarajuće funkcije neprekidne jer bi u tom slučaju uključili skupove (kao npr., kvadrat) koje ne bismo prihvatili kao krivulje. Da bismo to izbjegli pretpostavljamo da su funkcije u gornjim oblicima diferencijabilne.

Krivulje u prostoru

Definicija krivulje

Jednadžba tangente

Duljina luka krivulje

Reparametrizacija

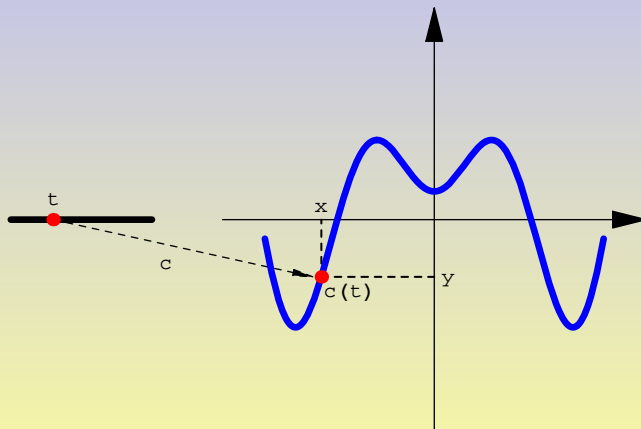
Oskulacijska ravnina

Frenetov trobrid

Fleksija i torzija

Frenetove formule

Opći parametar



Prostorna krivulja se zadaje na dva načina:

- kao presječnica dviju zadanih ploha

$$\begin{cases} f_1(x, y, z) = 0 \\ f_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

- parametarskim jednadžbama

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

Na parametarske jednadžbe možemo gledati kao na preslikavanje

$$c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$$

gdje je $I \subseteq \mathbb{R}$ interval, koje svakom $t \in I$ pridružuje neku točku u \mathbb{R}^3 , tj.

$$c(t) = (x(t), y(t), z(t)),$$

gdje su $x, y, z : I \rightarrow \mathbb{R}$ diferencijabilne funkcije.

Primjer 61.

Vivijanijeva krivulja je krivulja koja je zadana kao presjek sfere i cilindra

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \\ (x - \frac{r}{2})^2 + y^2 = \frac{r^2}{4} \end{cases}$$

Krivulje u prostoru

Definicija krivulje

Jednadžba tangente

Duljina luka krivulje

Reparametrizacija

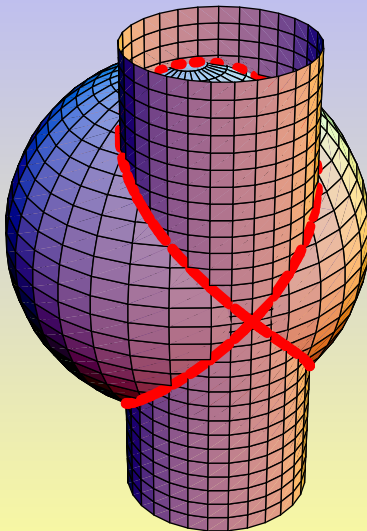
Oskulacijska ravnina

Frenetov trobrid

Fleksija i torzija

Frenetove formule

Opći parametar



Krivulje u prostoru

Definicija krivulje

Jednadžba tangente

Duljina luka krivulje

Reparametrizacija

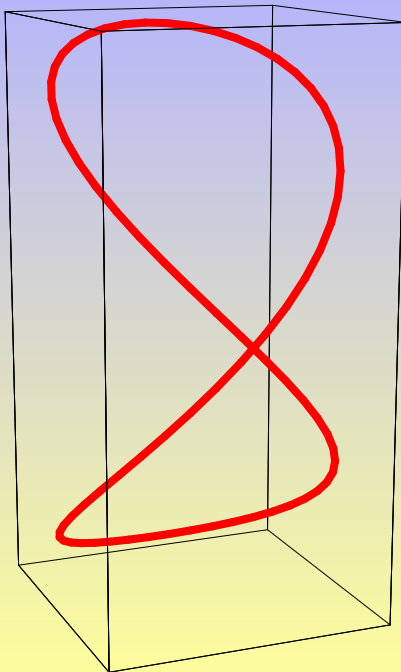
Oskulacijska ravnina

Frenetov trobrid

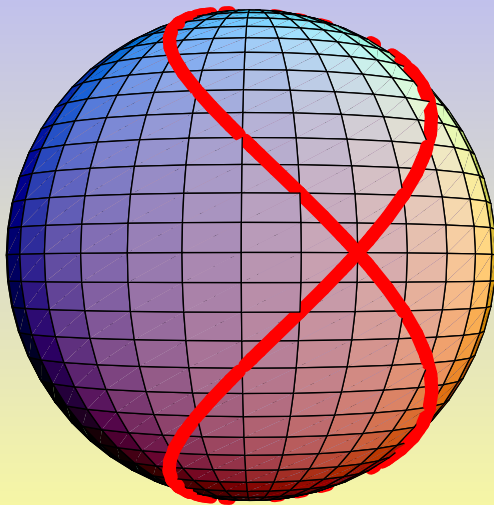
Fleksija i torzija

Frenetove formule

Opći parametar



Vivijanijeva krivulja na sferi



Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Krivulje u prostoru

Definicija krivulje

Jednadžba tangente

Duljina luka krivulje

Reparametrizacija

Oskulacijska ravnina

Frenetov trobrid

Fleksija i torzija

Frenetove formule

Opći parametar

Vivijanijeva krivulja na cilindru

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Krivulje u prostoru

Definicija krivulje

Jednadžba tangente

Duljina luka krivulje

Reparametrizacija

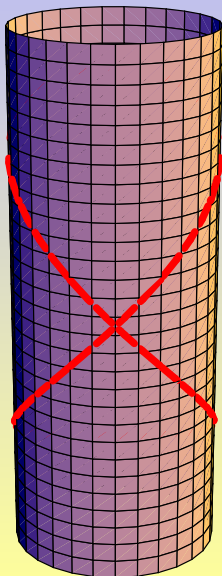
Oskulacijska ravnina

Frenetov trobrid

Fleksija i torzija

Frenetove formule

Opći parametar



Primjer 62.

Obična cilindrična spirala (zavojnica) je krivulja čije su parametarske jednadžbe

$$c(t) = (r \cos t, r \sin t, bt).$$

Krivulja nastaje gibanjem točke po kružnici, koja je presjek uspravnog valjka polumjera r , konstantnom brzinom. Istodobno se ta kružnica translacija po plaštu valjka konstantnom brzinom b .

Ova krivulja je presjek cilindra i helikoida.

Krivulje u prostoru

Definicija krivulje

Jednadžba tangente

Duljina luka krivulje

Reparametrizacija

Oskulacijska ravnina

Frenetov trobrid

Fleksija i torzija

Frenetove formule

Opći parametar

Krivulje u prostoru

Definicija krivulje

Jednadžba tangente

Duljina luka krivulje

Reparametrizacija

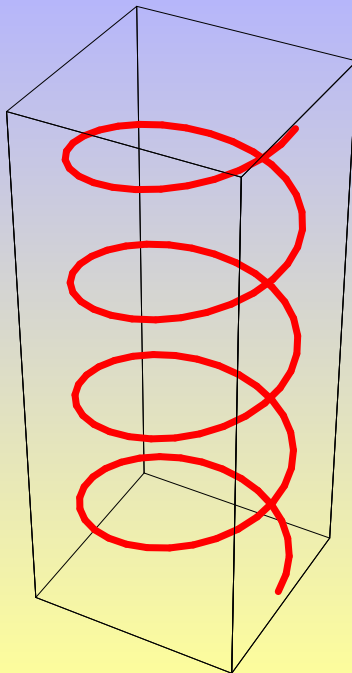
Oskulacijska ravnina

Frenetov trobrid

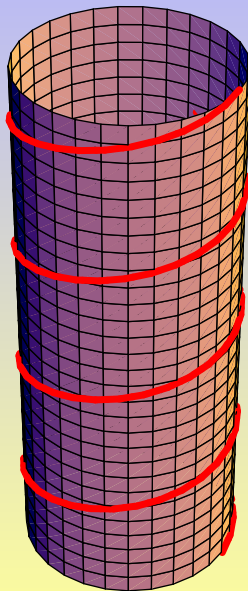
Fleksija i torzija

Frenetove formule

Opći parametar



Zavojnica na cilindru



Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Krivulje u prostoru

Definicija krivulje

Jednadžba tangente

Duljina luka krivulje

Reparametrizacija

Oskulacijska ravnina

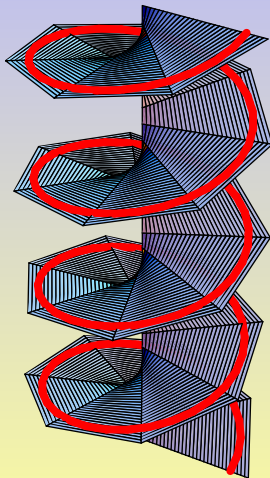
Frenetov trobrid

Fleksija i torzija

Frenetove formule

Opći parametar

Zavojnica na helikoidu



Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Krivulje u prostoru

Definicija krivulje

Jednadžba tangente

Duljina luka krivulje

Reparametrizacija

Oskulacijska ravnina

Frenetov trobrid

Fleksija i torzija

Frenetove formule

Opći parametar



Ako se iz parametarskih jednadžbi ukloni parametar t , dobije se prikaz prostorne krivulje kao presječnice dviju ploha.

Primjer 63.

Prostorna krivulja je zadana parametarski s

$$\begin{cases} x = t + a \\ y = \sqrt{a^2 - t^2} \\ z = \sqrt{2a(a - t)} \end{cases}$$

Iz prve jednadžbe dobivamo da je $t = x - a$. Uvrstimo li to u druge dvije jednadžbe dobivamo krivulju zadanu kao presječnicu kružnog i paraboličkog cilindra

$$\begin{cases} (x - a)^2 + y^2 = a^2 \\ z^2 = -2a(x - 2a) \end{cases}$$

Zbrojimo li gornje dvije jednadžbe, dobivamo

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2.$$

Dakle, dobili smo da je zadana krivulja također presjek sfere i cilindričnih ploha.

Krivulje u prostoru

Definicija krivulje

Jednadžba tangente

Duljina luka krivulje

Reparametrizacija

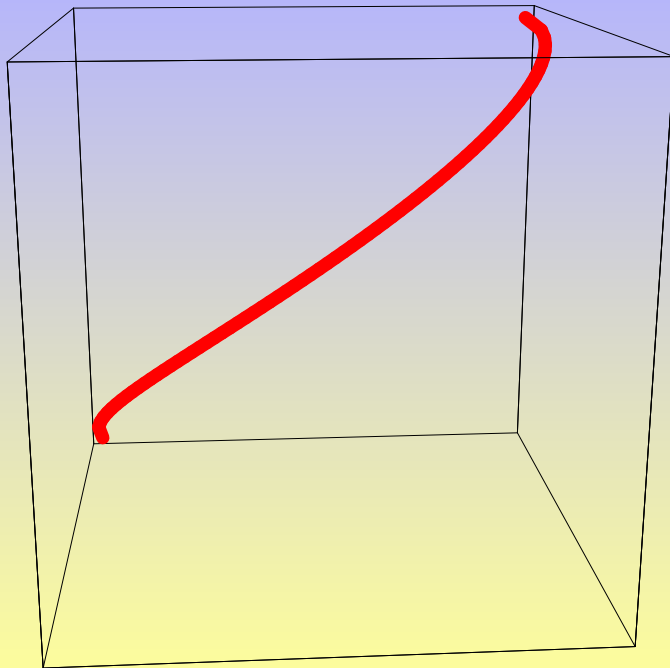
Oskulacijska ravnina

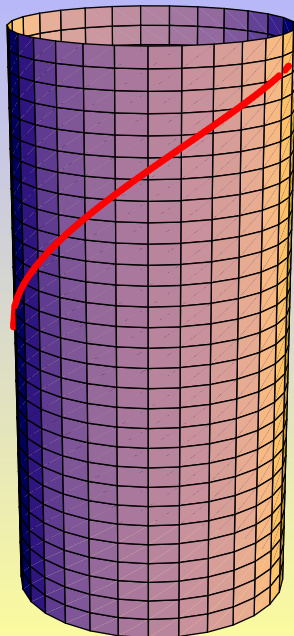
Frenetov trobrid

Fleksija i torzija

Frenetove formule

Opći parametar





Krivulje u prostoru

Definicija krivulje

Jednadžba tangente

Duljina luka krivulje

Reparametrizacija

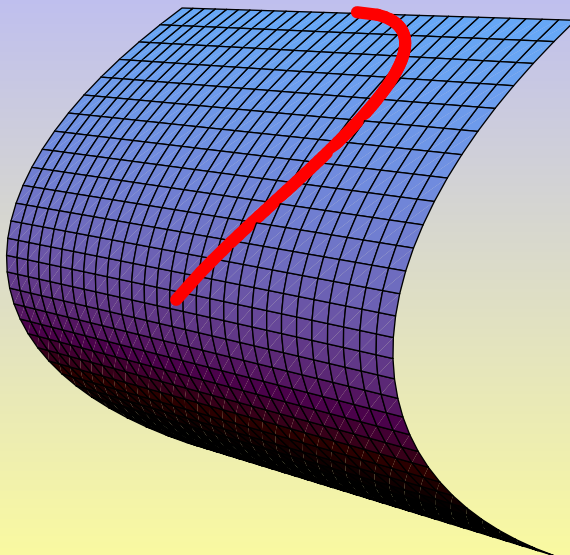
Oskulacijska ravnina

Frenetov trobrid

Fleksija i torzija

Frenetove formule

Opći parametar



Krivulje u prostoru

Definicija krivulje

Jednadžba tangente

Duljina luka krivulje

Reparametrizacija

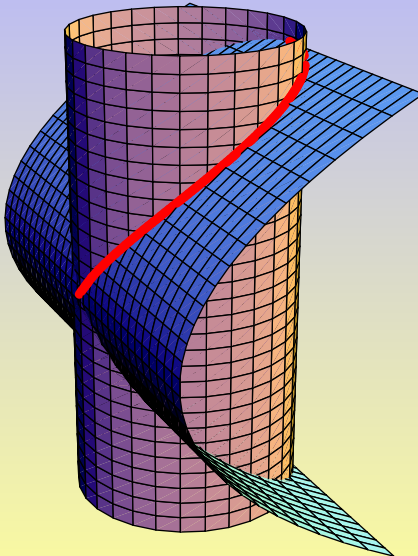
Oskulacijska ravnina

Frenetov trobrid

Fleksija i torzija

Frenetove formule

Opći parametar



Krivulje u prostoru

Definicija krivulje

Jednadžba tangente

Duljina luka krivulje

Reparametrizacija

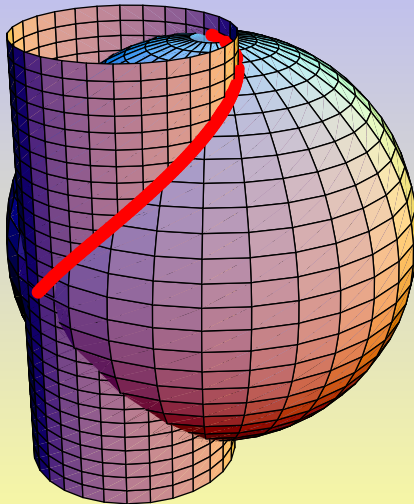
Oskulacijska ravnina

Frenetov trobrid

Fleksija i torzija

Frenetove formule

Opći parametar



Krivulje u prostoru

Definicija krivulje

Jednadžba tangente

Duljina luka krivulje

Reparametrizacija

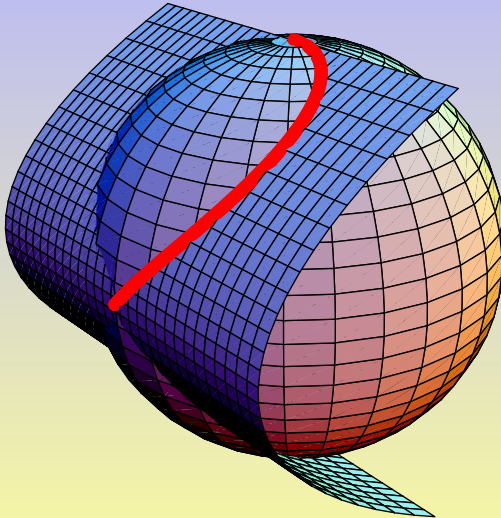
Oskulacijska ravnina

Frenetov trobrid

Fleksija i torzija

Frenetove formule

Opći parametar



Primjer 64.

Zadana je Vivianijeva krivulja

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \\ (x - \frac{r}{2})^2 + y^2 = \frac{r^2}{4} \end{cases}$$

Napišite parametarske jednadžbe te krivulje.

Rješenje

Krivulje u prostoru

Definicija krivulje

Jednadžba tangente

Duljina luka krivulje

Reparametrizacija

Oskulacijska ravnina

Frenetov trobrid

Fleksija i torzija

Frenetove formule

Opći parametar

Primjer 64.

Zadana je Vivianijeva krivulja

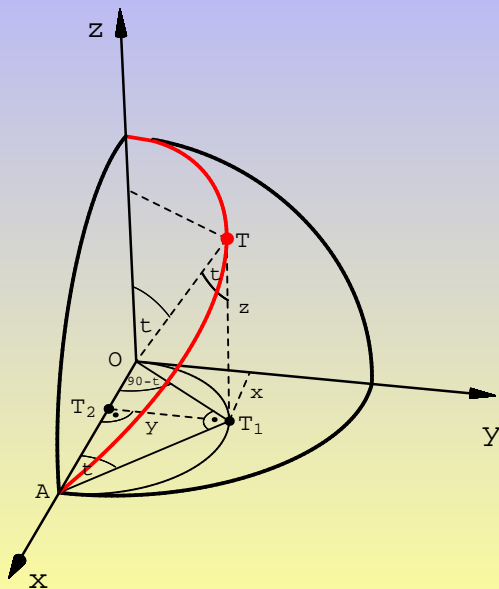
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \\ (x - \frac{r}{2})^2 + y^2 = \frac{r^2}{4} \end{cases}$$

Napišite parametarske jednadžbe te krivulje.

Rješenje

Neka je $t = \angle OTT_1$. Nadalje, sa slike je jasno da je $|OA| = |OT| = r$. Kut $\angle OT_1A$ je pravi jer je to obodni kut nad promjerom kružnice. Iz toga slijedi da su trokuti OT_1T i OT_1A sukladni jer su pravokutni i podudaraju se u dvije stranice, pa je zbog toga

$$\angle OAT_1 = t, \quad \angle AOT_1 = 90^\circ - t, \quad |AT_1| = |TT_1| = z.$$



Iz pravokutnog trokuta OT_2T_1 dobivamo

$$x = |OT_1| \cos(90^\circ - t), \quad y = |OT_1| \sin(90^\circ - t),$$

odnosno

$$x = |OT_1| \sin t, \quad y = |OT_1| \cos t.$$

Iz trokuta OT_1A dobivamo

$$|OT_1| = r \sin t, \quad z = |AT_1| = r \cos t.$$

Stoga su parametarske jednadžbe Vivianijeve krivulje

$$x = r \sin^2 t$$

$$y = r \sin t \cos t, \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$z = r \cos t$$

Jednadžba tangente na prostornu krivulju

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Krivulje u prostoru

Definicija krivulje

Jednadžba tangente

Duljina luka krivulje

Reparametrizacija

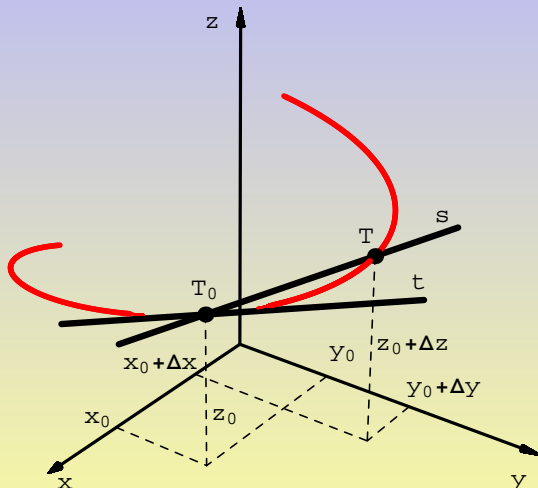
Oskulacijska ravnina

Frenetov trobrid

Fleksija i torzija

Frenetove formule

Opći parametar



Neka je zadana krivulja $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametarskim
jednadžbama

$$c(t) = (x(t), y(t), z(t)).$$

Želimo pronaći jednadžbu tangente na zadanu krivulju u
točki $T_0 = c(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$. U tu svrhu, uzmimo neku
drugu točku $T = c(t)$ na zadanoj krivulji. Tada, prema
oznakama sa slike, jednadžba sekante kroz točke T_0 i T
glasi

$$s \dots \frac{x - x_0}{(x_0 + \Delta x) - x_0} = \frac{y - y_0}{(y_0 + \Delta y) - y_0} = \frac{z - z_0}{(z_0 + \Delta z) - z_0},$$

odnosno

$$s \dots \frac{x - x_0}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{\Delta y} = \frac{z - z_0}{\Delta z}. \quad (1)$$

Kada se točka T približava po zadanoj krivulji točki T_0 ,
sekanta se sve više približava tangenti u točki T_0 .

Pomnožimo li (1) sa Δt , dobivamo

$$\frac{x - x_0}{\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{y - y_0}{\frac{\Delta y}{\Delta t}} = \frac{z - z_0}{\frac{\Delta z}{\Delta t}}. \quad (2)$$

Kada se T približava po zadanoj krivulji prema T_0 , tada

$$\Delta x \rightarrow 0, \quad \Delta y \rightarrow 0, \quad \Delta z \rightarrow 0.$$

No, u tom slučaju i $\Delta t \rightarrow 0$. Sada iz (2) slijedi da je
jednadžba tangente

$$t \dots \frac{x - x_0}{\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t_0}} = \frac{y - y_0}{\left(\frac{dy}{dt}\right)_{t_0}} = \frac{z - z_0}{\left(\frac{dz}{dt}\right)_{t_0}}$$

ili kraće zapisano

$$t \dots \frac{x - x_0}{\dot{x}(t_0)} = \frac{y - y_0}{\dot{y}(t_0)} = \frac{z - z_0}{\dot{z}(t_0)},$$

gdje "točkica" označava derivaciju po parametru t .

Vektor $\dot{c}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))$ zovemo **tangencijalni vektor** krivulje c u točki $c(t)$ i označavamo ga s $\vec{t}(t)$.

Jedinični tangencijalni vektor je tangencijalni vektor jedinične duljine, tj.

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{t}(t)}{\|\vec{t}(t)\|}.$$

Primjer 65.

Odredite tangencijalni vektor i jedinični tangencijalni vektor u proizvoljnoj točki obične cilindrične spirale

$$c(t) = (r \cos t, r \sin t, bt).$$

Odredite jednadžbu tangente u točki $t = 0$ i $t = \frac{\pi}{4}$.

Rješenje

Primjer 65.

Odredite tangencijalni vektor i jedinični tangencijalni vektor u proizvoljnoj točki obične cilindrične spirale

$$c(t) = (r \cos t, r \sin t, bt).$$

Odredite jednadžbu tangente u točki $t = 0$ i $t = \frac{\pi}{4}$.

Rješenje

Tangencijalni vektor u točki t je

$$\vec{t}(t) = (-r \sin t, r \cos t, b).$$

Nadalje,

$$\|\vec{t}(t)\| = \sqrt{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t + b^2} = \sqrt{r^2 + b^2},$$

pa je jedinični tangencijalni vektor u točki t

$$\vec{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{r^2 + b^2}}(-r \sin t, r \cos t, b).$$

Jednadžba tangente u točki $t_0 = 0$:

$$T_0 = c(0) = (x_0, y_0, z_0) = (r, 0, 0), \quad \vec{t}(0) = (0, r, b)$$

Jednadžba tangente glasi

$$t \dots \frac{x - x_0}{\dot{x}(t_0)} = \frac{y - y_0}{\dot{y}(t_0)} = \frac{z - z_0}{\dot{z}(t_0)},$$

odnosno

$$t \dots \frac{x - r}{0} = \frac{y}{r} = \frac{z}{b}.$$

Jednadžba tangente u točki $t_0 = \frac{\pi}{4}$:

$$T_0 = c\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{r\sqrt{2}}{2}, \frac{r\sqrt{2}}{2}, \frac{b\pi}{4}\right), \quad \vec{t}(0) = \left(\frac{-r\sqrt{2}}{2}, \frac{r\sqrt{2}}{2}, b\right)$$

Jednadžba tangente glasi

$$t \dots \frac{x - x_0}{\dot{x}(t_0)} = \frac{y - y_0}{\dot{y}(t_0)} = \frac{z - z_0}{\dot{z}(t_0)},$$

odnosno

$$t \dots \frac{x - \frac{r\sqrt{2}}{2}}{-r\sqrt{2}} = \frac{y - \frac{r\sqrt{2}}{2}}{r\sqrt{2}} = \frac{z - \frac{b\pi}{4}}{2b}.$$

Krivulje u prostoru

Definicija krivulje

Jednadžba tangente

Duljina luka krivulje

Reparametrizacija

Oskulacijska ravnina

Frenetov trobrid

Fleksija i torzija

Frenetove formule

Opći parametar

Primjer 66.

Odredite jednadžbu tangente u točki $T(1, 0, 1)$ krivulje

$$r(t) = (e^t, 2t, e^{-t}).$$

Rješenje

Krivulje u prostoru

Definicija krivulje

Jednadžba tangente

Duljina luka krivulje

Reparametrizacija

Oskulacijska ravnina

Frenetov trobrid

Fleksija i torzija

Frenetove formule

Opći parametar

Primjer 66.

Odredite jednadžbu tangente u točki $T(1, 0, 1)$ krivulje

$$r(t) = (e^t, 2t, e^{-t}).$$

Rješenje

Točku $T(1, 0, 1)$ dobivamo za $t = 0$, tj. $r(0) = (1, 0, 1)$.

$$\dot{r}(t) = (e^t, 2, -e^{-t}), \quad \dot{r}(0) = (1, 2, -1)$$

Jednadžba tangente u točki $T(1, 0, 1)$ je

$$t \dots \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-1}.$$

Duljina luka krivulje

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Krivulje u prostoru
Definicija krivulje
Jednadžba tangente
Duljina luka krivulje

Reparametrizacija
Oskulacijska ravnina
Frenetov trobrid
Fleksija i torzija
Frenetove formule
Opći parametar

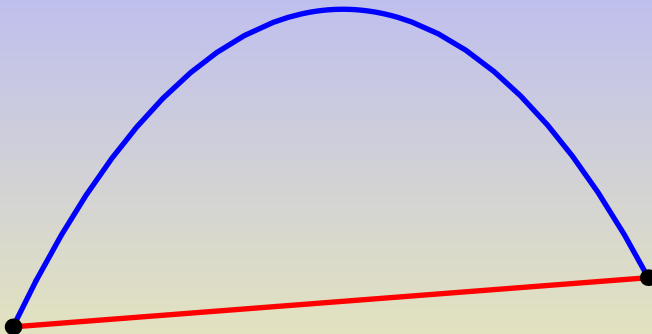
Znamo da je duljina segmenta $[a, b]$ jednaka $b - a$.

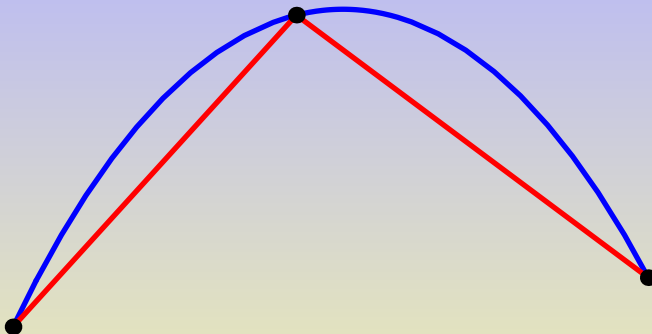
Pitanje je kako mjeriti duljinu nekog luka na krivulji.

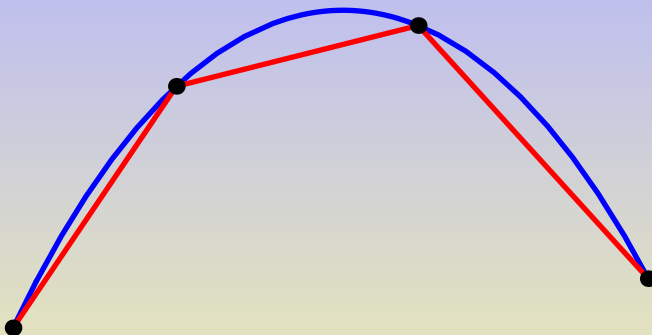
Ideja je da luk podijelimo na više manjih lukova čije duljine onda aproksimiramo sa duljinom segmenta.

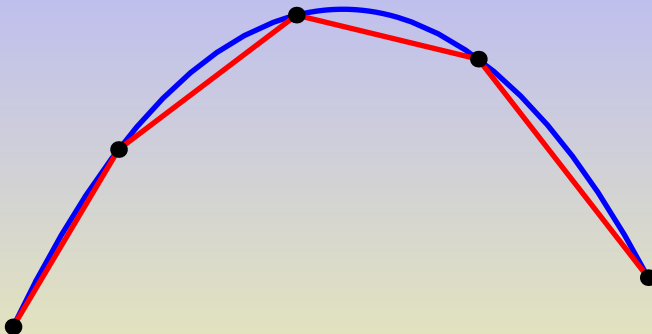
Jasno je da što je broj podjela veći, to će duljina dobivene poligonalne linije sve bolje aproksimirati duljinu luka, odnosno, što je luk manji, to će greška kod aproksimacije duljine tog luka sa duljinom pripadnog segmenta biti manja.

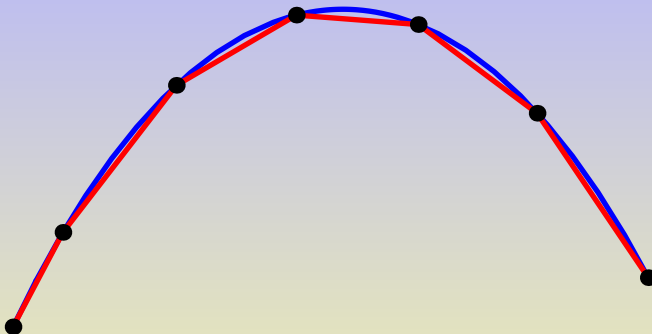












Neka je $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ krivulja zadana parametarski s

$$c(t) = (x(t), y(t), z(t)),$$

gdje su funkcije $x, y, z : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ klase C^1 , tj. imaju neprekidne i omeđene derivacije.

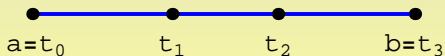
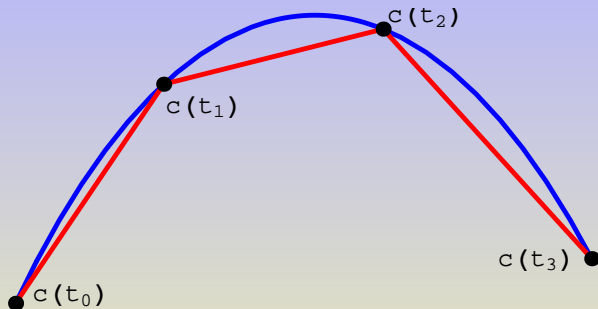
Neka je ρ subdivizija segmenta $[a, b]$ točkama

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k < \cdots < t_{n-1} < t_n = b.$$

Svaka takva subdivizija ρ generira točke

$$c(t_0), c(t_1), \dots, c(t_k), \dots, c(t_{n-1}), c(t_n)$$

na zadanoj krivulji kojima je ona podijeljena na manje lukove.



Dalje razmišljamo intuitivno na ovaj način. Kako je c krivulja čije su koordinatne funkcije glatke i imaju omeđene derivacije, onda c ne vrši nagle promjene smjera i brzine, te ako je još razdioba ρ dovoljno fina, onda će duljina luka krivulje c između točaka $c(t_{i-1})$ i $c(t_i)$ biti približno jednaka duljini segmenta između spomenutih točaka, tj. broju

$$\begin{aligned} & \|c(t_i) - c(t_{i-1})\| = \\ &= \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2 + (z(t_i) - z(t_{i-1}))^2} \end{aligned}$$

Kako su koordinatne funkcije glatke, na njih možemo primijeniti Lagrangeov teorem srednje vrijednosti.

Postoje realni brojevi $\tau_{1i}, \tau_{2i}, \tau_{3i} \in \langle t_{i-1}, t_i \rangle$ takvi da je

$$x(t_i) - x(t_{i-1}) = \dot{x}(\tau_{1i})(t_i - t_{i-1})$$

$$y(t_i) - y(t_{i-1}) = \dot{y}(\tau_{2i})(t_i - t_{i-1})$$

$$z(t_i) - z(t_{i-1}) = \dot{z}(\tau_{3i})(t_i - t_{i-1})$$

Stoga je

$$\|c(t_i) - c(t_{i-1})\| = \sqrt{\dot{x}(\tau_{1i})^2 + \dot{y}(\tau_{2i})^2 + \dot{z}(\tau_{3i})^2} (t_i - t_{i-1})$$

Ako je subdivizija ρ dovoljno fina, tada je interval $\langle t_{i-1}, t_i \rangle$ mali, pa je zbog neprekidnosti derivacija

$$\sqrt{\dot{x}(\tau_{1i})^2 + \dot{y}(\tau_{2i})^2 + \dot{z}(\tau_{3i})^2} \approx \sqrt{\dot{x}(\tau_i)^2 + \dot{y}(\tau_i)^2 + \dot{z}(\tau_i)^2}$$

za neki $\tau_i \in \langle t_{i-1}, t_i \rangle$, npr. $\tau_i = \frac{\tau_{1i} + \tau_{2i} + \tau_{3i}}{3}$.

Stoga je

$$\|c(t_i) - c(t_{i-1})\| \approx \sqrt{\dot{x}(\tau_i)^2 + \dot{y}(\tau_i)^2 + \dot{z}(\tau_i)^2} (t_i - t_{i-1})$$

odnosno

$$\|c(t_i) - c(t_{i-1})\| \approx \|\dot{c}(\tau_i)\| (t_i - t_{i-1}).$$

S druge strane, duljina luka s zadane krivulje je približno jednaka sumi duljina svih odgovarajućih segmenata, tj.

$$s \approx \sum_{i=1}^n \|c(t_i) - c(t_{i-1})\| \approx \sum_{i=1}^n \|\dot{c}(\tau_i)\| (t_i - t_{i-1})$$

za neke $\tau_i \in \langle t_{i-1}, t_i \rangle$, $i = 1, \dots, n$.

Dakle, dobili smo da je

$$s \approx \sum_{i=1}^n \|\dot{c}(\tau_i)\| (t_i - t_{i-1}).$$

Suma na desnoj strani je zapravo integralna suma funkcije $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definirane s $f(t) = \|\dot{c}(t)\|$ za subdiviziju ρ .

Stoga je opravdana sljedeća formula.

Neka je $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ krivulja čije su koordinatne funkcije klase C^1 . Duljina te krivulje se računa po formuli

$$s = \int_a^b \|\dot{c}(t)\| dt.$$

U slučaju prostorne krivulje $c(t) = (x(t), y(t), z(t))$ je

$$s = \int_a^b \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} dt,$$

a u slučaju ravninske krivulje $c(t) = (x(t), y(t))$ je

$$s = \int_a^b \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt.$$

Na duljinu luka krivulje $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ možemo gledati kao na funkciju $s : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definiranu s

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{\dot{x}(\tau)^2 + \dot{y}(\tau)^2 + \dot{z}(\tau)^2} d\tau.$$

Tada je diferencijal luka

$$ds(t) = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} dt$$

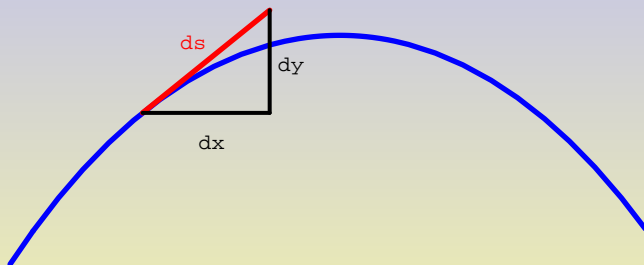
odnosno, kratko zapisujemo

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

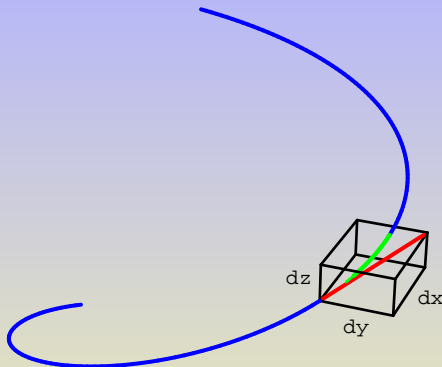
Analogno je diferencijal luka za ravninsku krivulju jednak

$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

Posljednje dvije formule imaju i zgodnu geometrijsku interpretaciju.



Sa slike vidimo da luk možemo aproksimirati sa dijelom tangente kada su dx i dy mali.



Sa slike vidimo da se luk koji se nalazi unutar kvadra može aproksimirati dijelom tangente kada su dx , dy , dz mali.

Napomena.

Pojam luka, duljine luka i krivulje se u matematici strogo definira. Ovdje je samo na intuitivni način objašnjena formula za računanje duljine luka tek toliko da se dobije osjećaj kako se dolazi do te formule. Stroge definicije bi nas na ovom nivou predaleko odvele u neke elementarne pojmove iz topologije i matematičke analize kao što je pojam homeomorfizma topoloških prostora i funkcije omeđene varijacije.

Također, vidjet ćemo kasnije jedan primjer krivulje koja nema duljinu.

Primjer 67.

Izračunajte duljinu luka obične cilindrične spirale

$$c(t) = (r \cos t, r \sin t, bt) \text{ od } t = 0 \text{ do } t = \frac{\pi}{2}.$$

Rješenje

Primjer 67.

Izračunajte duljinu luka obične cilindrične spirale

$c(t) = (r \cos t, r \sin t, bt)$ od $t = 0$ do $t = \frac{\pi}{2}$.

Rješenje

$$\dot{c}(t) = (-r \sin t, r \cos t, b)$$

$$\|\dot{c}(t)\| = \sqrt{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t + b^2} = \sqrt{r^2 + b^2}$$

$$s = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \|\dot{c}(t)\| dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 + b^2} dt = \sqrt{r^2 + b^2} t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$s = \frac{\pi}{2} \sqrt{r^2 + b^2}$$

Primjer 68.

Izračunajte duljinu kružnice $c(t) = (r \cos t, r \sin t)$.

Rješenje

Krivulje u prostoru
Definicija krivulje
Jednadžba tangente
Duljina luka krivulje
Reparametrizacija
Oskulacijska ravnina
Frenetov trobrid
Fleksija i torzija
Frenetove formule
Opći parametar

Primjer 68.

Izračunajte duljinu kružnice $c(t) = (r \cos t, r \sin t)$.

Rješenje

$$\dot{c}(t) = (-r \sin t, r \cos t)$$

$$\|\dot{c}(t)\| = \sqrt{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t} = \sqrt{r^2} = r$$

$$s = \int_0^{2\pi} \|\dot{c}(t)\| dt = \int_0^{2\pi} r dt = rt \Big|_0^{2\pi} = 2r\pi$$

Dakle, duljina kružnice je po ovoj definiciji i dalje ona ista koju znamo još iz osnovne škole, što je još jedan razlog ispravnosti ove formule.

Krivulje u prostoru
Definicija krivulje
Jednadžba tangente
Duljina luka krivulje
Reparametrizacija
Oskulacijska ravnina
Frenetov trobrid
Fleksija i torzija
Frenetove formule
Opći parametar

Pogledajmo da li je duljina segmenta $[a, b]$ i dalje jednaka $b - a$ ako koristimo formulu za računanje duljine luka krivulje. Parametarske jednadžbe segmenta su

$$c(t) = (a + (b - a)t, 0), \quad t \in [0, 1].$$

Nadalje,

$$\dot{c}(t) = (b - a, 0), \quad \|\dot{c}(t)\| = b - a$$

$$s = \int_0^1 \|\dot{c}(t)\| dt = \int_0^1 (b - a) dt = (b - a)t \Big|_0^1 = b - a$$

Posljednja dva primjera nam pokazuju da smo dobro poopćili pojam duljine na širu klasu krivulja tako da su duljine krivulja kao što je kružnica i segment ostale sačuvane, tj. po novoj formuli dobivamo one poznate vrijednosti koje smo i prije znali kada nismo koristili ovu formulu. Međutim, nije sve tako jednostavno i lijepo, što pokazuje sljedeći primjer.

Primjer 69.

Izračunajte duljinu elipse $c(t) = (a \cos t, b \sin t)$.

Rješenje

$$\dot{c}(t) = (-a \sin t, b \cos t)$$

$$\|\dot{c}(t)\| = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}$$

$$s = \int_0^{2\pi} \|\dot{c}(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt$$

Dobili smo eliptički integral druge vrste koji se ne može izraziti pomoću elementarnih funkcija. Ovaj integral se dalje za konkretne a i b rješava nekom prikladno odabranom numeričkom metodom u čije detalje se ovdje nećemo upuštati.

Izvedimo sada formulu za duljinu luka ravninske krivulje koja je zadana eksplicitno jednadžbom

$$y = f(x), \quad x \in [a, b].$$

Ovaj oblik lako pretvorimo u parametarski tako da uzmemo varijablu x za parametar, pa dobivamo

$$c(x) = (x, f(x)), \quad x \in [a, b].$$

Tada je

$$\|\dot{c}(x)\| = (1, f'(x)),$$

iz čega slijedi da je

$$s = \int_a^b \|\dot{c}(x)\| \, dx = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, dx.$$

Primjer 70.

Izračunajte duljinu luka krivulje $y = e^x$ između točaka $(0, 1)$ i $(1, e)$.

Rješenje

Primjer 70.

Izračunajte duljinu luka krivulje $y = e^x$ između točaka $(0, 1)$ i $(1, e)$.

Rješenje

$$s = \int_0^1 \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + e^{2x}} dx$$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1 + e^{2x}} dx &= \left[\begin{array}{ll} 1 + e^{2x} = t^2 & e^{2x} = t^2 - 1 \\ 2e^{2x} dx = 2t dt & dx = \frac{t dt}{t^2 - 1} \end{array} \right] = \\ &= \int \frac{t^2}{t^2 - 1} dt = \int \left(1 + \frac{1}{t^2 - 1} \right) dt = t + \int \frac{dt}{t^2 - 1} = \end{aligned}$$

Krivulje u prostoru
Definicija krivulje
Jednadžba tangente
Duljina luka krivulje
Reparametrizacija
Oskulacijska ravnina
Frenetov trobrid
Fleksija i torzija
Frenetove formule
Opći parametar

$$= t + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t-1} - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t+1} = t + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C =$$

$$= \sqrt{1+e^{2x}} + \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{1+e^{2x}}-1}{\sqrt{1+e^{2x}}+1} + C$$

Dakle,

$$s = \int_0^1 \sqrt{1+e^{2x}} dx = \left(\sqrt{1+e^{2x}} + \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{1+e^{2x}}-1}{\sqrt{1+e^{2x}}+1} \right) \Big|_0^1$$

$$s = \sqrt{1+e^2} - \sqrt{2} + \frac{1}{2} \ln \frac{(\sqrt{1+e^2}-1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{1+e^2}+1)(\sqrt{2}-1)}$$

Pogledajmo sada jedan primjer krivulje koja nema duljinu.

Primjer 71.

Zadana je ravninska krivulja $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ eksplicitno
jednadžbom

$$f(t) = \begin{cases} t \cos \frac{\pi}{2t}, & t \in \langle 0, 1] \\ 0, & t = 0 \end{cases}.$$

Dokažite da zadana krivulja nema duljinu.

Rješenje

Pogledajmo sada jedan primjer krivulje koja nema duljinu.

Primjer 71.

Zadana je ravninska krivulja $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ eksplicitno
jednadžbom

$$f(t) = \begin{cases} t \cos \frac{\pi}{2t}, & t \in \langle 0, 1 \rangle \\ 0, & t = 0 \end{cases}.$$

Dokažite da zadana krivulja nema duljinu.

Rješenje

Uzmimo subdiviziju segmenta $[0, 1]$

$$\rho_n \dots 0 < \frac{1}{2n} < \frac{1}{2n-1} < \frac{1}{2n-2} < \dots < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < 1$$

Tada je duljina dobivene poligonalne linije jednaka

$$\left| \frac{1}{2n} \cos \frac{2n\pi}{2} - 0 \right| + \left| \frac{1}{2n-1} \cos \frac{(2n-1)\pi}{2} - \frac{1}{2n} \cos \frac{2n\pi}{2} \right| + \dots$$

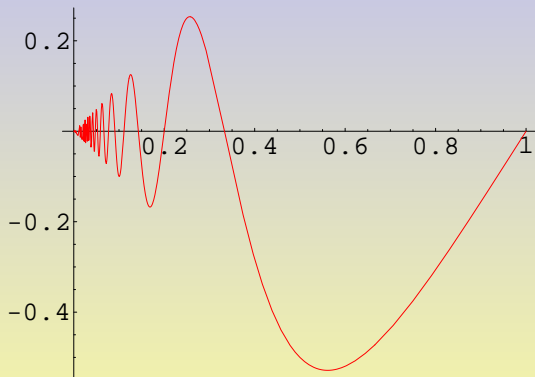
$$\dots + \left| \frac{1}{2} \cos \frac{2\pi}{2} - \frac{1}{3} \cos \frac{3\pi}{2} \right| + \left| \cos \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{2\pi}{2} \right| =$$

$$= \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-2} + \frac{1}{2n-2} + \dots + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}$$

Dobili smo parcijalnu sumu harmonijskog reda, a znamo da harmonijski red divergira, tj. kada $n \rightarrow \infty$ dobivena suma ide u beskonačno. Dakle, zadana krivulja nema duljinu.

Graf te krivulje izgleda



Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Krivulje u prostoru
Definicija krivulje
Jednadžba tangente
Duljina luka krivulje
Reparametrizacija
Oskulacijska ravnina
Frenetov trobrid
Fleksija i torzija
Frenetove formule
Opći parametar

Napomena.

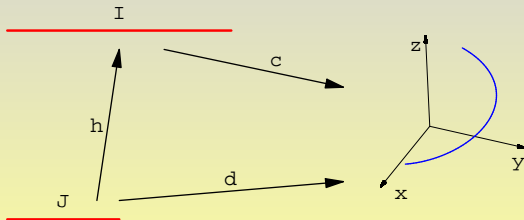
Prethodni primjer nam pokazuje da iako je krivulja definirana na segmentu konačne duljine, ona ne mora imati duljinu. Vidjeli smo da je u prethodnom primjeru segment konačne duljine "rastegnut" do "beskonačne" duljine. Lako se provjeri da je funkcija iz tog primjera neprekidna u svim točkama segmenta $[0, 1]$, ali to očito nije dovoljan uvjet da bi krivulja imala duljinu. Međutim, pokazuje se da ako je krivulja $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ klase C^1 , tj. njezine koordinatne funkcije su klase C^1 , tada ta krivulja ima duljinu i njezina duljina je jednaka

$$\int_a^b \|\dot{c}(t)\| dt.$$

Reparametrizacija krivulje

Neka je zadana krivulja $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ i neka je $h : J \rightarrow I$ diferencijabilna bijekcija, gdje su $I, J \subseteq \mathbb{R}$ intervali.

Krivulju $d : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ definiranu s $d(s) = (c \circ h)(s)$ zovemo **reparametrizacija** krivulje c .



U ovom trenutku je važno naglasiti razliku između krivulje i grafa krivulje. Krivulja u prostoru je svako diferencijabilno preslikavanje

$$c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

a graf te krivulje je

$$\text{graf}(c) = \left\{ c(t) : t \in [a, b] \right\}.$$

U većini situacija prešutno poistovjećujemo krivulju s njezinim grafom.

Važno je uočiti da neka krivulja i bilo koja njezina reparametrizacija imaju isti graf. Zaista, neka je $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ krivulja, a $d : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ reparametrizacija krivulje c funkcijom $h : J \rightarrow I$, gdje je h diferencijabilna bijekcija. Dakle, $d = c \circ h$.

Tvrdimo da je $\text{graf}(c) = \text{graf}(d)$. Trebamo dokazati jednakost ovih dvaju skupova.

Neka je $T_0 \in \text{graf}(c)$. Tada postoji $t_0 \in I$ takav da je $c(t_0) = T_0$. Kako je h bijekcija, postoji jedinstveni $s_0 \in J$ takav da je $h(s_0) = t_0$. Dakle, imamo

$$T_0 = c(t_0) = c(h(s_0)) = (c \circ h)(s_0) = d(s_0),$$

iz čega slijedi da je $T_0 \in \text{graf}(d)$, pa je $\text{graf}(c) \subseteq \text{graf}(d)$.

Obrnuto, neka je $T_1 \in \text{graf}(d)$. Tada postoji $s_1 \in J$ takav da je $T_1 = d(s_1)$. Kako je h bijekcija, onda ona ima inverznu funkciju $h^{-1} : I \rightarrow J$ koja je također bijekcija, pa postoji jedinstveni $t_1 \in I$ takav da je $h^{-1}(t_1) = s_1$. Sada imamo

$$T_1 = d(s_1) = d(h^{-1}(t_1)) = (d \circ h^{-1})(t_1) = c(t_1),$$

iz čega slijedi da je $T_1 \in \text{graf}(c)$, pa je $\text{graf}(d) \subseteq \text{graf}(c)$. Dakle, $\text{graf}(d) = \text{graf}(c)$.

Svaka parametrizacija (odnosno reparametrizacija) daje neku orijentaciju (smjer obilaska) na krivulji, tj. na njezinom grafu. Za dvije parametrizacije kažemo da su ekvivalentne ako daju istu orijentaciju na krivulji.

Pogledajmo o čemu se radi na jednom jednostavnom primjeru kružnice.

Neka je

$$c : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad c(t) = (\cos t, \sin t)$$

standardna parametrizacija jedinične kružnice. Tada je

$$d : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad d(s) = (\cos s, -\sin s)$$

njezina reparametrizacija.

Zaista, neka je

$$t = h(s) = 2\pi - s.$$

Tada je očito $h : [0, 2\pi] \rightarrow [0, 2\pi]$ bijekcija i vrijedi

$$(c \circ h)(s) = c(h(s)) = c(2\pi - s) =$$

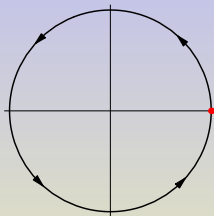
$$= (\cos(2\pi - s), \sin(2\pi - s)) = (\cos s, -\sin s) = d(s).$$

Dakle, $\text{graf}(c) = \text{graf}(d)$ i $c(0) = d(0) = (1, 0)$.

U čemu se razlikuju ove dvije parametrizacije? Prva parametrizacija počinje u točki $(1, 0)$ i obilazi kružnicu u smjeru suprotnom od kazaljke na satu, a druga parametrizacija počinje isto u točki $(1, 0)$, ali obilazi kružnicu u smjeru kazaljke na satu. Dakle, ove dvije parametrizacije nisu ekvivalentne.

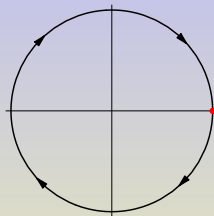
$$c : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$c(t) = (\cos t, \sin t)$$



$$d : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$d(s) = (\cos s, -\sin s)$$



Jasno je da na svakoj krivulji imamo dvije različite orijentacije. Sjetimo se samo pravca kojeg možemo obilaziti s lijeva na desno ili s desna na lijevo. Jasno je da je ista situacija kod bilo koje druge krivulje. Kao što smo vidjeli, orijentacija krivulje je određena njenom parametrizacijom.

Napomena.

Pojam orijentacije vektorskog prostora, orijentacije topoloških i glatkih mnogostrukosti se u matematici strogo definira. Ovdje je samo na intuitivnom nivou objašnjena orijentacija krivulje, te činjenica da je orijentacija krivulje dana njenom parametrizacijom. U strogu definiciju orijentacije ovdje nećemo ulaziti.

Jedna od najvažnijih reparametrizacija krivulje je **reparametrizacija duljinom luka**.

Kažemo da je krivulja $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizirana duljinom luka (kratko pišemo PDL) ako je

$$\|\dot{c}(t)\| = 1, \quad \forall t \in I.$$

Za krivulju $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ kažemo da je **regularna** ako je

$$\|\dot{c}(t)\| \neq 0, \quad \forall t \in I,$$

tj. u svakoj točki krivulje postoji tangencijalni vektor.

Pokazat ćemo da za svaku regularnu krivulju postoji reparametrizacija duljinom luka. Prije toga navedimo nekoliko teorema koji će nam trebati i uvedimo neke oznake.

Kod realnih funkcija jedne varijable uvijek jedna varijabla ovisi o nekoj drugoj varijabli što zapisujemo u obliku

$$y = y(x),$$

pri čemu u tom zapisu naglašavamo da varijabla y ovisi o varijabli x . Ako je to preslikavanje bijektivno, onda inverznu funkciju označavamo s

$$x = y^{-1}(x).$$

Međutim, prirodnije je da inverznu funkciju označavamo s

$$x = x(y),$$

gdje sad naglašavamo da varijabla x ovisi o varijabli y .

Isto tako, ako je

$$y = y(x)$$

bijektivno preslikavanje, tada njegovu derivaciju
označavamo s

$$\frac{dy}{dx},$$

a derivaciju njemu inverznog preslikavanja

$$x = x(y)$$

označavamo s

$$\frac{dx}{dy}.$$

Sjetimo se sada kako se derivira inverzna funkcija.

Ako je $y = f(x)$, onda je

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

U našim novim oznakama bismo to elegantno zapisali u obliku

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

Formalno bismo na desnu stranu mogli gledati kao na dvojni razlomak, pa bi ova jednakost bila opravdana. No, moramo biti oprezni jer oznaka $\frac{dy}{dx}$ je jedan simbol, a ne razlomak koji se sastoji od brojnika i nazivnika.

Teorem 50.

Neka je $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Neka je $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija definirana s

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Tada je

$$\frac{dF}{dx} = f(x).$$

Dokaz.

Za $x \in [a, b]$ imamo

$$\begin{aligned}\frac{dF}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\int_a^{x+h} f(t) dt + \int_x^a f(t) dt \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt\end{aligned}$$

Prema teoremu srednje vrijednosti za integral neprekidne funkcije postoji $y \in \langle x, x+h \rangle$ takav da je

Krivulje u prostoru
Definicija krivulje
Jednadžba tangente
Duljina luka krivulje

Reparametrizacija

Oskulacijska ravnina
Frenetov trobrid
Fleksija i torzija
Frenetove formule
Opći parametar

$$\int_x^{x+h} f(t) dt = f(y)h,$$

iz čega slijedi da je

$$\frac{dF}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(y)h}{h} = f(x)$$

zbog neprekidnosti funkcije f , jer kada $h \rightarrow 0$, tada
 $y \rightarrow x$.



Neka je sada $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ regularna krivulja (analogno razmatranje vrijedi i za ravninsku krivulju). Neka je $s : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija duljine luka, tj.

$$s(t) = \int_a^t \|\dot{c}(\tau)\| d\tau.$$

Tada je

$$\frac{ds}{dt} = \|\dot{c}(t)\|.$$

Kako je c regularna krivulja, tada je $\|\dot{c}(t)\| > 0$. Stoga je s strogo rastuća funkcija pa onda ona ima inverznu funkciju $t = t(s)$ i vrijedi

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\|\dot{c}(t)\|}.$$

Neka je r reparametrizacija krivulje c funkcijom $t = t(s)$, tj.

$$r(s) = (c \circ t)(s).$$

Sada je

$$\frac{dr}{ds} = \frac{dc}{dt} \cdot \frac{dt}{ds},$$

odnosno

$$r'(s) = \frac{\dot{c}(t)}{\|\dot{c}(t)\|},$$

gdje je sa "crtica" označena derivacija po parametru s , a s "točkica" derivacija po parametru t .

$$\|r'(s)\| = \left\| \frac{\dot{c}(t)}{\|\dot{c}(t)\|} \right\| = \frac{1}{\|\dot{c}(t)\|} \cdot \|\dot{c}(t)\| = 1$$

Dakle, r je reparametrizacija krivulje c duljinom luka.

Napomena.

Derivacija po općem parametru t se standardno označava sa $\dot{c}(t)$, a derivacija po parametru s duljine luka s $c'(s)$.

Ako je $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizirana duljinom luka, tada je njezina duljina jednaka

$$s = \int_a^b \|\dot{c}(t)\| dt = \int_a^b dt = b - a.$$

Lako se dokaže da duljina luka krivulje ne ovisi o parametrizaciji te krivulje, tj. duljina luka krivulje je geometrijska veličina.

Primjer 72.

Reparametrizirajte krivulju $c(t) = (r \cos t, r \sin t, bt)$
duljinom luka.

Rješenje

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Krivulje u prostoru
Definicija krivulje
Jednadžba tangente
Duljina luka krivulje
Reparametrizacija
Oskulacijska ravnina
Frenetov trobrid
Fleksija i torzija
Frenetove formule
Opći parametar



Primjer 72.

Reparametrizirajte krivulju $c(t) = (r \cos t, r \sin t, bt)$ duljinom luka.

Rješenje

$$\dot{c}(t) = (-r \sin t, r \cos t, b), \quad \|\dot{c}(t)\| = \sqrt{r^2 + b^2}$$

$$s(t) = \int_0^t \|\dot{c}(\tau)\| d\tau = \int_0^t \sqrt{r^2 + b^2} d\tau = \sqrt{r^2 + b^2} t$$

Inverzna funkcija funkcije $s = s(t)$ je

$$t(s) = \frac{s}{\sqrt{r^2 + b^2}}.$$

Tražena reparametrizacija je

$$c_1(s) = (c \circ t)(s)$$

odnosno

$$c_1(s) = \left(r \cos \frac{s}{\sqrt{r^2 + b^2}}, r \sin \frac{s}{\sqrt{r^2 + b^2}}, \frac{bs}{\sqrt{r^2 + b^2}} \right).$$

Primjer 73.

Reparametrizirajte kružnicu $c : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$c(t) = (r \cos t, r \sin t)$ duljinom luka.

Rješenje

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Krivulje u prostoru
Definicija krivulje
Jednadžba tangente
Duljina luka krivulje

Reparametrizacija

Oskulacijska ravnina
Frenetov trobrid
Fleksija i torzija
Frenetove formule
Opći parametar



odnosno

$$c_1(s) = \left(r \cos \frac{s}{\sqrt{r^2 + b^2}}, r \sin \frac{s}{\sqrt{r^2 + b^2}}, \frac{bs}{\sqrt{r^2 + b^2}} \right).$$

Primjer 73.

Reparametrizirajte kružnicu $c : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$c(t) = (r \cos t, r \sin t)$ duljinom luka.

Rješenje

$$\dot{c}(t) = (-r \sin t, r \cos t), \quad \|\dot{c}(t)\| = r$$

$$s(t) = \int_0^t \|\dot{c}(\tau)\| d\tau = \int_0^t r d\tau = rt$$

Inverzna funkcija funkcije $s = s(t)$ je

$$t(s) = \frac{s}{r}.$$

Tražena reparametrizacija je

$$c_1(s) = (c \circ t)(s)$$

odnosno

$$c_1(s) = \left(r \cos \frac{s}{r}, r \sin \frac{s}{r} \right).$$

Nadalje, iz $s = rt$ i $t \in [0, 2\pi]$ slijedi da je $s \in [0, 2r\pi]$ pa

$$c_1 : [0, 2r\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

U slučaju da je $r > 1$ vrijedi $[0, 2\pi] \subset [0, 2r\pi]$. To zapravo znači da parametrizacijom c_1 sporije obilazimo kružnicu pa treba više vremena da ju cijelu obiđemo, pa je zbog toga taj segment veći.

U slučaju da je $0 < r < 1$ vrijedi $[0, 2\pi] \supset [0, 2r\pi]$. To zapravo znači da parametrizacijom c_1 brže obilazimo kružnicu pa treba manje vremena da ju cijelu obiđemo, pa je zbog toga taj segment manji.

Ove interpretacije su intuitivno jasne, jer kružnica polumjera $r > 1$ ima veću duljinu od jedinične kružnice pa nam treba više vremena da ju cijelu obiđemo, dok kružnica polumjera $r < 1$ ima manju duljinu od jedinične kružnice, pa nam treba manje vremena da ju obiđemo.

Kako svaka regularna krivulja ima parametrizaciju duljinom luka, cijelu teoriju krivulja je dovoljno napraviti za krivulje parametrizirane duljinom luka. Međutim, nije uvijek moguće jednostavno reparametrizirati krivulju duljinom luka. Sjetimo li se postupka kako to radimo, u taj postupak je uključeno računanje integrala i inverza funkcije. Prvi problem je što nije moguće svaki integral izraziti pomoću elementarnih funkcija (sjetimo se elipse kod koje se javio eliptički integral druge vrste), a drugi problem je što rješenje integrala može biti neka komplicirana funkcija čiji inverz je teško pronaći. Stoga se kod proučavanja krivulja prvo napravi teorija za krivulje PDL, a zatim se ta teorija primijeni na proučavanje krivulja koje su parametrizirane općim parametrom.

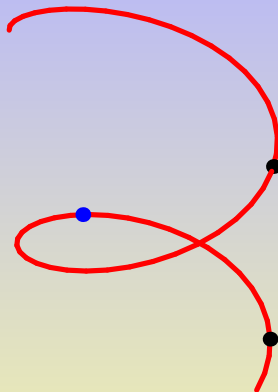
Oskulacijska ravnina

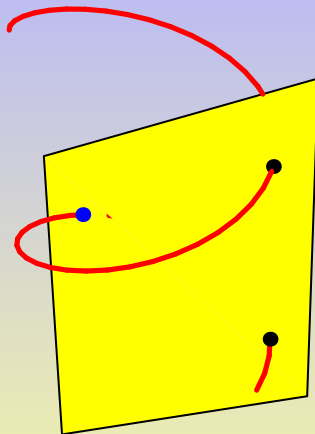
Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Krivulje u prostoru
Definicija krivulje
Jednadžba tangente
Duljina luka krivulje
Reparametrizacija
Oskulacijska ravnina
Frenetov trobrid
Fleksija i torzija
Frenetove formule
Opći parametar

Neka je $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ krivulja, $c(t) = (x(t), y(t), z(t))$.
Neka su T_0, T_1, T_2 tri nekolinearne točke na zadanoj krivulji. Te točke određuju jedinstvenu ravninu. Pustimo da se točke T_1 i T_2 približavaju po zadanoj krivulji točki T_0 . Tokom tog procesa se i ravnina koju te točke određuju mijenja i u graničnom slučaju dobijemo ravninu koju zovemo **oskulacijska ravnina** krivulje c u točki T_0 .





Krivulje u prostoru

Definicija krivulje

Jednadžba tangente

Duljina luka krivulje

Reparametrizacija

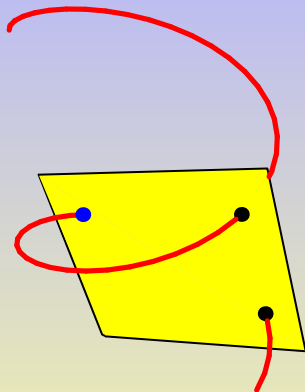
Oskulacijska ravnina

Frenetov trobrid

Flexija i torzija

Frenetove formule

Opći parametar



Krivulje u prostoru

Definicija krivulje

Jednadžba tangente

Duljina luka krivulje

Reparametrizacija

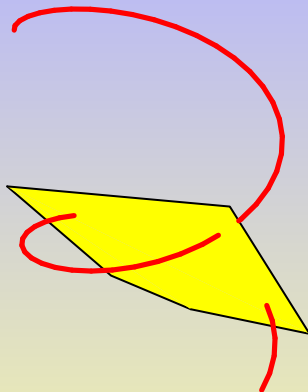
Oskulacijska ravnina

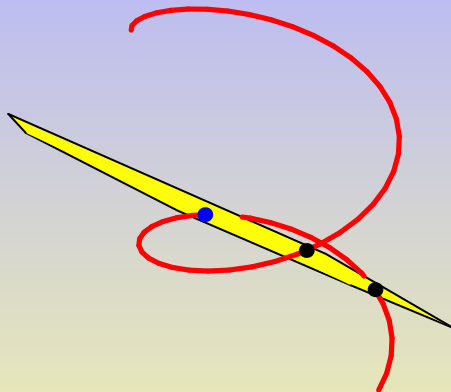
Frenetov trobrid

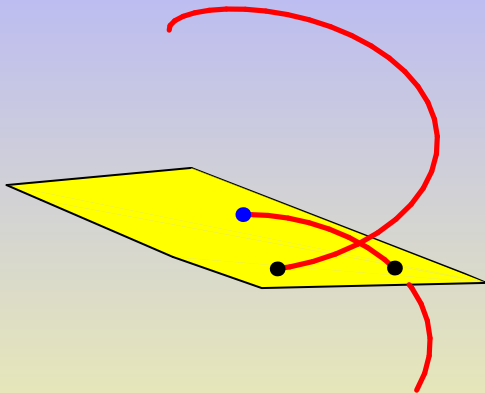
Fleksija i torzija

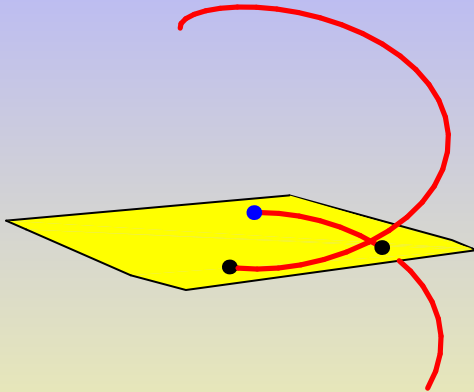
Frenetove formule

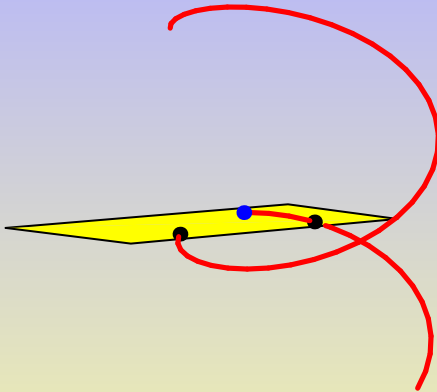
Opći parametar











Krivulje u prostoru

Definicija krivulje

Jednadžba tangente

Duljina luka krivulje

Reparametrizacija

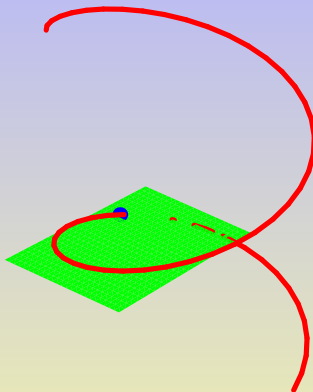
Oskulacijska ravnina

Frenetov trobrid

Fleksija i torzija

Frenetove formule

Opći parametar



Neka je $T_0 = c(t_0)$, $T_1 = c(t_1)$, $T_2 = c(t_2)$. Neka je

$$\pi \dots Ax + By + Cz + D = 0$$

jednadžba ravnine kroz točke T_0 , T_1 i T_2 . Tada je

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$$

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0,$$

$$Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0$$

gdje je $T_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = 0, 1, 2$.

Definiramo funkciju $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ s

$$F(t) = Ax(t) + By(t) + Cz(t) + D.$$

Uočimo da je $F(t_0) = 0$, $F(t_1) = 0$, $F(t_2) = 0$.

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $t_0 < t_1 < t_2$. Tada prema Rolleovom teoremu postoji $t' \in \langle t_0, t_1 \rangle$ takav da je $F'(t') = 0$. Isto tako, postoji $t'' \in \langle t_1, t_2 \rangle$ takav da je $F'(t'') = 0$. Sada primijenimo Rolleov teorem na F' , pa postoji $t''' \in \langle t', t'' \rangle$ takav da je $F''(t''') = 0$.

Ako $T_1 \rightarrow T_0$, $T_2 \rightarrow T_0$, tada $t_1 \rightarrow t_0$ i $t_2 \rightarrow t_0$. Iz toga slijedi da $t', t'', t''' \rightarrow t_0$, pa je onda zbog neprekidnosti $F'(t_0) = 0$ i $F''(t_0) = 0$.

$$F'(t) = Ax'(t) + By'(t) + Cz'(t)$$

$$F''(t) = Ax''(t) + By''(t) + Cz''(t)$$

Ove derivacije možemo zapisati u obliku skalarnog produkta

$$F'(t) = (A, B, C) \cdot (x'(t), y'(t), z'(t))$$

$$F''(t) = (A, B, C) \cdot (x''(t), y''(t), z''(t))$$

Zbog $F'(t_0) = 0$ i $F''(t_0) = 0$ slijedi da je

$$(A, B, C) \perp (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$$

$$(A, B, C) \perp (x''(t_0), y''(t_0), z''(t_0))$$

pa je

$$(A, B, C) = c'(t_0) \times c''(t_0).$$

Dakle, jednadžba oskulacijske ravnine u točki

$$T_0 = c(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$$

krivulje

$$c(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

glasi

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix} = 0.$$

Primjer 74.

Odredite oskulacijsku ravninu krivulje

$c(t) = (r \cos t, r \sin t, bt)$ u točki $T(r, 0, 0)$.

Rješenje

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Krivulje u prostoru

Definicija krivulje

Jednadžba tangente

Duljina luka krivulje

Reparametrizacija

Oskulacijska ravnina

Frenetov trobrid

Fleksija i torzija

Frenetove formule

Opći parametar



Primjer 74.

Odredite oskulacijsku ravninu krivulje

$c(t) = (r \cos t, r \sin t, bt)$ u točki $T(r, 0, 0)$.

Rješenje

Točku $T(r, 0, 0)$ dobijemo za $t = 0$.

$$\dot{c}(t) = (-r \sin t, r \cos t, b), \quad \ddot{c}(t) = (-r \cos t, -r \sin t, 0)$$

$$\dot{c}(0) = (0, r, b), \quad \ddot{c}(0) = (-r, 0, 0)$$

$$\vec{n}_\pi = \dot{c}(0) \times \ddot{c}(0) = (0, -rb, r^2)$$

Jednadžba oskulacijske ravnine je

$$\pi \dots 0 \cdot (x - r) - rb(y - 0) + r^2(z - 0) = 0$$

odnosno nakon sređivanja

$$\pi \dots by - rz = 0.$$

Frenetov trobrid

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Lema 12 (Derivacija skalarnog produkta).

Neka je

$$a(t) = (a_1(t), a_2(t), a_3(t)), \quad b(t) = (b_1(t), b_2(t), b_3(t)).$$

Tada je

$$\frac{d}{dt}(ab) = \frac{da}{dt}b + a\frac{db}{dt}.$$

Dokaz.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(ab) &= \frac{d}{dt}(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) = \\ &= a_1'b_1 + a_1b_1' + a_2'b_2 + a_2b_2' + a_3'b_3 + a_3b_3' = \\ &= (a_1'b_1 + a_2'b_2 + a_3'b_3) + (a_1b_1' + a_2b_2' + a_3b_3') = \end{aligned}$$

Krivulje u prostoru
Definicija krivulje
Jednadžba tangente
Duljina luka krivulje
Reparametrizacija
Oskulacijska ravnina
Frenetov trobrid
Fleksija i torzija
Frenetove formule
Opći parametar



$$= (a'_1, a'_2, a'_3) \cdot (b_1, b_2, b_3) + (a_1, a_2, a_3) \cdot (b'_1, b'_2, b'_3) =$$

$$= \frac{da}{dt}b + a\frac{db}{dt}$$



Neka je $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ regularna krivulja parametrizirana duljinom luka. Željeli bismo u svakoj točki krivulje definirati jednu ortonormiranu bazu za \mathbb{R}^3 koja bi nam davala neke informacije o zadanoj krivulji.

Najjednostavnije bi bilo da u svakoj točki krivulje uzmemo kanonsku bazu $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ koja je ortonormirana (tj. u svaku točku krivulje nanesimo te vektore), no u tom slučaju ti nam vektori ne bi davali neke informacije o zadanoj krivulji jer su izabrani neovisno o samoj krivulji.

Za krivulju c kažemo da je **nedegenerirana** ako su $\dot{c}(t)$ i $\ddot{c}(t)$ linearno nezavisni vektori u svakoj točki $t \in I$. Lako se dokaže da je nedegenerirana krivulja svaka krivulja čiji graf nije ni točka ni pravac. Posebno, svaka nedegenerirana krivulja je regularna.

Neka je $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ nedegenerirana krivulja parametrizirana duljinom luka. U svakoj točki $c(s)$ definiramo **trobrid pratilac**

$$\left\{ \vec{T}(s), \vec{N}(s), \vec{B}(s) \right\}$$

na sljedeći način.

Jedinični tangencijalni vektor:

$$\vec{T}(s) = c'(s)$$

Jedinični vektor glavne normale:

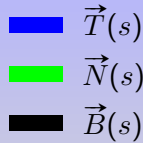
$$\vec{N}(s) = \frac{c''(s)}{\|c''(s)\|}$$

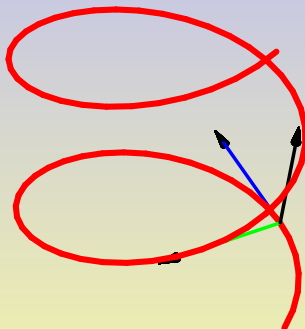
Jedinični vektor binormale:

$$\vec{B}(s) = \vec{T}(s) \times \vec{N}(s)$$

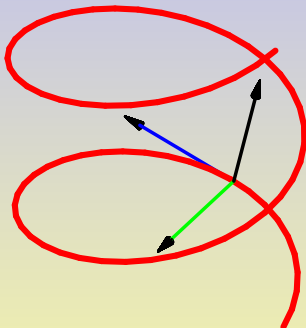
$\{\vec{T}(s), \vec{N}(s), \vec{B}(s)\}$ zovemo **trobridom pratiocem** ili

Frenetovim trobridom krivulje c u točki s .






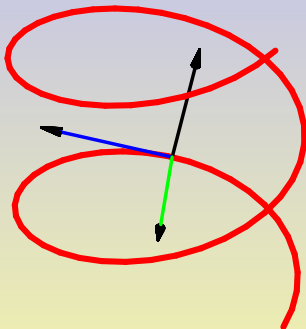
$$\vec{B}(s)$$




 $\vec{T}(s)$

 $\vec{N}(s)$

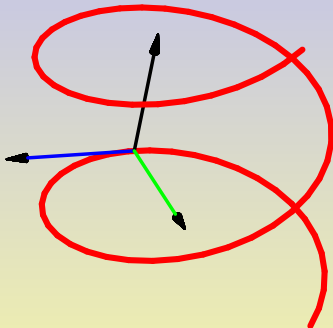
$$\vec{B}(s)$$

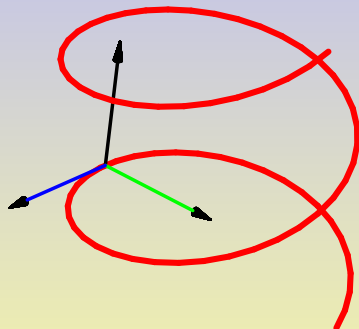


 $\vec{T}(s)$


 $\vec{N}(s)$


$$\vec{B}(s)$$

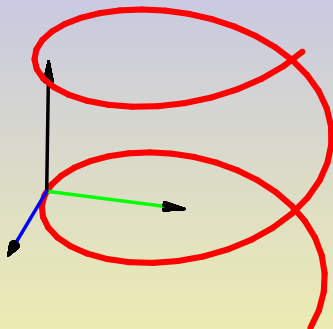
$$\vec{B}(s)$$





 $\vec{T}(s)$

 $\vec{N}(s)$

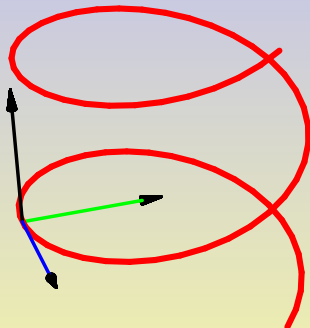
 $\vec{B}(s)$




 $\vec{T}(s)$

 $\vec{N}(s)$

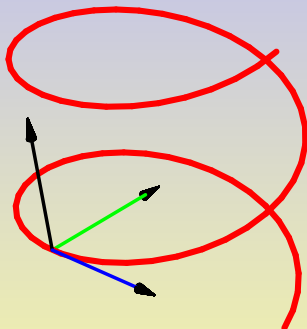
$$\vec{B}(s)$$




 $\vec{T}(s)$

 $\vec{N}(s)$

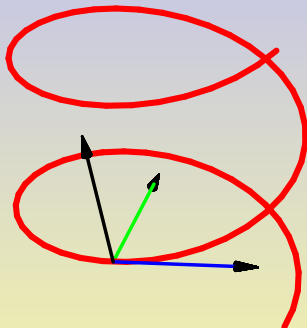
$$\vec{B}(s)$$




 $\vec{T}(s)$

 $\vec{N}(s)$

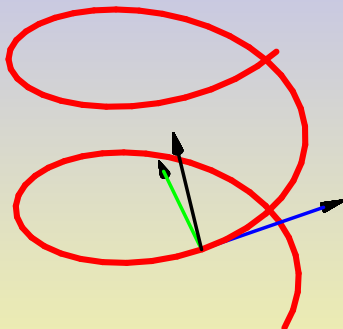
$$\vec{B}(s)$$

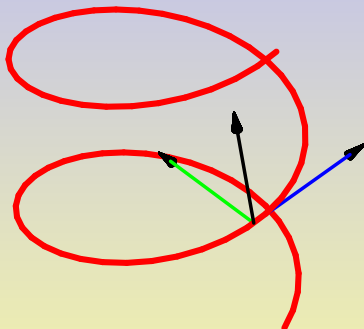


 $\vec{T}(s)$


 $\vec{N}(s)$

$$\vec{B}(s)$$

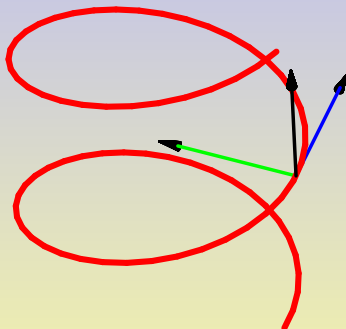
$$\vec{B}(s)$$





 $\vec{T}(s)$

 $\vec{N}(s)$

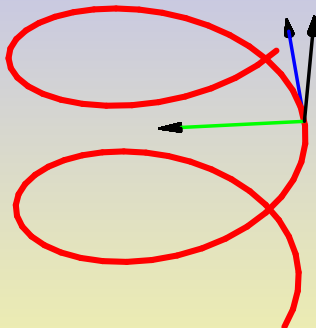
$$\vec{B}(s)$$




 $\vec{T}(s)$

 $\vec{N}(s)$

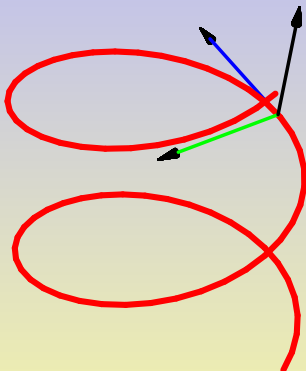
$$\vec{B}(s)$$




 $\vec{T}(s)$

 $\vec{N}(s)$

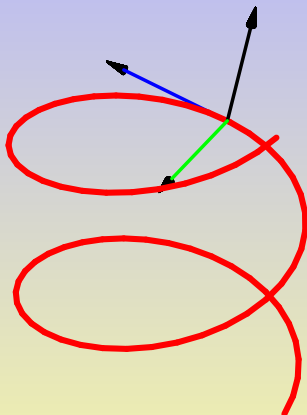
$$\vec{B}(s)$$




 $\vec{T}(s)$

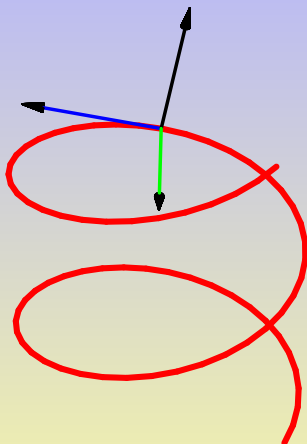
 $\vec{N}(s)$

$$\vec{B}(s)$$




 $\vec{N}(s)$

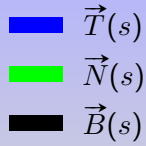
$$\vec{B}(s)$$



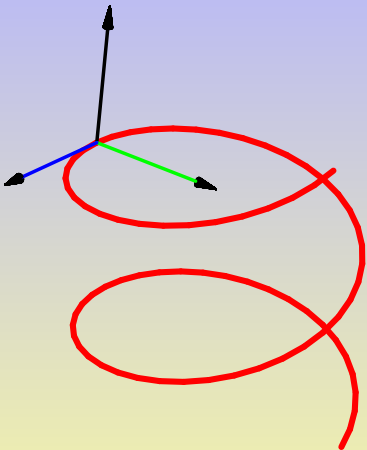
 $\vec{T}(s)$

 $\vec{N}(s)$

$$\vec{B}(s)$$



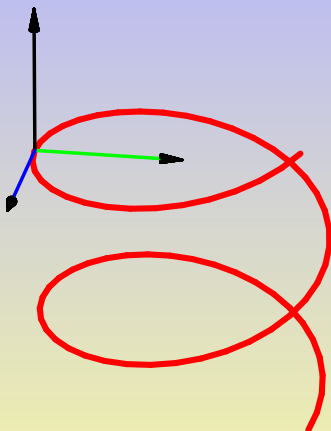
- Krivulje u prostoru
- Definicija krivulje
- Jednadžba tangente
- Duljina luka krivulje
- Reparametrizacija
- Oskulacijska ravnina
- Frenetov trobrid
- Fleksija i torzija
- Frenetove formule
- Opći parametar



— $\vec{T}(s)$

Normal $\vec{N}(s)$

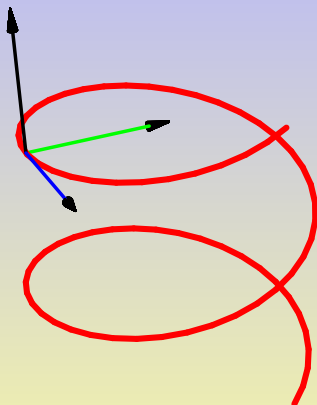
$$\vec{B}(s)$$



 $\vec{T}(s)$

$\vec{N}(s)$

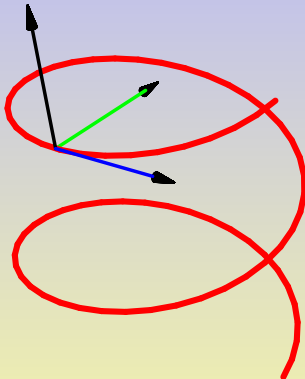
$\vec{B}(s)$




 $\vec{T}(s)$

$\vec{N}(s)$

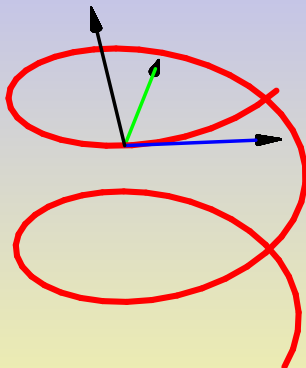
$$\vec{B}(s)$$




 $\vec{T}(s)$

 $\vec{N}(s)$

$$\vec{B}(s)$$



 $\vec{T}(s)$

 $\vec{N}(s)$

$$\vec{B}(s)$$

Krivulje u prostoru

Definicija krivulje

Jednadžba tangente

Duljina luka krivulje

Reparametrizacija

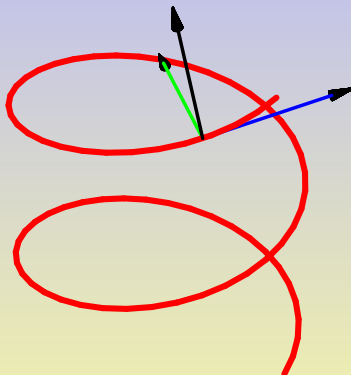
Oskulacijska ravnina

Frenetov trobrid


Fleksija i torzija


Frenetove formule

Opći parametar



 $\vec{T}(s)$

 $\vec{N}(s)$

 $\vec{B}(s)$

Frenetov trobrid krivulje c u svakoj točki s je jedna ortonormirana baza, tj. vektori $\vec{T}(s)$, $\vec{N}(s)$ i $\vec{B}(s)$ su međusobno okomiti i jediničnih su duljina.

Zaista, jer je krivulja c PDL

$$\|\vec{T}(s)\| = \|c'(s)\| = 1.$$

S druge strane, zbog $\|c'(s)\| = 1$ je $\|c'(s)\|^2 = 1$, odnosno $c'(s)^2 = 1$. Deriviranjem dobivamo

$$2c'(s) \cdot c''(s) = 0,$$

odnosno

$$c'(s) \cdot c''(s) = 0,$$

iz čega slijedi da je $c'(s) \perp c''(s)$.

Tada je

$$\vec{T}(s) \cdot \vec{N}(s) = c'(s) \cdot \frac{c''(s)}{\|c''(s)\|} = \frac{1}{\|c''(s)\|} c'(s) \cdot c''(s) = 0,$$

pa je $\vec{T}(s) \perp \vec{N}(s)$. Iz definicije slijedi da je $\|\vec{N}(s)\| = 1$.

Kako je $\vec{B}(s) = \vec{T}(s) \times \vec{N}(s)$, iz definicije vektorskog produkta slijedi da je

$$\vec{B}(s) \perp \vec{T}(s), \quad \vec{B}(s) \perp \vec{N}(s).$$

Nadalje, iz **Lagrangeovog identiteta** dobivamo

$$\begin{aligned} \|\vec{B}(s)\|^2 &= \|\vec{T}(s) \times \vec{N}(s)\|^2 = \\ &= \|\vec{T}(s)\|^2 \|\vec{N}(s)\|^2 - \left(\vec{T}(s) \cdot \vec{N}(s) \right)^2 = \\ &= 1 \cdot 1 - 0 = 1, \end{aligned}$$

pa je $\|\vec{B}(s)\| = 1$. Prema tome Frenetov trobrid

$$\{\vec{T}(s), \vec{N}(s), \vec{B}(s)\}$$

je zaista jedna ortonormirana baza za svaki $s \in I$.

Napomena.

Vektorsko polje V na \mathbb{R}^3 je preslikavanje koje svakoj točki $T \in \mathbb{R}^3$ pridružuje neki vektor nanesen iz te točke.

Specijalno, $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$ su jedinična vektorska polja na krivulji c koja redom zovemo tangencijalno polje, polje glavnih normala i polje binormala krivulje c .

Polja \vec{T} , \vec{N} i \vec{B} u svakoj točki krivulje određuju tri ravnine:

- **Oskulacijska ravnina** razapeta je vektorima $\vec{T}(s)$ i $\vec{N}(s)$ i prolazi točkom $c(s)$, a vektor $\vec{B}(s)$ je njezina normala. Jednadžba te ravnine glasi

$$(\mathbf{x} - c(s)) \cdot \vec{B}(s) = 0,$$

gdje je $\mathbf{x} = (x, y, z)$ radijvektor proizvoljne točke u toj ravnini. To je ravnina koja se najbolje priljubljuje uz krivulju u zadanoj točki krivulje. Posebno, ako je prostorna krivulja ravninska, tada ona leži u svojoj oskulacijskoj ravnini.

- **Normalna ravnina** je razapeta vektorima $\vec{N}(s)$ i $\vec{B}(s)$ i prolazi točkom $c(s)$, a vektor $\vec{T}(s)$ je njezina normala. Jednadžba te ravnine glasi

$$(\mathbf{x} - c(s)) \cdot \vec{T}(s) = 0,$$

gdje je $\mathbf{x} = (x, y, z)$ radijvektor proizvoljne točke u toj ravnini.

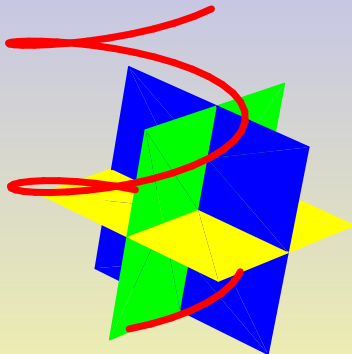
- **Rektifikacijska ravnina** je razapeta vektorima $\vec{T}(s)$ i $\vec{B}(s)$ i prolazi točkom $c(s)$, a vektor $\vec{N}(s)$ je njezina normala. Jednadžba te ravnine glasi

$$(\mathbf{x} - c(s)) \cdot \vec{N}(s) = 0,$$

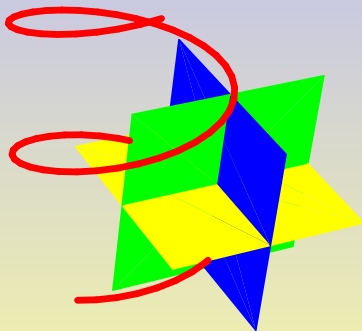
gdje je $\mathbf{x} = (x, y, z)$ radijvektor proizvoljne točke u toj ravnini.

100

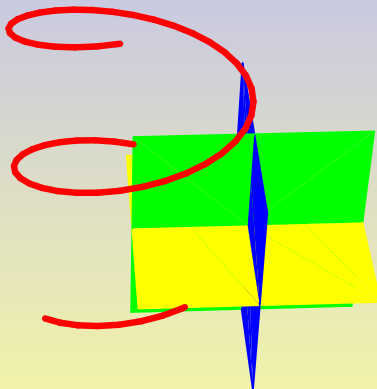
rektifikacijska



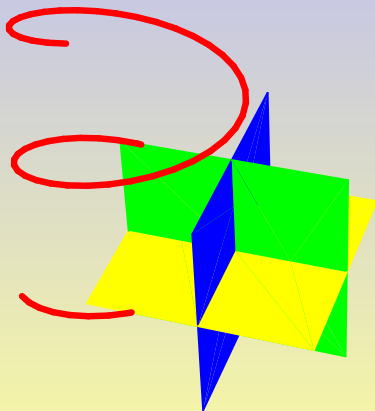
oskulacijska normalna rektifikacijska



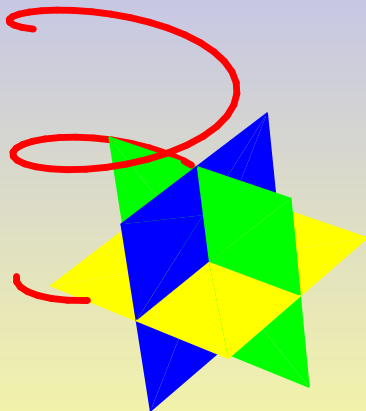
oskulacijska normalna rektifikacijska



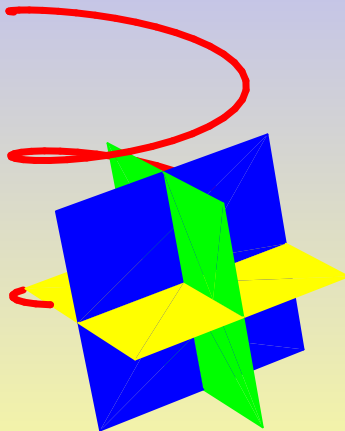
oskulacijska normalna rektifikacijska



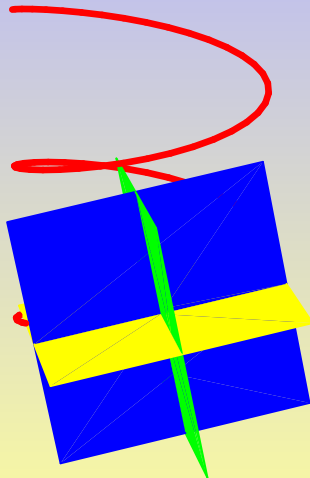
oskulacijska normalna rektifikacijska



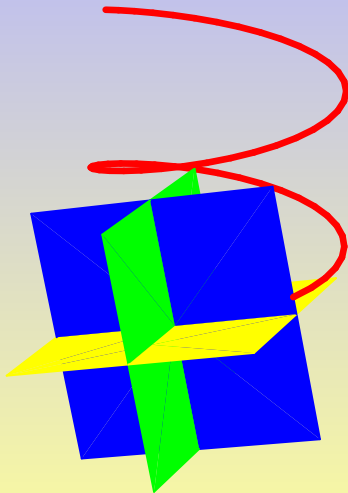
oskulacijska normalna rektifikacijska



oskulacijska normalna rektifikacijska



oskulacijska normalna rektifikacijska





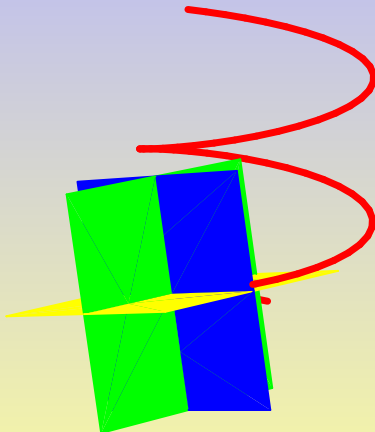
oskulacijska



normalna



rektifikacijska



Krivulje u prostoru

Definicija krivulje

Jednadžba tangente

Duljina luka krivulje

Reparametrizacija

Oskulacijska ravnina

Frenetov trobrid

Fleksija i torzija

Frenetove formule

Opći parametar





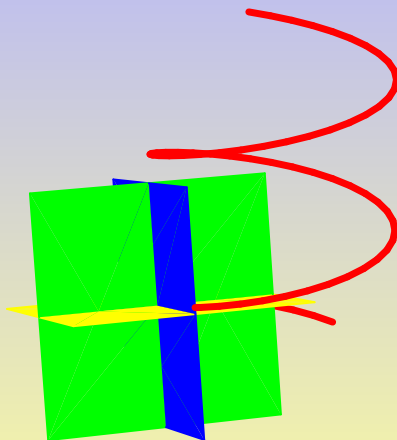
oskulacijska



normalna



rektifikacijska



Krivulje u prostoru

Definicija krivulje

Jednadžba tangente

Duljina luka krivulje

Reparametrizacija

Oskulacijska ravnina

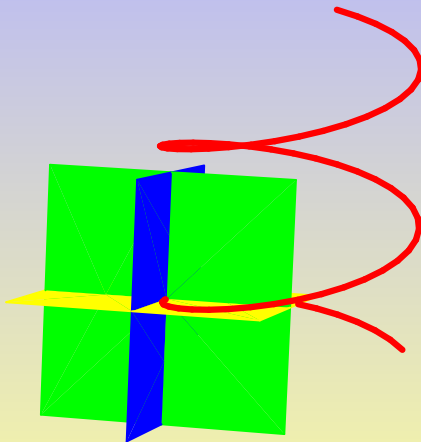
Frenetov trobrid

Fleksija i torzija

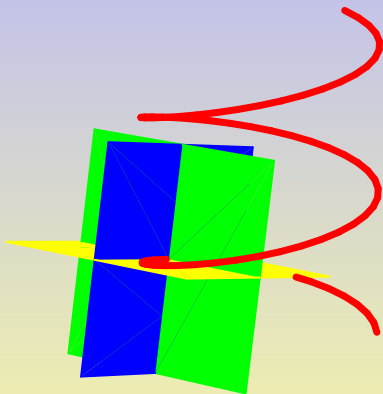
Frenetove formule

Opći parametar

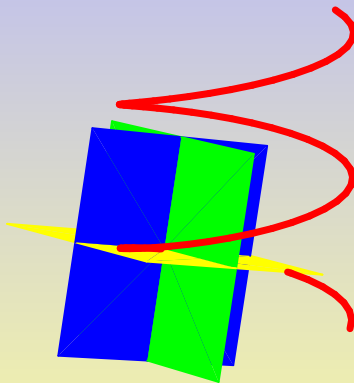
oskulacijska normalna rektifikacijska



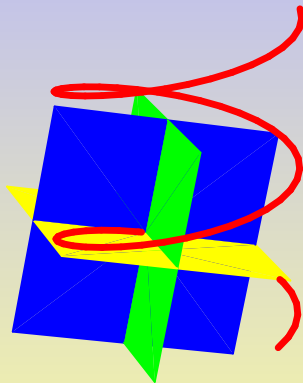
oskulacijska normalna rektifikacijska



oskulacijska normalna rektifikacijska

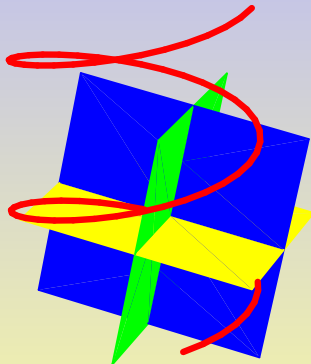


oskulacijska normalna rektifikacijska



100

rektifikacijska



Isto tako, svaki od vektora iz Frenetovog trobrida određuje po jedan pravac:

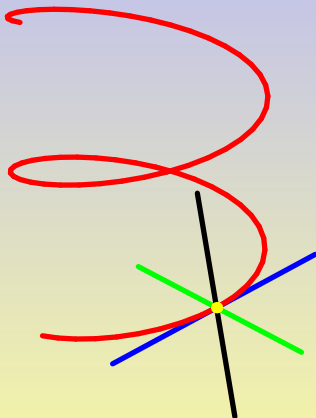
- **tangenta** krivulje u točki $c(s)$ je pravac koji prolazi točkom $c(s)$ i ima vektor smjera $\vec{T}(s)$
- **normala** krivulje u točki $c(s)$ je pravac koji prolazi točkom $c(s)$ i ima vektor smjera $\vec{N}(s)$
- **binormala** krivulje u točki $c(s)$ je pravac koji prolazi točkom $c(s)$ i ima vektor smjera $\vec{B}(s)$

Napomena.

Vektor smjera pravca ne mora biti jedinične duljine.

Stoga za vektore smjera tangente, normale i binormale možemo uzeti redom bilo koje vektore koji su kolinearni s $\vec{T}(s)$, $\vec{N}(s)$ odnosno $\vec{B}(s)$.

■ tangenta ■ normala ■ binormala



Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Krivulje u prostoru
Definicija krivulje
Jednadžba tangente
Duljina luka krivulje
Reparametrizacija
Oskulacijska ravnina
Frenetov trobrid
Fleksija i torzija
Frenetove formule
Opći parametar



Primjer 75.

Odredite Frenetov trobrid, oskulacijsku, normalnu i rektifikacijsku ravninu, te tangentu, normalu i binormalu krivulje

$$c(s) = \left(a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)$$

u točki $T(a, 0, 0)$, pri čemu je $a > 0$.

Rješenje

Krivulje u prostoru
Definicija krivulje
Jednadžba tangente
Duljina luka krivulje
Reparametrizacija
Oskulacijska ravnina
Frenetov trobrid
Fleksija i torzija
Frenetove formule
Opći parametar

Primjer 75.

Odredite Frenetov trobrid, oskulacijsku, normalnu i rektifikacijsku ravninu, te tangentu, normalu i binormalu krivulje

$$c(s) = \left(a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)$$

u točki $T(a, 0, 0)$, pri čemu je $a > 0$.

Rješenje

Točku $T(a, 0, 0)$ dobijemo za $s = 0$.

$$c'(s) = \left(\frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)$$

$\|c'(s)\| = 1$ pa je krivulja c PDL

$$c''(s) = \left(\frac{-a}{a^2+b^2} \cos \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{-a}{a^2+b^2} \sin \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, 0 \right)$$

$$\|c''(s)\| = \frac{a}{a^2 + b^2}$$

Po definiciji je

$$\vec{T}(0) = c'(0)$$

$$\vec{N}(0) = \frac{c''(0)}{\|c''(0)\|}$$

$$\vec{B}(0) = \vec{T}(0) \times \vec{N}(0)$$

Kako je

$$c'(0) = \left(0, \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)$$

$$c''(0) = \left(\frac{-a}{a^2 + b^2}, 0, 0 \right), \quad \|c''(0)\| = \frac{a}{a^2 + b^2}$$

slijedi da je Frenetov trobrid krivulje c u točki $T(a, 0, 0)$

$$\vec{T}(0) = \left(0, \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

$$\vec{N}(0) = \frac{a^2+b^2}{a} \left(\frac{-a}{a^2+b^2}, 0, 0\right) = (-1, 0, 0)$$

$$\vec{B}(0) = \vec{T}(0) \times \vec{N}(0) = \left(0, \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

Oskulacijska ravnina krivulje c u točki $T(a, 0, 0)$:

Normala te ravnine je vektor $\vec{B}(0)$, no kako je važan samo smjer, za normalu možemo uzeti vektor

$$\sqrt{a^2+b^2} \cdot \vec{B}(0) = (0, -b, a)$$

$$\pi_o \dots 0 \cdot (x - a) - b(y - 0) + a(z - 0) = 0$$

Nakon sređivanja dobivamo

$$\pi_o \dots by - az = 0.$$

Normalna ravnina krivulje c u točki $T(a, 0, 0)$:

Normala te ravnine je vektor $\vec{T}(0)$, no kako je važan samo smjer, za normalu možemo uzeti vektor

$$\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \vec{T}(0) = (0, a, b)$$

$$\pi_n \dots 0 \cdot (x - a) + a(y - 0) + b(z - 0) = 0,$$

odnosno nakon sređivanja

$$\pi_n \dots ay + bz = 0.$$

Rektifikacijska ravnina krivulje c u točki $T(a, 0, 0)$:

Normala te ravnine je vektor $\vec{N}(0)$ pa je njezina
jednadžba

$$\pi_r \dots - 1 \cdot (x - a) + 0 \cdot (y - 0) + 0 \cdot (z - 0) = 0,$$

odnosno nakon sređivanja

$$\pi_r \dots x - a = 0.$$

Tangenta krivulje c u točki $T(a, 0, 0)$:

Vektor smjera tog pravca je $\vec{T}(0)$, no kako je važan samo
smjer, za vektor smjera možemo uzeti

$$\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \vec{T}(0) = (0, a, b)$$

$$t \dots \frac{x - a}{0} = \frac{y}{a} = \frac{z}{b}$$

Normala krivulje c u točki $T(a, 0, 0)$:

Vektor smjera tog pravca je $\vec{N}(0)$, pa je njegova
jednadžba

$$n \dots \frac{x - a}{-1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{0}$$

Binormala krivulje c u točki $T(a, 0, 0)$:

Vektor smjera tog pravca je $\vec{B}(0)$, no kako je važan samo
smjer, za vektor smjera možemo uzeti

$$\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \vec{B}(0) = (0, -b, a)$$

$$b \dots \frac{x - a}{0} = \frac{y}{-b} = \frac{z}{a}$$

Fleksija i torzija prostorne krivulje

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

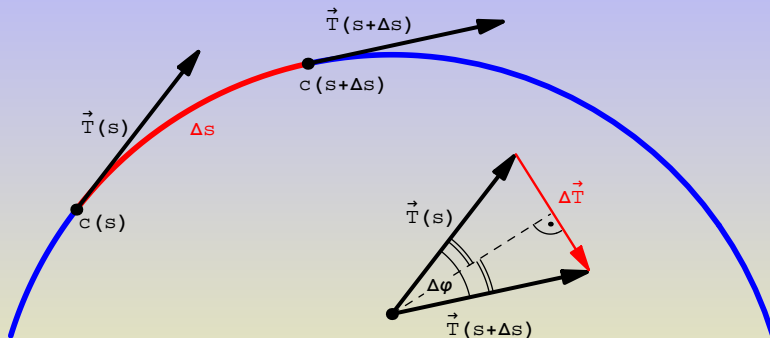
Neka je $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ regularna krivulja PDL.

Željeli bismo na neki način mjeriti koliko jako je krivulja c zakrivljena u nekoj točki $c(s)$. Ideja je da u točki $c(s)$ pogledamo tangencijalni vektor $\vec{T}(s)$ te krivulje. Zatim uzmemo neku drugu točku $c(s + \Delta s)$ na krivulji koja je blizu točke $c(s)$ i pogledamo tangencijalni vektor $\vec{T}(s + \Delta s)$ u toj točki. Označimo sa $\Delta\varphi$ kut između tih tangencijalnih vektora, tj.

$$\Delta\varphi = \angle \left(\vec{T}(s), \vec{T}(s + \Delta s) \right).$$

Krivulje u prostoru
Definicija krivulje
Jednadžba tangente
Duljina luka krivulje
Reparametrizacija
Oskulacijska ravnina
Frenetov trobrid
Fleksija i torzija
Frenetove formule
Opći parametar





$$\kappa(s) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$$

Sada razmišljamo dalje ovako. Ako se iz točke $c(s)$ pomaknemo duž luka krivulje za neki Δs , tada se tangencijalni vektor $\vec{T}(s)$ zakrene za neki kut $\Delta\varphi$ i poprimi položaj tangencijalnog vektora $\vec{T}(s + \Delta s)$. Sada mjerimo promjenu $\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$ kada $\Delta s \rightarrow 0$ i taj broj zovemo zakrivljenost ili fleksija krivulje c u točki $c(s)$. Dakle, zakrivljenost ili fleksija krivulje mjeri promjenu smjera tangente krivulje. Napomenimo da sa $\Delta\varphi$ zapravo označavamo apsolutnu vrijednost zakreta tangencijalnog vektora u radianima duž određenog luka.

Preciznije, **fleksija** ili **zakrivljenost** regularne krivulje

$c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ koja je PDL je preslikavanje

$$\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$$

definirano s

$$\kappa(s) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta s}.$$

Dakle, fleksija krivulje je granična vrijednost kvocijenta zakreta tangencijalnog vektora duž nekog luka krivulje i duljine tog luka.

Krivulje u prostoru

Definicija krivulje

Jednadžba tangente

Duljina luka krivulje

Reparametrizacija

Oskulacijska ravnina

Frenetov trobrid

Fleksija i torzija

Frenetove formule

Opći parametar

Definicija fleksije je malo nespretna za samo računanje pa ćemo sada izvesti formulu pomoću koje ćemo vrlo jednostavno računati fleksiju. Uz prethodne oznake, dovedemo li vektore $\vec{T}(s)$ i $\vec{T}(s + \Delta s)$ u istu točku, dobit ćemo trokut kojemu je jedan kut $\Delta\varphi$. S druge strane, jer je krivulja c PDL, vrijedi

$$\|\vec{T}(s)\| = \|\vec{T}(s + \Delta s)\| = 1,$$

pa je taj trokut zapravo jednakokračan. Iz tog trokuta dobivamo

$$\sin \frac{\Delta\varphi}{2} = \frac{\|\Delta\vec{T}\|}{2},$$

gdje je $\Delta\vec{T} = \vec{T}(s + \Delta s) - \vec{T}(s)$.

Sada je

$$\begin{aligned}\kappa(s) &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\|\Delta \vec{T}\|} \cdot \frac{\|\Delta \vec{T}\|}{\Delta s} = \\ &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{2 \sin \frac{\Delta \varphi}{2}} \cdot \frac{\|\Delta \vec{T}\|}{\Delta s} = \left\| \frac{d\vec{T}}{ds} \right\| = \|c''(s)\|\end{aligned}$$

Dakle, ako je $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ regularna krivulja koja je PDL, tada je

$$\kappa(s) = \|c''(s)\|$$

Polumjer zakrivljenosti je recipročna vrijednost fleksije, tj.

$$\rho(s) = \frac{1}{\kappa(s)}$$

Na sličan način definiramo i torziju regularne krivulje $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ koja je PDL. Naime, sada umjesto tangencijalnog vektora $\vec{T}(s)$, promatramo vektor binormale $\vec{B}(s)$ i mjerimo graničnu vrijednost kvocijenta zakreta vektora binormale duž nekog luka krivulje i duljine tog luka, tj. preciznije torzija krivulje c u točki s je jednaka

$$\tau(s) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \psi}{\Delta s},$$

gdje je (analogno kao i kod fleksije) $\Delta \psi$ vrijednost zakreta vektora binormale $\vec{B}(s)$ u radijanima duž nekog luka (samo što ovdje ne uzimamo apsolutnu vrijednost). Dakle, torzija krivulje mjeri promjenu smjera binormale krivulje.

Preciznije, **torzija** ili **sukanje** regularne krivulje $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ koja je PDL je preslikavanje

$$\tau : I \rightarrow \mathbb{R},$$

definirano s

$$\tau(s) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \psi}{\Delta s},$$

gdje je $\Delta \psi$ zakret vektora binormale $\vec{B}(s)$ u radijanima duž luka Δs . Napomenimo još jednom da smo kod fleksije uzeli apsolutnu vrijednost zakreta tangencijalnog vektora. Ovdje nismo uzeli apsolutnu vrijednost jer nas zanima i u kojem smjeru se zakreće vektor binormale, što nas kod tangencijalnog vektora nije zanimalo (naravno, moglo nas je to i tamo zanimati pa bismo onda imali drukčiju definiciju fleksije).

Može se dokazati (na sličan način kao i kod fleksije) da je torzija po apsolutnoj vrijednosti jednaka

$$|\tau| = \left\| \frac{d\vec{B}}{ds} \right\|,$$

odnosno preciznije

$$\tau(s) = -\vec{N}(s) \cdot \frac{d\vec{B}}{ds}$$

Napomena.

Kod ravninskih krivulja se u definiciji fleksije uzima u obzir i smjer zakreta tangencijalnog vektora. Tada se pokazuje da, ako je $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ ravninska krivulja koja je PDL, tada se njezina fleksija računa po formuli

$$\kappa(s) = \det(c'(s), c''(s)).$$

Nama je ovdje osnovni ambijent \mathbb{R}^3 pa ćemo na svaku ravninsku krivulju gledati kao na prostornu krivulju i njezinu fleksiju računati po formuli za računanje fleksije prostorne krivulje.

Primjer 76.

Odredite fleksiju i torziju obične cilindrične spirale.

Rješenje

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Krivulje u prostoru
Definicija krivulje
Jednadžba tangente
Duljina luka krivulje
Reparametrizacija
Oskulacijska ravnina
Frenetov trobrid
Fleksija i torzija
Frenetove formule
Opći parametar



Primjer 76.

Odredite fleksiju i torziju obične cilindrične spirale.

Rješenje

Parametrizacija duljinom luka obične cilindrične spirale glasi

$$c(s) = \left(a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)$$

Nadalje je

$$c'(s) = \left(\frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)$$

$$c''(s) = \left(\frac{-a}{a^2+b^2} \cos \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{-a}{a^2+b^2} \sin \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, 0 \right)$$

Dakle,

$$\kappa(s) = \|c''(s)\| = \frac{a}{a^2 + b^2} = \text{const.}$$

$$\vec{T}(s) = \left(\frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)$$

$$\vec{N}(s) = \left(-\cos \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\sin \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, 0 \right)$$

$$\vec{B}(s) = \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)$$

$$\frac{d\vec{B}}{ds} = \left(\frac{b}{a^2+b^2} \cos \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{a^2+b^2} \sin \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, 0 \right)$$

$$\tau(s) = -\vec{N}(s) \cdot \frac{d\vec{B}}{ds} = \frac{b}{a^2+b^2} = \text{const.}$$

Dakle, obična cilindrična spirala ima konstantnu fleksiju i konstantnu torziju.

Primjer 77.

Odredite fleksiju i torziju kružnice

$$c(s) = \left(r \cos \frac{s}{r}, r \sin \frac{s}{r}, 0 \right).$$

Rješenje

Krivulje u prostoru
Definicija krivulje
Jednadžba tangente
Duljina luka krivulje
Reparametrizacija
Oskulacijska ravnina
Frenetov trobrid
Fleksija i torzija
Frenetove formule
Opći parametar

Primjer 77.

Odredite fleksiju i torziju kružnice

$$c(s) = \left(r \cos \frac{s}{r}, r \sin \frac{s}{r}, 0 \right).$$

Rješenje

$$c'(s) = \left(-\sin \frac{s}{r}, \cos \frac{s}{r}, 0 \right)$$

$$c''(s) = \left(-\frac{1}{r} \cos \frac{s}{r}, -\frac{1}{r} \sin \frac{s}{r}, 0 \right)$$

Stoga je

$$\kappa(s) = \|c''(s)\| = \frac{1}{r}.$$

$$\vec{T}(s) = c'(s) = \left(-\sin \frac{s}{r}, \cos \frac{s}{r}, 0\right)$$

$$\vec{N}(s) = \frac{c''(s)}{\|c''(s)\|} = \left(-\cos \frac{s}{r}, -\sin \frac{s}{r}, 0\right)$$

$$\vec{B}(s) = \vec{T}(s) \times \vec{N}(s) = (0, 0, 1)$$

$$\frac{d\vec{B}}{ds} = (0, 0, 0)$$

Stoga je

$$\tau(s) = -\vec{N}(s) \cdot \frac{d\vec{B}}{ds} = 0$$

Dakle, fleksija i torzija kružnice su konstantne. Fleksija je jednaka recipročnoj vrijednosti polumjera, a torzija je 0.

Napomena.

Pokazuje se da uz zadane funkcije $\kappa, \tau : I \rightarrow \mathbb{R}$,
 $\kappa(s) \geq 0$, postoji jedinstvena do na položaj u prostoru
krivulja kojoj je κ fleksija, a τ torzija. Drugim riječima,
ako postoje dvije krivulje c_1 i c_2 koje imaju istu fleksiju i
istu torziju, tada postoji izometrija prostora koja krivulju
 c_1 preslikava u krivulju c_2 .

Tako je npr., zavojnica određena s $\kappa = \text{const.}$ i
 $\tau = \text{const.}$, dok je kružnica polumjera r određena s $\kappa = \frac{1}{r}$
i $\tau = 0$.

Dokazat ćemo kasnije da je za svaku ravninsku krivulju
 $\tau = 0$.

Propozicija 61 (Frenetove formule).

Neka je c nedegenerirana krivulja PDL, $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$. Tada vrijedi:

$$\vec{T}'(s) = \kappa(s)\vec{N}(s)$$

$$\vec{N}'(s) = -\kappa(s)\vec{T}(s) + \tau(s)\vec{B}(s)$$

$$\vec{B}'(s) = -\tau(s)\vec{N}(s)$$

Dokaz.

$\{\vec{T}(s), \vec{N}(s), \vec{B}(s)\}$ u svakoj točki $c(s)$ čini jednu ortonormiranu bazu, pa je

$$\vec{T}'(s) = a_{11}(s)\vec{T}(s) + a_{12}(s)\vec{N}(s) + a_{13}(s)\vec{B}(s) \quad (1)$$

$$\vec{N}'(s) = a_{21}(s)\vec{T}(s) + a_{22}(s)\vec{N}(s) + a_{23}(s)\vec{B}(s) \quad (2)$$

$$\vec{B}'(s) = a_{31}(s)\vec{T}(s) + a_{32}(s)\vec{N}(s) + a_{33}(s)\vec{B}(s) \quad (3)$$

gdje su $a_{ij} : I \rightarrow \mathbb{R}$ za sada neodređene funkcije. Kako je

$\vec{T}(s)^2 = 1$, deriviranjem slijedi da je $\vec{T}' \cdot \vec{T} = 0$.

Pomnožimo li (1) skalarno s \vec{T} , dobivamo $\vec{T}' \cdot \vec{T} = a_{11}$,

pa je stoga $a_{11} = 0$. Analogno je, zbog $\vec{N}(s)^2 = 1$ i

$\vec{B}(s)^2 = 1$, $a_{22} = 0$ i $a_{33} = 0$.

Nadalje, iz $\vec{T} \cdot \vec{N} = 0$ deriviranjem slijedi

$$\vec{T}' \cdot \vec{N} + \vec{T} \cdot \vec{N}' = 0. \quad (*)$$

Pomnožimo li (1) skalarno s \vec{N} , a (2) skalarno s \vec{T} ,
dobivamo

$$\vec{T}' \cdot \vec{N} = a_{12}, \quad \vec{T} \cdot \vec{N}' = a_{21},$$

i nakon uvrštavanja u (*) slijedi da je $a_{21} = -a_{12}$.

Poptuno analogno, zbog $\vec{T} \cdot \vec{B} = 0$ i $\vec{N} \cdot \vec{B} = 0$,
dobivamo $a_{31} = -a_{13}$ i $a_{32} = -a_{23}$.

$$\vec{N}(s) = \frac{c''(s)}{\|c''(s)\|} = \frac{\vec{T}'(s)}{\|\vec{T}'(s)\|} = \frac{\vec{T}'(s)}{\kappa(s)}$$

pa je

$$\vec{T}'(s) = \kappa(s)\vec{N}(s).$$

Zbog jedinstvenosti prikaza u bazi je $a_{12} = \kappa$, $a_{13} = 0$.

Nadalje,

$$\tau(s) = -\vec{N}(s) \cdot \vec{B}'(s) = -a_{32} = a_{23},$$

iz čega slijede preostale dvije jednakosti iz tvrdnje propozicije.



Propozicija 62.

Neka je $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ nedegenerirana krivulja. Krivulja c je ravninska akko $\tau = 0$.

Dokaz.

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je c PDL.



Ako je c ravninska krivulja, tada postoji ravnina u kojoj c leži

$$(\mathbf{x} - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{q} = 0$$

gdje su $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$ konstantni vektori. Kako je c u toj ravnini, onda vrijedi

$$(c(s) - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{q} = 0.$$

Deriviramo li jednom, dobivamo

$$c'(s) \cdot \mathbf{q} = 0,$$

te nakon toga još jednom

$$c''(s) \cdot \mathbf{q} = 0.$$

Dakle, $\mathbf{q} \perp c'$ i $\mathbf{q} \perp c''$. No, i vektor binormale \vec{B} ima to svojstvo, pa je

$$\vec{B}(s) = \pm \frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|} = \text{const.}$$

Sada iz Frenetovih formula slijedi

$$0 = \vec{B}'(s) = -\tau(s)\vec{N}(s).$$

Kako je zbog regularnosti $\vec{N}(s) \neq \vec{0}$, slijedi da je $\tau(s) = 0$, za svaki $s \in I$.



Pretpostavimo da je $\tau(s) = 0$ za svaki $s \in I$. Tada je prema Frenetovim formulama

$$\vec{B}'(s) = -\tau(s)\vec{N}(s) = \vec{0}$$

iz čega slijedi da je $\vec{B} = \text{const.}$ Dokažimo da krivulja c leži u ravnini čija normala je vektor \vec{B} i koja prolazi točkom $c(s_0)$. Drugim riječima, želimo dokazati da je

$$(c(s) - c(s_0)) \cdot \vec{B} = 0,$$

tj. da krivulja c leži u svojoj oskulacijskoj ravnini. U tu svrhu promotrimo funkciju

$$f : I \rightarrow \mathbb{R}$$

definiranu s

$$f(s) = (c(s) - c(s_0)) \cdot \vec{B}.$$

Derivacija te funkcije je

$$f'(s) = c'(s) \cdot \vec{B} = \vec{T} \cdot \vec{B} = 0,$$

pa je f konstanta na I . Kako je $f(s_0) = 0$, onda je $f(s) = 0$ za svako $s \in I$, pa je c zaista ravninska krivulja i ona leži u svojoj oskulacijskoj ravnini.



Pogledajmo sada konačno i pravac u prostoru kojeg smo do sada izbjegavali. Naime, pravac je regularna krivulja, ali je degenerirana. No, kod pravca je tangencijalni vektor konstantan pa se ne zakreće i stoga je $\Delta\varphi = 0$, pa je

$$\kappa(s) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta s} = 0$$

Kod pravca binormala nije definirana, tj. degenerira u nulvektor, pa torzija nije definirana. No, kako je pravac ravninska krivulja, možemo definirati da je njegova torzija jednaka 0 u svakoj točki. Kako pravac leži u beskonačno mnogo ravnina, onda oskulacijska ravnina pravca nije određena. Kako je svaka krivulja u prostoru do na položaj određena svojom fleksijom i torzijom, tada je s $\kappa = 0$ i $\tau = 0$ određen pravac u prostoru.

Krivulje parametrizirane općim parametrom

Postavlja se pitanje kako odrediti Frenetov trobrid, fleksiju i torziju za krivulje parametrizirane općim parametrom.

Neka je $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ krivulja parametrizirana općim parametrom. Znamo da je duljina luka jednaka

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\dot{c}(\tau)\| \, d\tau, \quad t_0, t \in I.$$

Derivacija te funkcije je jednaka

$$\frac{ds}{dt} = \|\dot{c}(t)\|.$$

Nadalje, znamo da postoji reparametrizacija

$$c_1 : J \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad J = s(I)$$

inverznom funkcijom $t = t(s)$ funkcije s . To je reparametrizacija duljinom luka.

$$c_1(s) = c(t(s))$$

Kako je krivulja c_1 PDL, znamo definirati njen Frenetov trobrid $\{\vec{T}_1, \vec{N}_1, \vec{B}_1\}$, fleksiju κ_1 i torziju τ_1 .

Za polaznu krivulju c definiramo:

- Polje tangencijalnih vektora

$$\vec{T}(t) := \vec{T}_1(s(t)) = \vec{T}_1(s)$$

- Polje glavnih normala

$$\vec{N}(t) := \vec{N}_1(s(t)) = \vec{N}_1(s)$$

- Polje binormala

$$\vec{B}(t) := \vec{B}_1(s(t)) = \vec{B}_1(s)$$

- Fleksiju

$$\kappa(t) := \kappa_1(s(t)) = \kappa_1(s)$$

- Torziju

$$\tau(t) := \tau_1(s(t)) = \tau_1(s)$$

Propozicija 63.

Neka je $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ nedegenerirana krivulja. Tada je

$$\vec{T}(t) = \frac{\dot{c}(t)}{\|\dot{c}(t)\|}$$

$$\vec{B}(t) = \frac{\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)}{\|\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)\|}$$

$$\vec{N}(t) = \vec{B}(t) \times \vec{T}(t)$$

Dokaz.

Neka je $c_1(s)$ reparametrizacija krivulje c duljinom luka.

$$\begin{aligned}\dot{c}(t) &= \frac{dc}{dt}(t) = \frac{d}{dt}c_1(s(t)) = \frac{dc_1}{ds}(s(t)) \cdot \frac{ds}{dt} = \\ &= \vec{T}_1(s(t)) \cdot \frac{ds}{dt} = \vec{T}(t) \cdot \|\dot{c}(t)\|\end{aligned}$$

Dakle, dobili smo da je

$$\vec{T}(t) = \frac{\dot{c}(t)}{\|\dot{c}(t)\|}.$$

Nadalje je

$$\begin{aligned}\ddot{c}(t) &= \frac{d\dot{c}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\vec{T}(t) \cdot \|\dot{c}(t)\| \right) = \frac{d}{dt} \left(\vec{T}(t) \cdot \frac{ds}{dt} \right) = \\ &= \frac{d^2s}{dt^2} \cdot \vec{T}(t) + \frac{ds}{dt} \cdot \frac{d\vec{T}(t)}{dt} = \\ &= \frac{d^2s}{dt^2} \cdot \vec{T}(t) + \frac{ds}{dt} \cdot \frac{d\vec{T}_1(s)}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \\ &= \frac{d^2s}{dt^2} \cdot \vec{T}(t) + \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \cdot \kappa_1(s(t)) \cdot \vec{N}_1(s(t)) = \\ &= \frac{d^2s}{dt^2} \cdot \vec{T}(t) + \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \cdot \kappa(t) \cdot \vec{N}(t)\end{aligned}$$

Sada je

$$\begin{aligned}\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t) &= \frac{ds}{dt} \cdot \vec{T}(t) \times \left(\frac{d^2s}{dt^2} \cdot \vec{T}(t) + \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \cdot \kappa(t) \cdot \vec{N}(t) \right) = \\&= (\text{svojstva vektorskog produkta}) = \\&= \left(\frac{ds}{dt} \right)^3 \kappa(t) \left(\vec{T}(t) \times \vec{N}(t) \right) = \\&= \left(\frac{ds}{dt} \right)^3 \kappa(t) \left(\vec{T}_1(s(t)) \times \vec{N}_1(s(t)) \right) = \\&= \left(\frac{ds}{dt} \right)^3 \kappa(t) \vec{B}_1(s(t)) = \left(\frac{ds}{dt} \right)^3 \kappa(t) \vec{B}(t) = \\&= \underbrace{\|\dot{c}(t)\|^3}_{>0} \underbrace{\kappa(t)}_{>0} \vec{B}(t)\end{aligned}$$

Dakle, dobili smo da je vektor $\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)$ kolinearan s vektorom $\vec{B}(t)$ i istih su orijentacija. Kako je $\vec{B}(t)$ jedinični vektor, slijedi da je

$$\vec{B}(t) = \frac{\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)}{\|\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)\|}$$

Kako je Frenetov trobrid desno orijentiran mora biti

$$\vec{N}(t) = \vec{B}(t) \times \vec{T}(t).$$



Propozicija 64.

Za nedegeneriranu krivulju $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ vrijedi

$$\kappa(t) = \frac{\|\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)\|}{\|\dot{c}(t)\|^3} \quad \tau(t) = \frac{\det(\dot{c}(t), \ddot{c}(t), \dddot{c}(t))}{\|\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)\|^2}$$

Dokaz.

Na kraju dokaza prethodne propozicije dobili smo

$$\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t) = \left(\frac{ds}{dt}\right)^3 \kappa(t) \vec{B}(t) = \|\dot{c}(t)\|^3 \kappa(t) \vec{B}(t)$$

Uzmemo li normu lijeve i desne strane, dobivamo

$$\|\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)\| = \|\dot{c}(t)\|^3 \kappa(t) \underbrace{\|\vec{B}(t)\|}_{=1}$$

iz čega slijedi formula za fleksiju.

Dokaz formule za torziju je analogan dokazu prethodne propozicije gdje, smo već izračunali $\dot{c}(t)$ i $\ddot{c}(t)$. Sada još na isti način izračunamo i $\ddot{\dot{c}}(t)$ i raspišemo desnu stranu u formuli za torziju koristeći se svojstvima determinanti. ♡

Propozicija 65 (Frenetove formule).

Neka je $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ nedegenerirana krivulja. Tada je

$$\frac{d\vec{T}}{dt}(t) = \|\dot{c}(t)\| \kappa(t) \vec{N}(t)$$

$$\frac{d\vec{N}}{dt}(t) = -\|\dot{c}(t)\| \kappa(t) \vec{T}(t) + \|\dot{c}(t)\| \tau(t) \vec{B}(t)$$

$$\frac{d\vec{B}}{dt}(t) = -\|\dot{c}(t)\| \tau(t) \vec{N}(t)$$

Primjer 78.

Izračunajte fleksiju i torziju krivulje $c(t) = \left(\frac{t^4}{4}, \frac{t^3}{3}, \frac{t^2}{2}\right)$ u proizvoljnoj točki krivulje i u točki $(1, 1, 1)$.

Rješenje

Krivulje u prostoru
Definicija krivulje
Jednadžba tangente
Duljina luka krivulje
Reparametrizacija
Oskulacijska ravnina
Frenetov trobrid
Fleksija i torzija
Frenetove formule
Opći parametar

Primjer 78.

Izračunajte fleksiju i torziju krivulje $c(t) = \left(\frac{t^4}{4}, \frac{t^3}{3}, \frac{t^2}{2}\right)$ u proizvoljnoj točki krivulje i u točki $(1, 1, 1)$.

Rješenje

Točku $(1, 1, 1)$ dobijemo za $t = 1$.

$$\dot{c}(t) = (t^3, t^2, t), \quad \ddot{c}(t) = (3t^2, 2t, 1), \quad \ddot{\ddot{c}}(t) = (6t, 2, 0)$$

$$\|\dot{c}(t)\| = \sqrt{t^6 + t^4 + t^2}, \quad \dot{c}(t) \times \ddot{c}(t) = (-t^2, 2t^3, -t^4)$$

$$\|\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)\| = \sqrt{t^4 + 4t^6 + t^8}$$

Krivulje u prostoru
Definicija krivulje
Jednadžba tangente
Duljina luka krivulje
Reparametrizacija
Oskulacijska ravnina
Frenetov trobrid
Fleksija i torzija
Frenetove formule
Opći parametar

$$\det(\dot{c}(t), \ddot{c}(t), \dddot{c}(t)) = \begin{vmatrix} t^3 & t^2 & t \\ 3t^2 & 2t & 1 \\ 6t & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2t^3$$

$$\kappa(t) = \frac{\|\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)\|}{\|\dot{c}(t)\|^3} = \frac{\sqrt{t^4 + 4t^6 + t^8}}{\sqrt{(t^6 + t^4 + t^2)^3}}$$

$$\tau(t) = \frac{\det(\dot{c}(t), \ddot{c}(t), \dddot{c}(t))}{\|\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)\|^2} = \frac{-2t^3}{t^4 + 4t^6 + t^8}$$

Fleksija i torzija u točki $(1, 1, 1)$ iznose

$$\kappa(1) = \frac{\sqrt{2}}{3}, \quad \tau(1) = -\frac{1}{3}$$

Dio IX

Dvostruki integral

Dvostruki integral
Problem površine
Jednostruki integral
Dvostruke sume
 \iint pravokutnik
 \iint omeđen skup
 \iint svojstva
Računanje \iint
Zamjena varijabli

• Dvostruki integral

- Problem površine
- Jednostruki integral
- Dvostruke sume
- Integriranje po pravokutniku
- Integriranje po omeđenom skupu
- Svojstva dvostrukog integrala
- Računanje dvostrukog integrala
- Zamjena varijabli u dvostrukom integralu

Dvostruki integral

Problem površine

Jednostruki integral

Dvostruke sume

\iint pravokutnik

\iint omeđen skup

\iint svojstva

Računanje \iint

Zamjena varijabli

Problem površine

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Neka je X neprazan skup. **Sigma algebra** podskupova od X je familija Σ podskupova od X sa sljedećim svojstvima:

- $\Sigma \neq \emptyset$
- $E \in \Sigma \Rightarrow X \setminus E \in \Sigma$
- Ako je $E_n \in \Sigma$, $n \in \mathbb{N}$, tada je

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \Sigma$$

Uređen par (X, Σ) zovemo **izmjeriv prostor**, a elemente skupa Σ **izmjerivim skupovima**.

Dvostruki integral

Problem površine

Jednostruki integral

Dvostruke sume

\iint pravokutnik

\iint omeđen skup

\iint svojstva

Računanje \iint

Zamjena varijabli



Neka je (X, Σ) izmjeriv prostor. **Pozitivna mjera** na tom prostoru je funkcija

$$\mu : \Sigma \rightarrow [0, \infty]$$

sa sljedećim svojstvima:

- $\mu(\emptyset) = 0$
- Za svaki niz E_n izmjerivih skupova koji su u parovima međusobno disjunktni, tj.

$$E_i \cap E_j = \emptyset, \quad \text{za } i \neq j$$

vrijedi da je

$$\mu \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$$

Uređenu trojku (X, Σ, μ) zovemo **prostor mjere**.

Primjer 79.

Neka je X proizvoljni skup i neka je $\Sigma = \mathcal{P}(X)$. Neka je

$$\mu : \Sigma \rightarrow [0, \infty]$$

definirana s

$$\mu(A) = \begin{cases} \text{card } A, & \text{ako je } A \text{ konačan skup} \\ \infty, & \text{ako je } A \text{ beskonačan skup} \end{cases}.$$

Tada je $(X, \mathcal{P}(X), \mu)$ prostor mjere, a mjeru μ zovemo **brojeća mjera**.

Nas će zanimati skup \mathbb{R}^2 , a mjera će biti standardna površina skupa koja se aksiomatski uvodi na sljedeći način. Neka je Σ familija svih izmjerivih skupova u ravнини. Površina skupa je preslikavanje

$$P : \Sigma \rightarrow [0, \infty]$$

koje zadovoljava sljedeća svojstva:

- $P(E) \geq 0$
- $E \subseteq F \Rightarrow P(E) \leq P(F)$
- $E = F \cup G, F \cap G = \emptyset \Rightarrow P(E) = P(F) + P(G)$
- Neka je K kvadrat čije su duljine stranica jednake 1. Tada je $P(K) = 1$.

Napomena.

U ovom trenutku još nismo precizno definirali skup Σ , tj. nismo nigdje rekli koji to skupovi u ravnini imaju površinu, a koji nemaju. To ćemo kasnije precizno definirati kada uvedemo pojam dvostrukog integrala. Vidjet ćemo tada da svi nama dobro znani "lijepi skupovi" (pravokutnik, krug...) pripadaju skupu Σ , tj. imaju površinu.

Jednostruki integral

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Dvostruki integral
Problem površine
Jednostruki integral
Dvostruke sume
 \iint pravokutnik
 \iint omeđen skup
 \iint svojstva
Računanje \iint
Zamjena varijabli

Prije nego prijedemo na definiciju dvostrukog integrala, prisjetimo se kako se definira određeni integral omeđene funkcije $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Neka je ρ

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

subdivizija segmenta $[a, b]$. Neka je m_i najveća donja ograda funkcije f na segmentu $[x_{i-1}, x_i]$, a M_i najmanja gornja ograda od f na $[x_{i-1}, x_i]$. Neka je

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

duljina segmenta $[x_{i-1}, x_i]$.



Definiramo **donju Darbouxovu sumu** funkcije f s obzirom na razdiobu ρ sa

$$s(f, \rho) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i,$$

i **gornju Darbouxovu sumu** funkcije f s obzirom na razdiobu ρ sa

$$S(f, \rho) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i.$$

Neka je m najveća donja ograda funkcije f na segmentu $[a, b]$, a M najmanja gornja ograda funkcije f na segmentu $[a, b]$.

Dvostruki integral

Problem površine

Jednostruki integral

Dvostruke sume

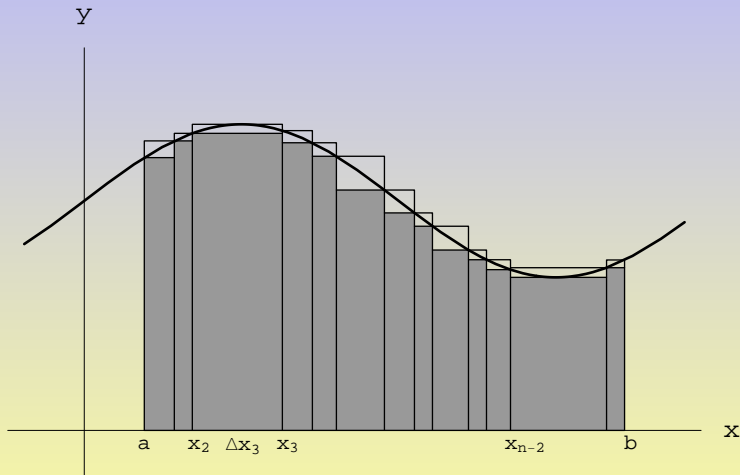
\iint pravokutnik

\iint omeđen skup

\iint svojstva

Računanje \iint

Zamjena varijabli



Očito je tada

$$m(b-a) \leq s(f, \rho) \leq S(f, \rho) \leq M(b-a).$$

Pretpostavimo sada da $n \rightarrow \infty$ tako da $\Delta x_i \rightarrow 0$. Ako je tada

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s(f, \rho) = \lim_{n \rightarrow \infty} S(f, \rho)$$

i taj limes ne ovisi o subdivizijama segmenta $[a, b]$, tada kažemo da je funkcija f integrabilna u Riemannovom smislu ili R -integrabilna na segmentu $[a, b]$. Zajednički limes gornje i donje Darbouxove sume zovemo **određenim integralom** funkcije f i označavamo s

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Dvostruki integral

Problem površine

Jednostruki integral

Dvostruke sume

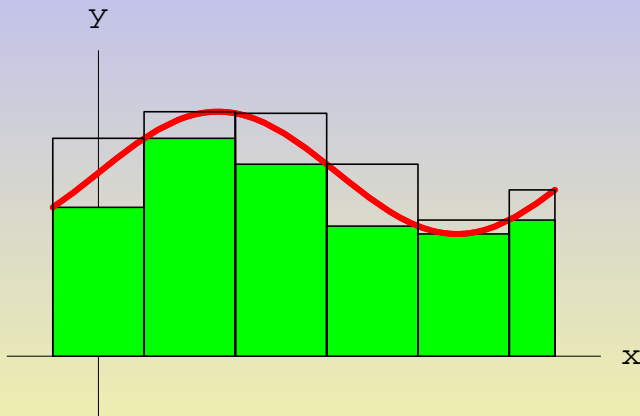
\iint pravokutnik

\iint omeđen skup

\iint svojstva

Računanje \iint

Zamjena varijabli



Dvostruki integral

Problem površine

Jednostruki integral

Dvostruke sume

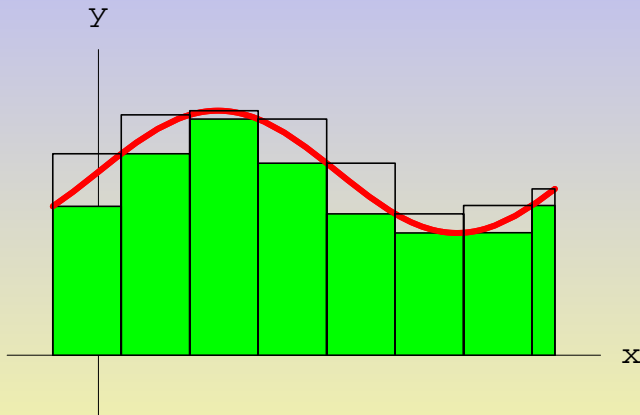
\iint pravokutnik

\iint omeđen skup

\iint svojstva

Računanje \iint

Zamjena varijabli



Dvostruki integral

Problem površine

Jednostruki integral

Dvostruke sume

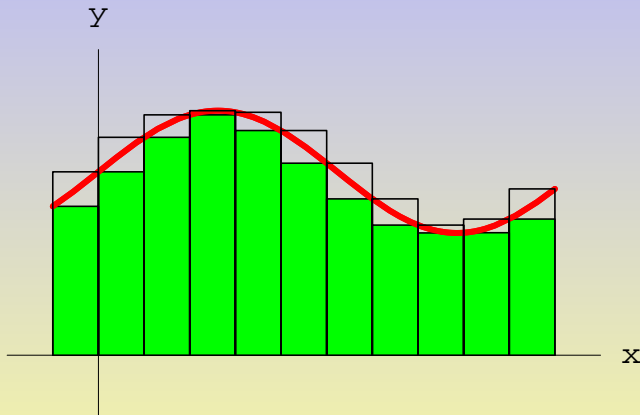
\iint pravokutnik

\iint omeđen skup

\iint svojstva

Računanje \iint

Zamjena varijabli



Dvostruki integral

Problem površine

Jednostruki integral

Dvostruke sume

\iint pravokutnik

\iint omeđen skup

\iint svojstva

Računanje \iint

Zamjena varijabli



Dvostruki integral
Problem površine
Jednostruki integral

Dvostruke sume

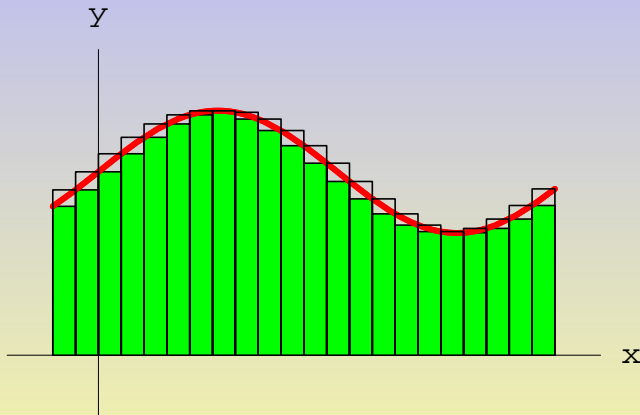
\iint pravokutnik

\iint omeđen skup

\iint svojstva

Računanje \iint

Zamjena varijabli



Dvostruki integral

Problem površine

Jednostruki integral

Dvostruke sume

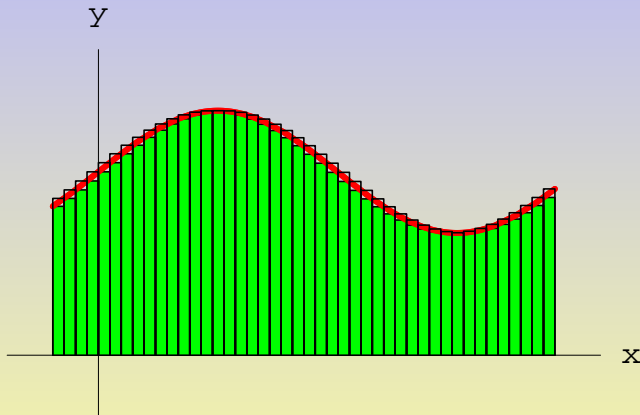
\iint pravokutnik

\iint omeđen skup

\iint svojstva

Računanje \iint

Zamjena varijabli



Dvostruki integral

Problem površine

Jednostruki integral

Dvostruke sume

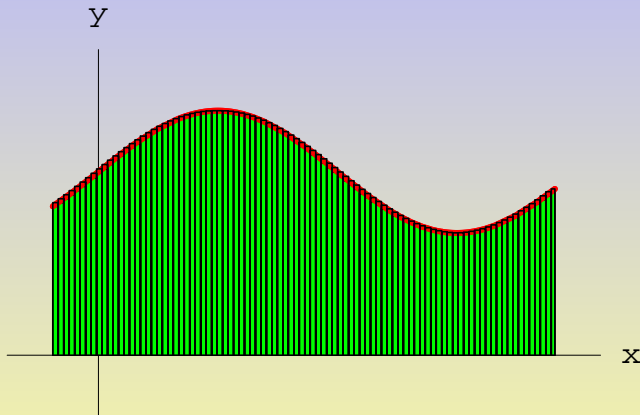
\iint pravokutnik

\iint omeđen skup

\iint svojstva

Računanje \iint

Zamjena varijabli



Dvostruke sume

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Dvostruki integral
Problem površine
Jednostruki integral
Dvostruke sume

\iiint pravokutnik
 \iiint omeđen skup
 \iiint svojstva
Računanje \iint
Zamjena varijabli

Prije nego prijedemo na definiciju dvostrukog integrala, pogledajmo prvo dvostruke sume, tj. sume u kojima se sumira po dva indeksa. Promotrimo zapis

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}.$$

Njega možemo interpretirati na dva načina:

1. način:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \right) =$$

$$= \overbrace{\sum_{j=1}^n a_{1j}}^{i=1} + \overbrace{\sum_{j=1}^n a_{2j}}^{i=2} + \cdots + \overbrace{\sum_{j=1}^n a_{mj}}^{i=m} =$$

$$= (a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n}) + (a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n}) + \cdots + (a_{m1} + a_{m2} + \cdots + a_{mn})$$

Dvostruki integral
Problem površine
Jednostruki integral
Dvostruke sume

\iint pravokutnik
 \iint omeđen skup
 \iint svojstva
Računanje \iint
Zamjena varijabli

2. način:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^m (a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{in}) =$$

$$= (a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n}) + (a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n}) +$$
$$+ \cdots + (a_{m1} + a_{m2} + \cdots + a_{mn})$$

Dvostruki integral
Problem površine
Jednostruki integral
Dvostruke sume

\iint pravokutnik
 \iiint omeđen skup
 \iiint svojstva
Računanje \iint
Zamjena varijabli

Svojstva dvostrukih suma

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Dvostruki integral
Problem površine
Jednostruki integral
Dvostruke sume

\iint pravokutnik
 \iiint omeđen skup
 \iiint svojstva
Računanje \iint
Zamjena varijabli

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij}.$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \alpha a_{ij} = \alpha \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (a_{ij} + b_{ij}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n b_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_i b_j = \left(\sum_{i=1}^m a_i \right) \left(\sum_{j=1}^n b_j \right)$$

Integriranje po pravokutniku

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Neka je $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ omeđena funkcija na skupu R , gdje je

$$R = [a, b] \times [c, d]$$

pravokutnik čije su stranice paralelne s koordinatnim osima. Želimo definirati

$$\int_R f$$

koji će ukoliko je f "lijepa" nenegativna funkcija, predstavljati volumen tijela odozgo omeđenog grafom funkcije f . Postupamo analogno kao i u slučaju funkcije jedne varijable.

Dvostruki integral
Problem površine
Jednostruki integral
Dvostruke sume

Pravokutnik
Omeđen skup
Svojstva
Računanje
Zamjena varijabli



Neka je ρ_1

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

subdivizija segmenta $[a, b]$, a ρ_2

$$c = y_0 < y_1 < \cdots < y_{m-1} < y_m = d$$

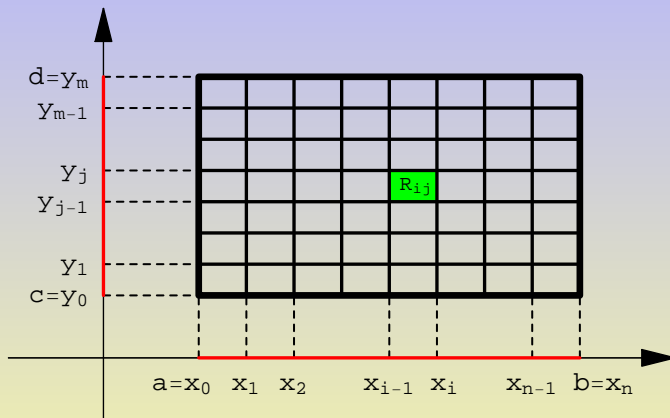
subdivizija segmenta $[c, d]$.

Subdivizija pravokutnika R je uređeni par $\rho = (\rho_1, \rho_2)$,
gdje su ρ_1 i ρ_2 subdivizije segmenta $[a, b]$, odnosno $[c, d]$.

Pravokutnike

$$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j], \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m$$

zovemo pravokutnicima subdivizije ρ .



Dvostruki integral
Problem površine
Jednostruki integral
Dvostruke sume

\iint pravokutnik
 \iint omeđen skup
 \iint svojstva
Računanje \iint
Zamjena varijabli

Neka je d_{ij} duljina dijagonale pravokutnika R_{ij} .

Dijametar ili **očica** subdivizije ρ je broj

$$\delta(\rho) = \max \{d_{ij} : i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m\},$$

tj. najveća od svih dijagonala pravokutnika R_{ij} .

Nadalje, površina pravokutnika R_{ij} jednaka je

$$P(R_{ij}) = \Delta x_i \Delta y_j,$$

gdje je

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad \Delta y_j = y_j - y_{j-1}.$$

Kako je f omeđena funkcija na pravokutniku R , tada je ona omeđena i na svakom od pravokutnika R_{ij} . Stoga postoje brojevi m_f , M_f , m_{ij} , M_{ij} takvi da je

$$m_f \leq f(x, y) \leq M_f, \quad \text{za svaki } (x, y) \in R$$

$$m_{ij} \leq f(x, y) \leq M_{ij}, \quad \text{za svaki } (x, y) \in R_{ij}$$

gdje su m_f i M_f najveća donja i najmanja gornja ograda funkcije f na R , a m_{ij} i M_{ij} najveća donja i najmanja gornja ograda funkcije f na R_{ij} .

Definiramo **donju Darbouxovu sumu** funkcije f s obzirom na razdiobu ρ sa

$$s(f, \rho) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m m_{ij} \Delta x_i \Delta y_j$$

i **gornju Darbouxovu sumu** funkcije f s obzirom na razdiobu ρ sa

$$S(f, \rho) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m M_{ij} \Delta x_i \Delta y_j$$

Očito uvijek vrijedi

$$m_f P(R) \leq s(f, \rho) \leq S(f, \rho) \leq M_f P(R).$$

Dvostruki integral
Problem površine
Jednostruki integral
Dvostruke sume

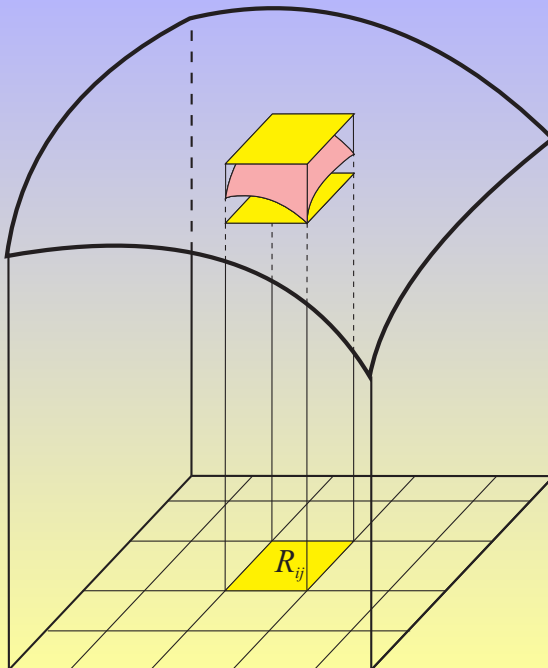
\iint pravokutnik

\iint omeđen skup

\iint svojstva

Računanje \iint

Zamjena varijabli



Pretpostavimo sada da $n, m \rightarrow \infty$ tako da $\delta(\rho) \rightarrow 0$.

Ako je tada

$$\lim_{\delta(\rho) \rightarrow 0} s(f, \rho) = \lim_{\delta(\rho) \rightarrow 0} S(f, \rho)$$

i taj limes ne ovisi o subdivizijama pravokutnika R , tada kažemo da je funkcija f integrabilna u Riemannovom smislu na pravokutniku R . Zajednički limes gornje i donje Darbouxove sume zovemo **dvostrukim integralom** funkcije f na pravokutniku R i označavamo s

$$\int_R f(x, y) dx dy \quad \text{ili} \quad \iint_R f(x, y) dx dy$$

Napomena.

Osim gornjih i donjih Darbouxovih suma se mogu promatrati još i **integralne sume**. Neka je ρ_1

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

subdivizija segmenta $[a, b]$, a ρ_2

$$c = y_0 < y_1 < \cdots < y_{m-1} < y_m = d$$

subdivizija segmenta $[c, d]$, a ρ pripadna subdivizija pravokutnika $R = [a, b] \times [c, d]$. Integralna suma funkcije f s obzirom na subdiviziju ρ je

$$I(f, \rho) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(u_i, v_j) \Delta x_i \Delta y_j$$

pri čemu je $(u_i, v_j) \in R_{ij}$ proizvoljna točka. Očito je da vrijedi

$$s(f, \rho) \leq I(f, \rho) \leq S(f, \rho).$$

Stoga se može dvostruki integral funkcije f na pravokutniku R definirati i preko integralnih suma kao

$$\iint_R f(x, y) \, dx \, dy = \lim_{\delta(\rho) \rightarrow 0} I(f, \rho),$$

ukoliko taj limes postoji i ne ovisi o subdivizijama pravokutnika R .

Dvostruki integral
Problem površine
Jednostruki integral
Dvostruke sume

\iint pravokutnik
 \iint omeđen skup
 \iint svojstva
Računanje \iint
Zamjena varijabli

Geometrijsko značenje dvostrukog integrala

Neka je f neprekidna i nenegativna funkcija na pravokutniku $R = [a, b] \times [c, d]$. Volumen tijela omeđenog pravokutnikom R odozdo i plohom $z = f(x, y)$ odozgo po definiciji je jednak

$$V = \iint_R f(x, y) \, dx \, dy.$$

Ovo je razumna definicija jer je jasno da uzimanjem sve finijih subdivizija pravokutnika R , Darbouxove i integralne sume sve bolje aproksimiraju volumen tijela ispod grafa funkcije f , što će onda na limesu dati željeni volumen.

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

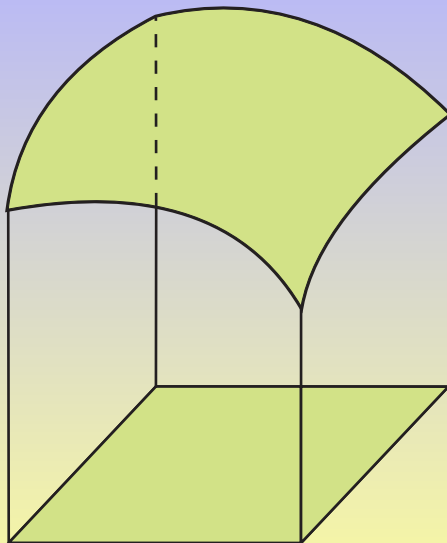
Dvostruki integral
Problem površine
Jednostruki integral
Dvostruke sume

\iint pravokutnik
 \iint omeđen skup
 \iint svojstva
Računanje \iint
Zamjena varijabli

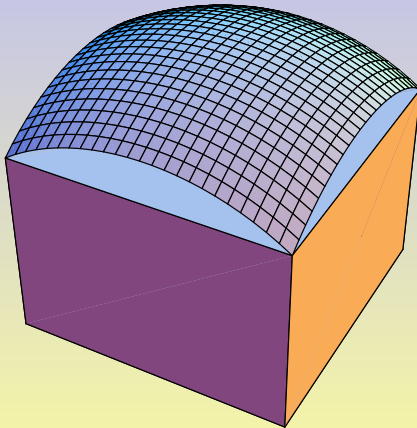


Dvostruki integral
Problem površine
Jednostruki integral
Dvostruke sume

\iiint pravokutnik
 \iint omeđen skup
 \iint svojstva
Računanje \iint
Zamjena varijabli

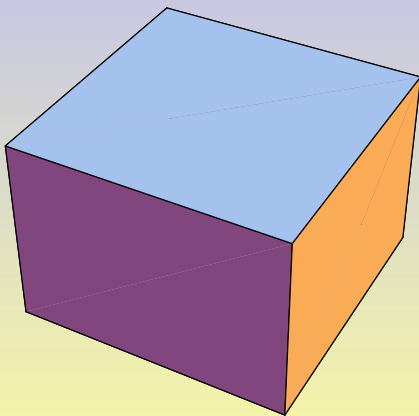


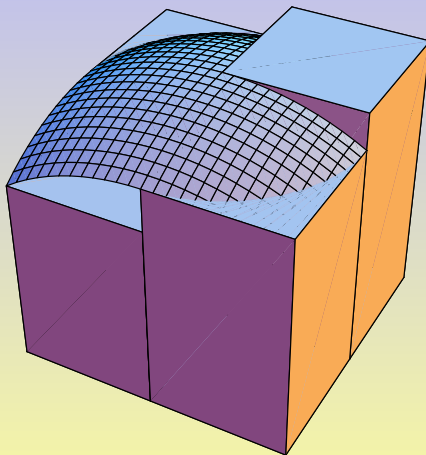
- \iint pravokutnik
- \iint omeđen skup
- \iint svojstva
- Računanje \iint
- Zamjena varijabli



Dvostruki integral
Problem površine
Jednostruki integral
Dvostruke sume

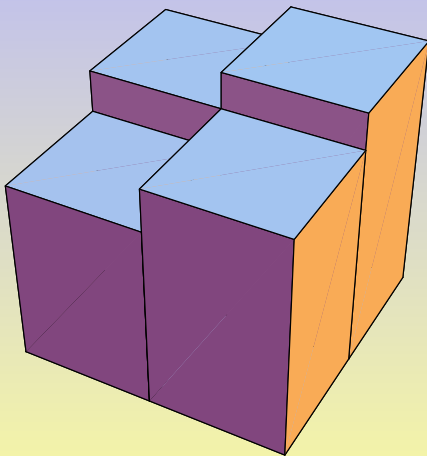
\iiint pravokutnik
 \iint omeđen skup
 \iint svojstva
Računanje \iint
Zamjena varijabli





Dvostruki integral
Problem površine
Jednostruki integral
Dvostruke sume

\iiint pravokutnik
 \iint omeđen skup
 \iint svojstva
Računanje \iint
Zamjena varijabli



Dvostruki integral
Problem površine
Jednostruki integral
Dvostruke sume

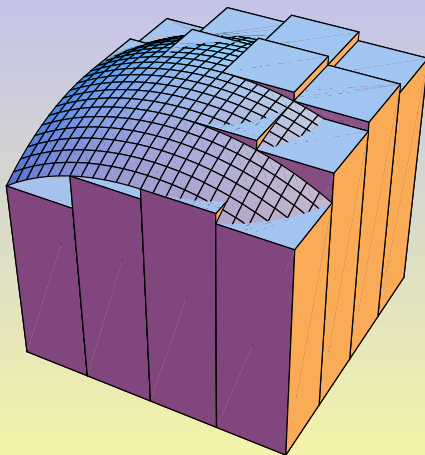
\iint pravokutnik

\iint omeden skup

\iint svojstva

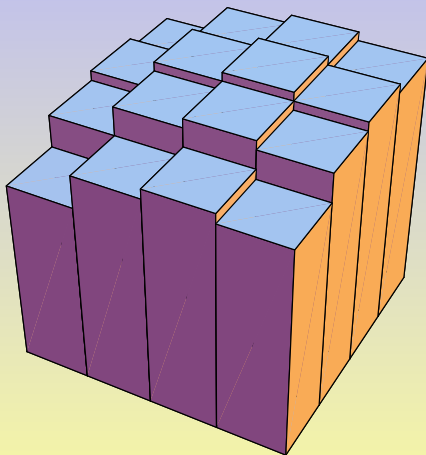
Računanje \iint

Zamjena varijabli



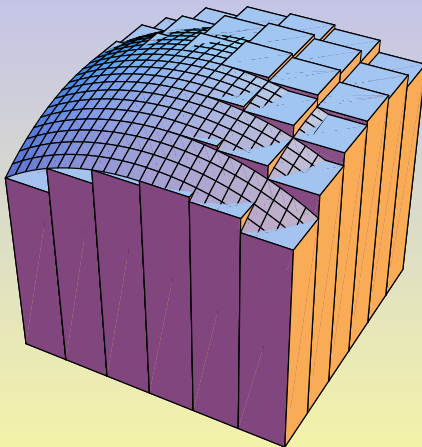
Dvostruki integral
Problem površine
Jednostruki integral
Dvostruke sume

\iiint pravokutnik
 \iint omeđen skup
 \iint svojstva
Računanje \iint
Zamjena varijabli



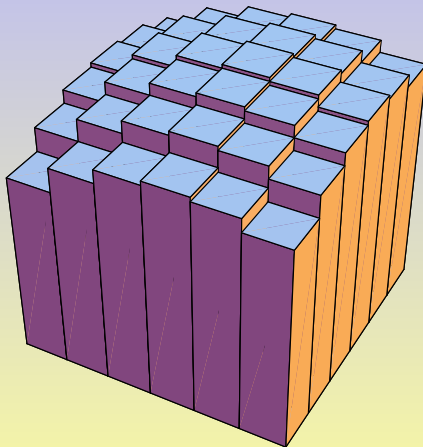
Dvostruki integral
Problem površine
Jednostruki integral
Dvostruke sume

\iiint pravokutnik
 \iint omeđen skup
 \iint svojstva
Računanje \iint
Zamjena varijabli



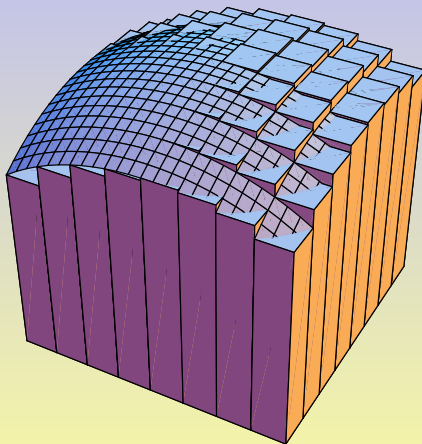
Dvostruki integral
Problem površine
Jednostruki integral
Dvostruke sume

\iiint pravokutnik
 \iint omeđen skup
 \iint svojstva
Računanje \iint
Zamjena varijabli



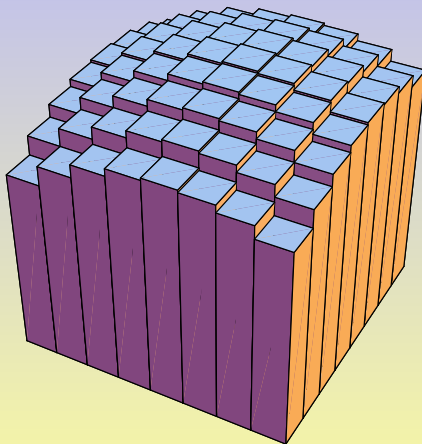
Dvostruki integral
Problem površine
Jednostruki integral
Dvostruke sume

\iiint pravokutnik
 \iint omeđen skup
 \iint svojstva
Računanje \iint
Zamjena varijabli



Dvostruki integral
Problem površine
Jednostruki integral
Dvostruke sume

\iiint pravokutnik
 \iint omeđen skup
 \iint svojstva
Računanje \iint
Zamjena varijabli

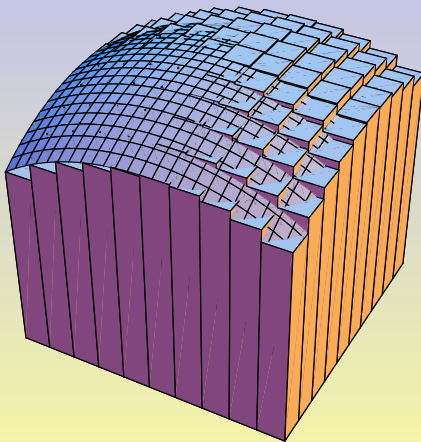


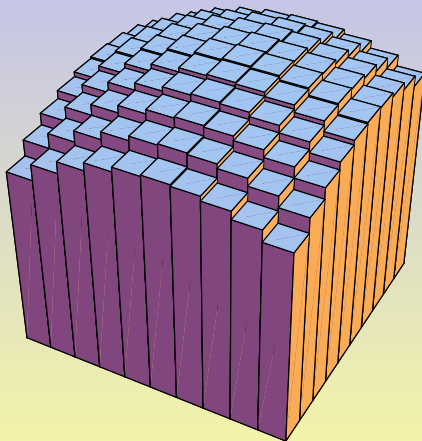
Dvostruki integral
Problem površine
Jednostruki integral
Dvostruke sume

\iiint pravokutnik
 \iint omeđen skup
 \iint svojstva
Računanje \iint
Zamjena varijabli

Dvostruki integral
Problem površine
Jednostruki integral
Dvostruke sume

\iiint pravokutnik
 \iint omeđen skup
 \iint svojstva
Računanje \iint
Zamjena varijabli



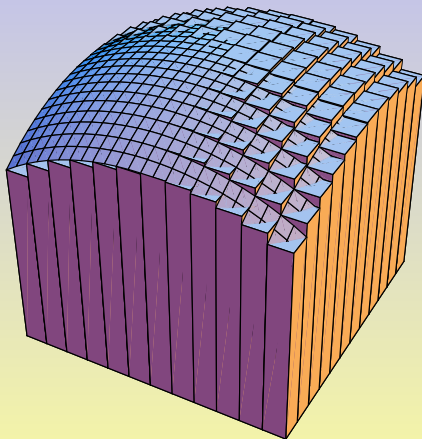


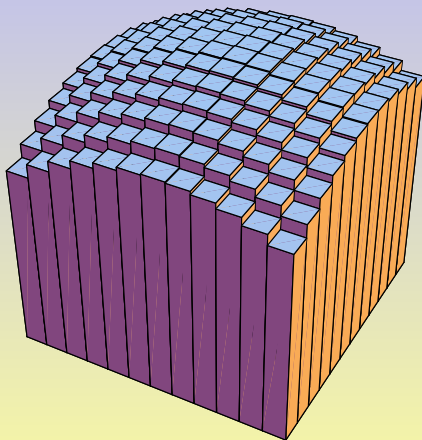
Dvostruki integral
Problem površine
Jednostruki integral
Dvostruke sume

\iiint pravokutnik
 \iint omeđen skup
 \iint svojstva
Računanje \iint
Zamjena varijabli

Dvostruki integral
Problem površine
Jednostruki integral
Dvostruke sume

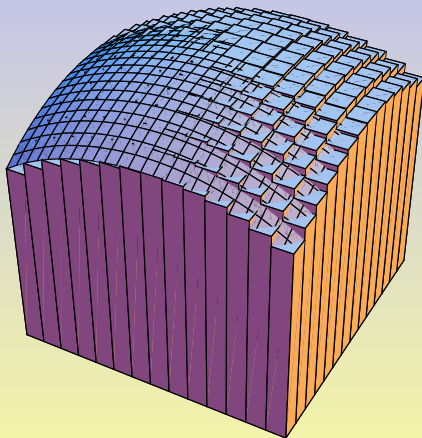
\iiint pravokutnik
 \iint omeđen skup
 \iint svojstva
Računanje \iint
Zamjena varijabli





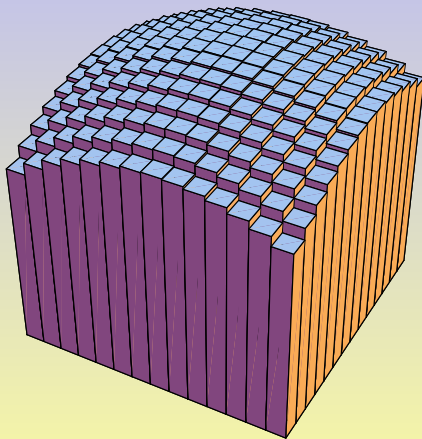
Dvostruki integral
Problem površine
Jednostruki integral
Dvostruke sume

\iiint pravokutnik
 \iint omeđen skup
 \iint svojstva
Računanje \iint
Zamjena varijabli



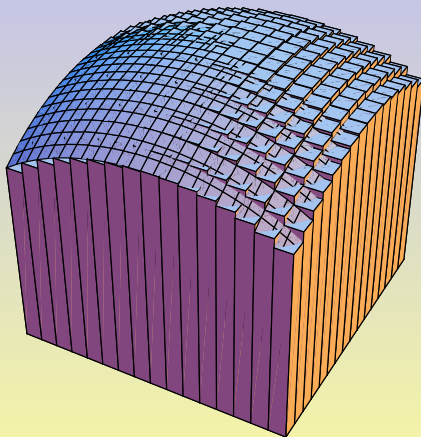
Dvostruki integral
Problem površine
Jednostruki integral
Dvostruke sume

\iiint pravokutnik
 \iint omeđen skup
 \iint svojstva
Računanje \iint
Zamjena varijabli



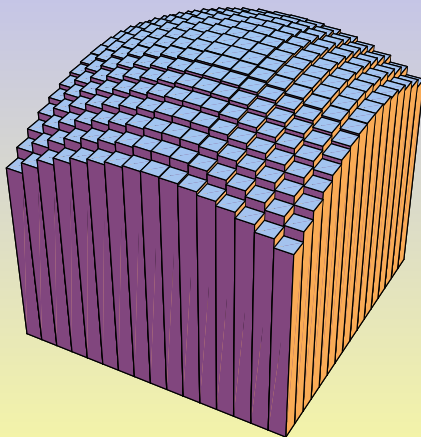
Dvostruki integral
Problem površine
Jednostruki integral
Dvostruke sume

\iiint pravokutnik
 \iint omeđen skup
 \iint svojstva
Računanje \iint
Zamjena varijabli



Dvostruki integral
Problem površine
Jednostruki integral
Dvostruke sume

\iiint pravokutnik
 \iint omeđen skup
 \iint svojstva
Računanje \iint
Zamjena varijabli

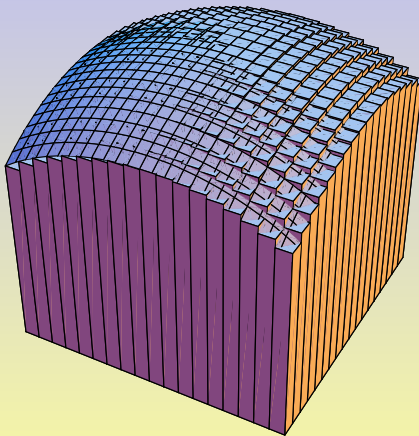


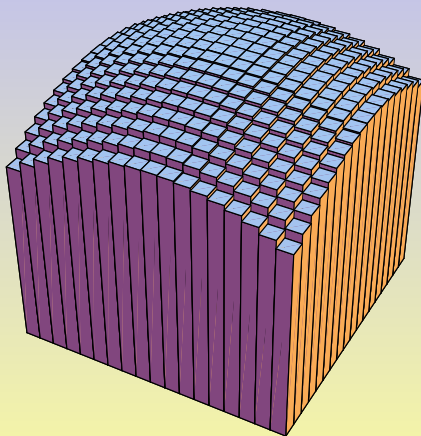
Dvostruki integral
Problem površine
Jednostruki integral
Dvostruke sume

\iiint pravokutnik
 \iint omeđen skup
 \iint svojstva
Računanje \iint
Zamjena varijabli

Dvostruki integral
Problem površine
Jednostruki integral
Dvostruke sume

\iint pravokutnik
 \iint omeđen skup
 \iint svojstva
Računanje \iint
Zamjena varijabli





Dvostruki integral
Problem površine
Jednostruki integral
Dvostruke sume

\iiint pravokutnik
 \iint omeđen skup
 \iint svojstva
Računanje \iint
Zamjena varijabli

Primjer 80.

Izračunajte integral funkcije $f(x, y) = \alpha = \text{const.}$ na pravokutniku $R = [a, b] \times [c, d]$.

Rješenje

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Dvostruki integral
Problem površine
Jednostruki integral
Dvostruke sume

\iint pravokutnik
 \iint omeđen skup
 \iint svojstva
Računanje \iint
Zamjena varijabli

Primjer 80.

Izračunajte integral funkcije $f(x, y) = \alpha = \text{const.}$ na pravokutniku $R = [a, b] \times [c, d]$.

Rješenje

Neka je $\rho_1 = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ proizvoljna particija segmenta $[a, b]$, a $\rho_2 = \{y_0, y_1, \dots, y_m\}$ proizvoljna particija segmenta $[c, d]$. Tada je

$$\rho = \rho_1 \times \rho_2 = \{(x_i, y_j) : x_i \in \rho_1, y_j \in \rho_2\}$$

particija pravokutnika R . Kako je f konstanta na R , tada je ona konstanta na svakom pravokutniku R_{ij} , pa je

$$m_{ij} = M_{ij} = \alpha, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m.$$

Stoga je

$$\begin{aligned} s(f, \rho) &= S(f, \rho) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha \Delta x_i \Delta y_j = \\ &= \alpha \left(\sum_{i=1}^n \Delta x_i \right) \left(\sum_{j=1}^m \Delta y_j \right) = \alpha(b-a)(d-c). \end{aligned}$$

Dakle,

$$\lim_{\delta(\rho) \rightarrow 0} s(f, \rho) = \lim_{\delta(\rho) \rightarrow 0} S(f, \rho) = \alpha(b-a)(d-c),$$

pa je

$$\iint_R \alpha \, dx \, dy = \alpha(b-a)(d-c).$$

U slučaju da je $\alpha > 0$, dobivamo volumen kvadra koji je odozdo omeđen pravokutnikom R , a odozgo ravninom $z = \alpha$. Ovo se slaže sa poznatom formulom za računanje volumena kvadra. Naime, volumen kvadra jednak je produktu duljina njegovih susjednih bridova, a ovdje su duljine tih bridova $b - a$, $d - c$ i α .

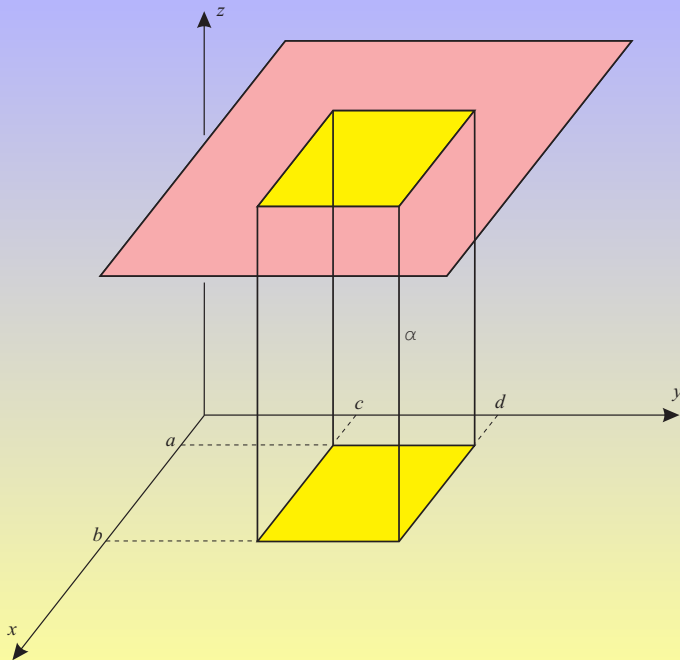
\iiint pravokutnik

\iint omeđen skup

\iint svojstva

Računanje \iint

Zamjena varijabli



Nije svaka omeđena funkcija Riemann integrabilna. Na primjer, neka je $R = [a, b] \times [c, d]$ proizvoljni pravokutnik, a $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija definirana s

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{ako su } x, y \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Funkcija f nije Riemann integrabilna. Zaista, za svaku subdiviziju ρ pravokutnika R je

$$m_{ij} = 0, \quad M_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m$$

jer je skup \mathbb{Q} gust u skupu \mathbb{R} . No tada je

$$s(f, \rho) = 0, \quad S(f, \rho) = (b - a)(d - c)$$

za svaku subdiviziju ρ pravokutnika R .

No, tada je

$$\lim_{\delta(\rho) \rightarrow 0} s(f, \rho) \neq \lim_{\delta(\rho) \rightarrow 0} S(f, \rho)$$

pa f nije Riemann integrabilna.

Pokazuje se da vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 51.

Neka je $R = [a, b] \times [c, d]$. Svaka neprekidna funkcija $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ je Riemann integrabilna.

Napomena.

Osim Riemmanovog integrala postoji i Lebesgueov integral koji je puno općenitiji i može se definirati za realnu funkciju definiranu na nekom prostoru mjere. Konkretno, u \mathbb{R}^n se definira Lebesgueova mjera skupa i pokazuje se da nije svaki skup Lebesgue izmjeriv. S obzirom na tu mjeru se definira i Lebesgueov integral realne funkcije definirane na \mathbb{R}^n (ili na nekom njegovom podskupu). Pokazuje se da ako je omeđena funkcija Riemann integrabilna da je onda ona i Lebesgue integrabilna i da ta dva integrala imaju iste vrijednosti. Međutim, postoje funkcije koje nisu Riemann integrabilne, ali jesu Lebesgue integrabilne. Jedan takav jednostavan primjer je funkcija

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{ako su } x, y \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Za nju smo vidjeli da nije Riemann integrabilna na pravokutniku. No, ona jest Lebesgue integrabilna na pravokutniku i njezin Lebesgueov integral je jednak 0. U definiciju i detalje Lebesgueovog integrala ovdje nećemo ulaziti.

Možemo se zapitati zašto uvoditi Lebesgueov integral kad je on za "lijepu" funkcije jednak Riemannovom.

Uostalom, zašto bi nam bilo stalo integrirati funkciju poput gornje koja poprima samo dvije vrijednosti i ima prekid u svakoj točki.

Pogledamo li malo bolje funkciju f vidimo da je ona zapravo karakteristična funkcija skupa koji se sastoji od točaka čije su obje koordinate racionalni brojevi. Možemo se zapitati kolika je vjerojatnost da je unutar zadanog pravokutnika odabrana točka čije su obje koordinate racionalne. Da bismo mogli izračunati tu vjerojatnost trebali bismo integrirati zadanu funkciju koja nije Riemann integrabilna, ali jest Lebesgue integrabilna.

Integriranje po omeđenom skupu

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Htjeli bismo integrirati i po nekim drugim skupovima u ravnini, a ne samo po pravokutniku čije su stranice paralelne s koordinatnim osima.

Neka je $S \subseteq \mathbb{R}^2$ proizvoljan omeđen skup i $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ omeđena funkcija. Želimo definirati

$$\iint_S f$$

koji bi u slučaju da je f nenegativna neprekidna funkcija predstavljao volumen tijela koje je omeđeno odozdo skupom S , a odozgo grafom funkcije f .

Dvostruki integral
Problem površine
Jednostruki integral
Dvostruke sume
 \iint pravokutnik
 \iint omeđen skup
 \iint svojstva
Računanje \iint
Zamjena varijabli



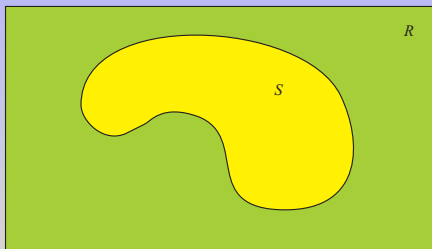
Ideja je da integral po skupu S svedemo na integral po pravokutniku.

Preciznije, neka je $R = [a, b] \times [c, d]$ pravokutnik takav da je $S \subseteq R$. Neka je $\tilde{f} : R \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija definirana s

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in S \\ 0, & (x, y) \in R \setminus S \end{cases}$$

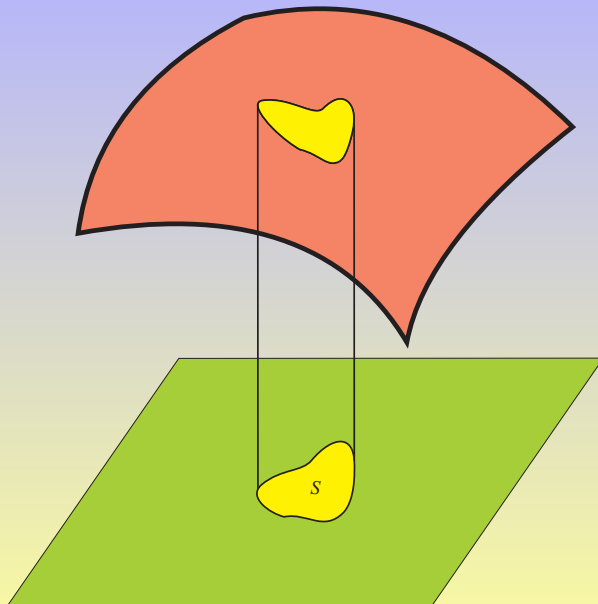
Kažemo da je omeđena funkcija f Riemann integrabilna na omeđenom skupu S ako je funkcija \tilde{f} Riemann integrabilna na R i definiramo

$$\iint_S f = \iint_R \tilde{f}.$$



U slučaju da je f nenegativna neprekidna funkcija na skupu S , tada je volumen tijela koje je omeđeno odozdo skupom S , a odozgo grafom od f po definiciji jednak

$$V = \iint_S f(x, y) \, dx \, dy.$$



Sada možemo precizno definirati površinu nekog skupa u ravnini.

Za skup $S \subseteq \mathbb{R}^2$ kažemo da **ima površinu** ili da je **izmjeriv u Jordanovom smislu**, odnosno **J-izmjeriv**, ako je omeđen i postoji pravokutnik R takav da je $S \subseteq R$ i da je karakteristična funkcija $\chi_S : R \rightarrow \mathbb{R}$ skupa S definirana s

$$\chi_S(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in S \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Riemann integrabilna. U tom slučaju broj

$$\iint_R \chi_S$$

zovemo **površina skupa** S i označavamo s $P(S)$.

Lako se dokaže da postojanje i iznos površine skupa S ne ovise o odabranom pravokutniku $R \subseteq S$. Također, pravokutnik $R = [a, b] \times [c, d]$ ima površinu i ona iznosi $P(R) = (b - a)(d - c)$.

Iz definicije površine skupa i definicije dvostrukog integrala na omeđenom skupu slijedi

$$P(S) = \iint_R \chi_S(x, y) \, dx \, dy = \iint_S dx \, dy.$$

$$P(S) = \iint_S dx \, dy$$

Za omeđen skup $A \subseteq \mathbb{R}^2$ kažemo da **ima površinu nula** ako ima površinu i ta površina je jednaka nuli. Može se dokazati da vrijedi sljedeće:

- Unija konačno mnogo skupova površine nula je skup površine nula
- Podskup skupa površine nula je skup površine nula
- Graf neprekidne funkcije je skup površine nula
- Omeđen skup $S \subseteq \mathbb{R}^2$ ima površinu akko je njegov rub skup površine nula

Iz navedenih tvrdnji zaključujemo da su krug, polukrug, elipsa, područje omeđeno elipsom trokut, poligon, ... skupovi koji imaju površinu jer su njihovi rubovi unije grafova neprekidnih funkcija. Kasnije ćemo izračunati njihove površine kada naučimo tehniku računanja dvostrukog integrala.

- Dvostruki integral
- Problem površine
- Jednostruki integral
- Dvostruke sume
 - \iint pravokutnik
 - \iint omeđen skup
 - \iint svojstva
- Računanje \iint
- Zamjena varijabli

Svojstva dvostrukog integrala

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

- **Linearnost**

$$\begin{aligned}\iint_S (\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)) \, dx \, dy &= \\ &= \alpha \iint_S f(x, y) \, dx \, dy + \beta \iint_S g(x, y) \, dx \, dy\end{aligned}$$

Dvostruki integral
Problem površine
Jednostruki integral
Dvostruke sume
 \iint pravokutnik
 \iint omeđen skup
 \iint svojstva
Računanje \iint
Zamjena varijabli

• Uređaj

Ako je $f \geq 0$ na S , onda je

$$\iint_S f(x, y) \, dx \, dy \geq 0$$

Ako je $f \leq g$ na S , onda je

$$\iint_S f(x, y) \, dx \, dy \leq \iint_S g(x, y) \, dx \, dy$$

• Aditivnost

Ako je S disjunktna unija skupova S_1, S_2, \dots, S_n ,
tada je

$$\iint_S f(x, y) \, dx \, dy = \sum_{i=1}^n \iint_{S_i} f(x, y) \, dx \, dy$$

• Teorem srednje vrijednosti

Ako je f neprekidna funkcija, tada postoji točka
 $(x_0, y_0) \in S$ takva da je

$$\iint_S f(x, y) \, dx \, dy = f(x_0, y_0) \cdot P(S)$$

Teorem 52.

Neka su f i g neprekidne funkcije na J -izmjerivom skupu S i neka je g nenegativna na S . Tada postoji točka $(x_0, y_0) \in S$ takva da je

$$\iint_S f(x, y)g(x, y) \, dx \, dy = f(x_0, y_0) \iint_S g(x, y) \, dx \, dy$$

Računanje dvostrukog integrala

Jasno je da je računanje dvostrukog integrala funkcije f na pravokutniku $R = [a, b] \times [c, d]$ na osnovi definicije teško, a kamoli još na nekom proizvoljnom J-izmjerivom skupu. Za razliku od jednostrukog integrala gdje su se teškoće javljale eventualno zbog komplicirane funkcije koja se trebala integrirati, kod dvostrukog integrala se može pojaviti i problem područja po kojem se integrira koje može otežati računanje iako je podintegralna funkcija jednostavna. Postavlja se pitanje da li se dvostruki integral može na neki način izračunati preko jednostrukih integrala za koje imamo razvijene tehnike računanja. Uz neke pretpostavke na funkciju odgovor na to je potvrđan, a mi ćemo ovdje na intuitivni način doći do te formule.

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Dvostruki integral
Problem površine
Jednostruki integral
Dvostruke sume
 \iint pravokutnik
 \iint omeđen skup
 \iint svojstva
Računanje \iint
Zamjena varijabli



Neka je $R = [a, b] \times [c, d]$ i neka je $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Želimo izračunati

$$\iint_R f(x, y) \, dx \, dy.$$

Iz definicije dvostrukog integrala slijedi da se on može po volji točno aproksimirati integralnim sumama. To znači da je

$$\iint_R f(x, y) \, dx \, dy \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(u_i, v_j) \Delta x_i \Delta y_j \quad (\diamond)$$

za neku pogodno odabranu subdiviziju

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

$$c = y_0 < y_1 < \cdots < y_{m-1} < y_m = d$$

pravokutnika R na male pravokutnike

$$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j],$$

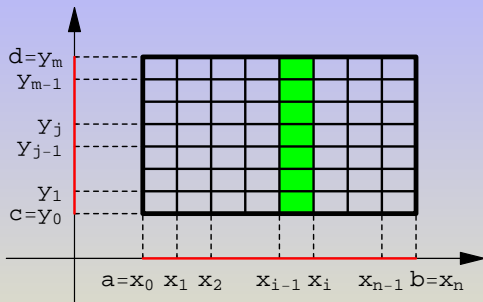
pri čemu je

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad \Delta y_j = y_j - y_{j-1}, \quad (u_i, v_j) \in R_{ij}.$$

Dvostruku sumu u (\diamond) možemo napisati kao

$$\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m f(u_i, v_j) \Delta y_j \right) \Delta x_i. \quad (\heartsuit)$$

Dakle, najprije prosumiramo po j uz fiksno i , a onda te rezultate prosumiramo po i . Drugim riječima, najprije uzmemo doprinose svake pruge paralelne s y -osi, a zatim sve te doprinose zbrojimo.



Unutarnja suma u (\heartsuit), tj. suma

$$\sum_{j=1}^m f(u_i, v_j) \Delta y_j$$

je integralna suma funkcije $y \mapsto f(u_i, y)$, koja odgovara

subdiviziji

$$c = y_0 < y_1 < \cdots < y_{m-1} < y_m = d$$

segmenta $[c, d]$ i izboru točaka $v_j \in [y_{j-1}, y_j]$. Stavimo li

$$\varphi(x) = \int_c^d f(x, y) \, dy,$$

dobivamo da je

$$\sum_{j=1}^m f(u_i, v_j) \Delta y_j \approx \int_c^d f(u_i, y) \, dy = \varphi(u_i).$$

Stoga je

$$\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m f(u_i, v_j) \Delta y_j \right) \Delta x_i \approx \sum_{i=1}^n \varphi(u_i) \Delta x_i.$$

No, suma na desnoj strani je zapravo integralna suma funkcije φ s obzirom na subdiviziju

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

segmenta $[a, b]$ i izbor točaka $u_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

Iz svega navedenog slijedi da je

$$\begin{aligned}\iint_R f(x, y) \, dx \, dy &\approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(u_i, v_j) \Delta x_i \Delta y_j \\ &\approx \sum_{i=1}^n \left(\int_c^d f(u_i, y) \, dy \right) \Delta x_i \\ &= \sum_{i=1}^n \varphi(u_i) \Delta x_i\end{aligned}$$

S druge strane je

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx = \int_a^b \varphi(x) \, dx \approx \sum_{i=1}^n \varphi(u_i) \Delta x_i$$

Stoga je razumno očekivati da će na limesu biti

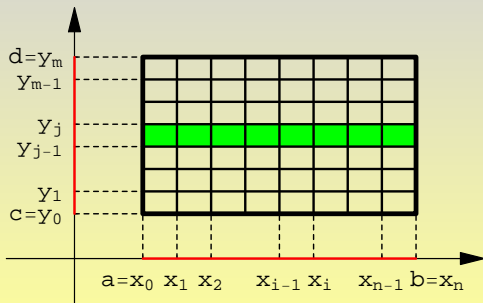
$$\iint_R f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx.$$

Pokazuje se da to vrijedi uz pretpostavku da je funkcija f neprekidna. Napomenimo odmah da je u gornjoj jednakosti s lijeve strane dvostruki integral, a s desne strane su dva uzastopna jednostruka integrala. Gornja jednakost nam zapravo pokazuje kako se dvostruki integral računa pomoću jednostrukih integrala.

Dvostruku sumu iz (\diamond) smo mogli napisati u obliku

$$\sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n f(u_i, v_j) \Delta x_i \right) \Delta y_j,$$

tj. mogli smo prvo prosumirati po i uz fiksno j , a onda te rezultate prosumirati po j . Drugim riječima, mogli smo prvo uzeti doprinose svake pruge paralelne s x -osi, a zatim sve te doprinose zbrojiti.



Sasvim analognim intuitivnim razmatranjem kao i prije, došli bismo do jednakosti

$$\iint_R f(x, y) \, dx \, dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) \, dx \right) dy,$$

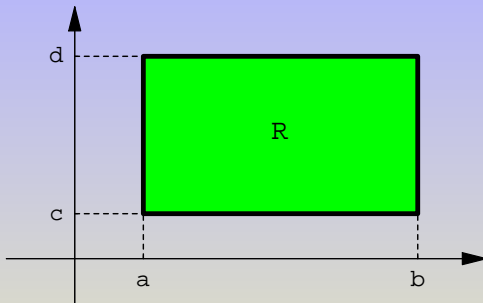
koja zajedno s prije dobivenom jednakošću daje

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) \, dx \right) dy.$$

Posljednja jednakost nas podsjeća na zamjenu sumiranja u integralnoj sumi jer je tamo svejedno da li prvo sumiramo po j pa onda po i ; ili obrnuto, prvo po i , a onda po j , rezultat je isti.

Stoga očekujemo da će to vrijediti i na limesu, tj. da će to vrijediti i za integrale. Drugim riječima, ako integriramo prvo po y , a onda po x , dobivamo isti rezultat kao da smo prvo integrirali po x , a onda po y . Pokazuje se da to vrijedi u slučaju da je f neprekidna funkcija.

Zamjena poretka integriranja može biti korisna kod računanja dvostrukog integrala jer je ponekad jedan poredak integriranja znatno teži od drugog poretka, što ćemo vidjeti na primjerima.



$$\iint_R f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx$$

$$\iint_R f(x, y) \, dx \, dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) \, dx \right) dy$$

Najčešće kratko pišemo

$$\iint_R f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) \, dy$$

$$\iint_R f(x, y) \, dx \, dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) \, dx$$

Dvostruki integral
Problem površine
Jednostruki integral
Dvostruke sume
 \iint pravokutnik
 \iint omeđen skup
 \iint svojstva
Računanje \iint
Zamjena varijabli

Teorem 53 (Fubinijev teorem).

Neka je $R = [a, b] \times [c, d]$ pravokutnik, a $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Tada vrijedi

$$\iint_R f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) \, dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) \, dx$$

Napomena.

Fubinijev teorem vrijedi i uz neke slabije uvjete na funkciju, tj. taj teorem vrijedi i u slučaju da je funkcija f "skoro svuda" neprekidna, tj. ima prekidne eventualno na skupu Lebesgueove mjere nula, odnosno specijalno, na skupu površine nula.

Primjer 81.

Izračunajte dvostruki integral

$$\iint_R (xy + 1) \, dx \, dy$$

ako je $R = [1, 2] \times [3, 8]$.

Rješenje

Dvostruki integral
Problem površine
Jednostruki integral
Dvostruke sume
 \iint pravokutnik
 \iint omeđen skup
 \iint svojstva
Računanje \iint
Zamjena varijabli

Primjer 81.

Izračunajte dvostruki integral

$$\iint_R (xy + 1) \, dx \, dy$$

ako je $R = [1, 2] \times [3, 8]$.

Rješenje

$$\begin{aligned} \iint_R (xy + 1) \, dx \, dy &= \int_1^2 dx \int_3^8 (xy + 1) \, dy = \\ &= \int_1^2 \left(\frac{1}{2}xy^2 + y \right) \Big|_{y=3}^{y=8} dx = \int_1^2 \left(\frac{55}{2}x + 5 \right) dx = \end{aligned}$$

Dvostruki integral
Problem površine
Jednostruki integral
Dvostruke sume
 \iint pravokutnik
 \iint omeđen skup
 \iint svojstva
Računanje \iint
Zamjena varijabli

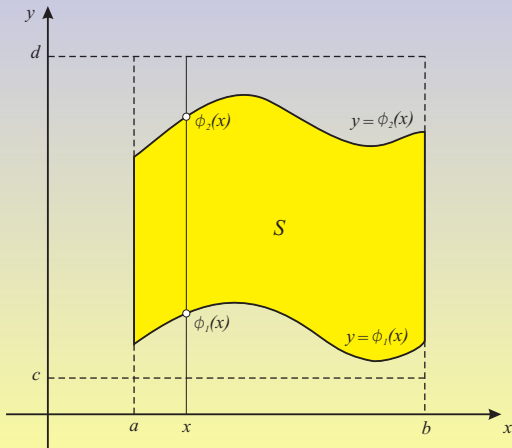
$$= \left(\frac{55}{4}x^2 + 5x \right) \Big|_{x=1}^{x=2} = \frac{185}{4}.$$

U obrnutom poretku bi bilo

$$\begin{aligned} \iint_R (xy + 1) \, dx \, dy &= \int_3^8 dy \int_1^2 (xy + 1) \, dx = \\ &= \int_3^8 \left(\frac{1}{2}x^2y + x \right) \Big|_{x=1}^{x=2} dy = \int_3^8 \left(\frac{3}{2}y + 1 \right) dy = \\ &= \left(\frac{3}{4}y^2 + y \right) \Big|_{y=3}^{y=8} = \frac{185}{4} \end{aligned}$$

U slučaju da treba integrirati po nekom općenitom J-izmjerivom skupu razlikujemo dva osnovna tipa takvih skupova.

I. tip



Skup S ima oblik kao na slici. Točnije, postoje funkcije

$$\phi_1, \phi_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

takve da je

$$\phi_1(x) \leq \phi_2(x), \quad \text{za svako } x \in [a, b]$$

i skup S je jednak

$$S = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x) \right\}.$$

Neka su $c, d \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$c < \phi_1(x) \leq \phi_2(x) < d \text{ za svako } x \in [a, b].$$

Neka je $R = [a, b] \times [c, d]$.

Tada je

$$\begin{aligned} \iint_S f(x, y) \, dx \, dy &= \iint_R \tilde{f}(x, y) \, dx \, dy = \\ &= \int_a^b \left(\int_c^d \tilde{f}(x, y) \, dy \right) dx, \end{aligned}$$

gdje je

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in S \\ 0, & (x, y) \in R \setminus S \end{cases}$$

No, kako je

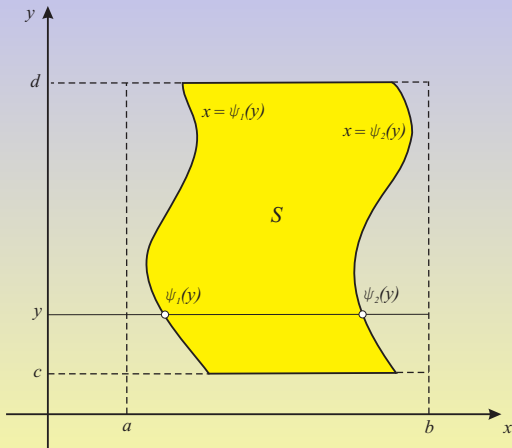
$$\begin{aligned}\int_c^d \tilde{f}(x, y) dy &= \int_c^{\phi_1(x)} \tilde{f}(x, y) dy + \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \tilde{f}(x, y) dy + \int_{\phi_2(x)}^d \tilde{f}(x, y) dy \\ &= \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy,\end{aligned}$$

slijedi da je

$$\iint_S f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy$$

Dvostruki integral
Problem površine
Jednostruki integral
Dvostruke sume
 \iint pravokutnik
 \iint omeđen skup
 \iint svojstva
Računanje \iint
Zamjena varijabli

II. tip



Skup S ima oblik kao na slici. Točnije, postoje funkcije

$$\psi_1, \psi_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$$

takve da je

$$\psi_1(y) \leq \psi_2(y), \quad \text{za svako } y \in [c, d]$$

i skup S je jednak

$$S = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c, d], \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y) \right\}.$$

Neka su $a, b \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$a < \psi_1(y) \leq \psi_2(y) < b \text{ za svako } y \in [c, d].$$

Neka je $R = [a, b] \times [c, d]$.

Tada je

$$\begin{aligned} \iint_S f(x, y) \, dx \, dy &= \iint_R \tilde{f}(x, y) \, dx \, dy = \\ &= \int_c^d \left(\int_a^b \tilde{f}(x, y) \, dx \right) dy, \end{aligned}$$

gdje je

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in S \\ 0, & (x, y) \in R \setminus S \end{cases}$$

No, kako je

$$\begin{aligned}\int_a^b \tilde{f}(x, y) dx &= \int_a^{\psi_1(y)} \tilde{f}(x, y) dx + \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \tilde{f}(x, y) dx + \int_{\psi_2(y)}^d \tilde{f}(x, y) dx \\ &= \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx,\end{aligned}$$

slijedi da je

$$\iint_S f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx$$

Dvostruki integral
Problem površine
Jednostruki integral
Dvostruke sume
 \iint pravokutnik
 \iint omeđen skup
 \iint svojstva
Računanje \iint
Zamjena varijabli

Primjer 82.

Izračunajte dvostruki integral

$$\iint_{\Omega} \left(x^{\frac{1}{2}} - y^2 \right) dx dy,$$

ako je

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x^{\frac{1}{4}} \right\}.$$

Rješenje

Primjer 82.

Izračunajte dvostruki integral

$$\iint_{\Omega} \left(x^{\frac{1}{2}} - y^2 \right) dx dy,$$

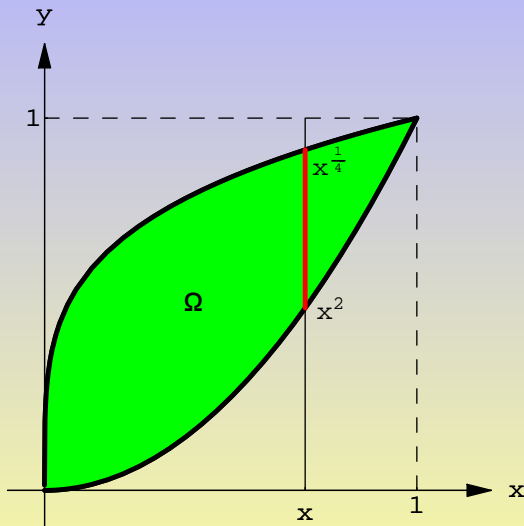
ako je

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x^{\frac{1}{4}} \right\}.$$

Rješenje

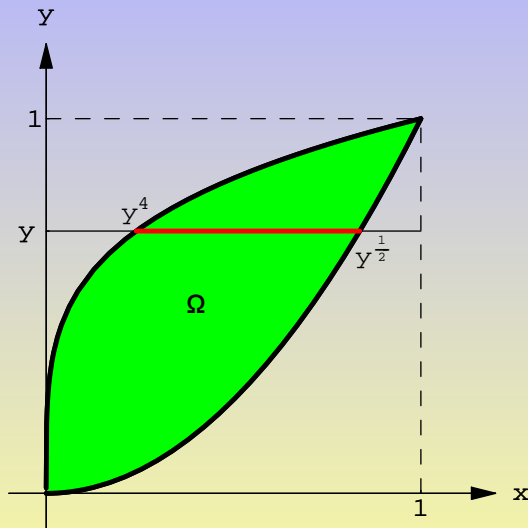
Sa slike vidimo da je $x \in [0, 1]$, a za odabrani x je

$y \in [x^2, x^{\frac{1}{4}}]$. Stoga je



$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \left(x^{\frac{1}{2}} - y^2 \right) dx dy &= \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x^{\frac{1}{4}}} \left(x^{\frac{1}{2}} - y^2 \right) dy = \\ &= \int_0^1 \left(x^{\frac{1}{2}} y - \frac{1}{3} y^3 \right) \Big|_{y=x^2}^{y=x^{\frac{1}{4}}} dx = \int_0^1 \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{4}} - x^{\frac{5}{2}} + \frac{x^6}{3} \right) dx = \\ &= \left(\frac{8}{21} x^{\frac{7}{4}} - \frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} + \frac{1}{21} x^7 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{7} \end{aligned}$$

Zamijenimo li poredak integracije, sa slike vidimo da je
 $y \in [0, 1]$, a za odabrani y je $x \in [y^4, y^{\frac{1}{2}}]$. Stoga je



$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \left(x^{\frac{1}{2}} - y^2 \right) dx dy &= \int_0^1 dy \int_{y^4}^{y^{\frac{1}{2}}} \left(x^{\frac{1}{2}} - y^2 \right) dx = \\ &= \int_0^1 \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - y^2 x \right) \Big|_{x=y^4}^{x=y^{\frac{1}{2}}} dy = \int_0^1 \left(\frac{2}{3} y^{\frac{3}{4}} - y^{\frac{5}{2}} + \frac{y^6}{3} \right) dy = \\ &= \left(\frac{8}{21} y^{\frac{7}{4}} - \frac{2}{7} y^{\frac{7}{2}} + \frac{1}{21} y^7 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{7} \end{aligned}$$

Primijećujemo da je u oba poretka integriranja bila jednaka težina rješavanja integrala.

Primjer 83.

Izračunajte dvostruki integral

$$\iint_{\Omega} (x^4 - 2y) \, dx \, dy,$$

ako je

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, -x^2 \leq y \leq x^2 \right\}.$$

Rješenje

Dvostruki integral
Problem površine
Jednostruki integral
Dvostruke sume
 \iint pravokutnik
 \iint omeđen skup
 \iint svojstva
Računanje \iint
Zamjena varijabli

Primjer 83.

Izračunajte dvostruki integral

$$\iint_{\Omega} (x^4 - 2y) \, dx \, dy,$$

ako je

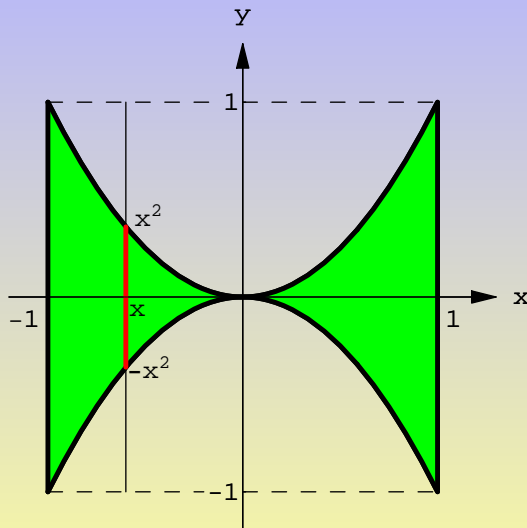
$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, -x^2 \leq y \leq x^2 \right\}.$$

Rješenje

Sa slike vidimo da je $x \in [-1, 1]$, a za odabrani x je
 $y \in [-x^2, x^2]$. Stoga je

Dvostruki integral
Problem površine
Jednostruki integral
Dvostruke sume
 \iint pravokutnik
 \iint omeđen skup
 \iint svojstva

Računanje \iint
Zamjena varijabli

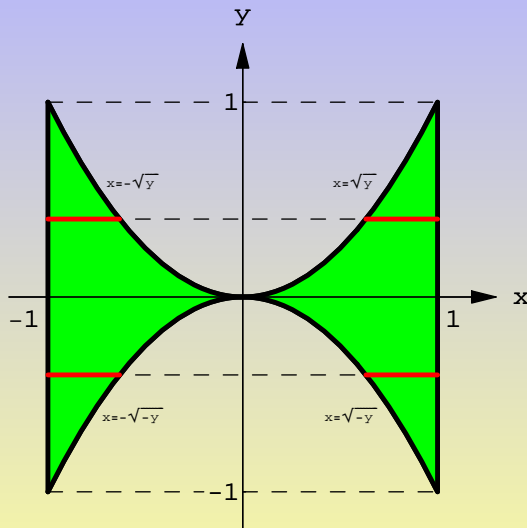


$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} (x^4 - 2y) \, dx \, dy &= \int_{-1}^1 dx \int_{-x^2}^{x^2} (x^4 - 2y) \, dy = \\ &= \int_{-1}^1 (x^4 y - y^2) \Big|_{y=-x^2}^{y=x^2} dx = \int_{-1}^1 2x^6 \, dx = \frac{2}{7} x^7 \Big|_{x=-1}^{x=1} = \frac{4}{7} \end{aligned}$$

Zamijenimo li u ovom slučaju poredak integracije, postupak integriranja će biti malo kompliciraniji. Naime, sa slike vidimo da je $y \in [-1, 1]$, ali smo tada prisiljeni područje integracije podijeliti na 4 dijela.

Dvostruki integral
Problem površine
Jednostruki integral
Dvostruke sume
 \iint pravokutnik
 \iint omeđen skup
 \iint svojstva

Računanje \iint
Zamjena varijabli



- $y \in [-1, 0], x \in [-1, -\sqrt{-y}]$
- $y \in [-1, 0], x \in [\sqrt{-y}, 1]$
- $y \in [0, 1], x \in [-1, -\sqrt{y}]$
- $y \in [0, 1], x \in [\sqrt{y}, 1]$

Stoga je

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} (x^4 - 2y) \, dx \, dy &= \int_{-1}^0 dy \int_{-1}^{-\sqrt{-y}} (x^4 - 2y) \, dx + \\ &+ \int_{-1}^0 dy \int_{\sqrt{-y}}^1 (x^4 - 2y) \, dx + \int_0^1 dy \int_{-1}^{-\sqrt{y}} (x^4 - 2y) \, dx + \\ &+ \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^1 (x^4 - 2y) \, dx \end{aligned}$$

Dvostruki integral
Problem površine
Jednostruki integral
Dvostruke sume
 \iint pravokutnik
 \iint omeđen skup
 \iint svojstva
Računanje \iint
Zamjena varijabli

Sada se izračunaju ova četiri uzastopna jednostruka integrala i dobit će se isti rezultat kao i prije. Vidimo da u ovom slučaju nije svejedno kojim poretkom integriramo jer je ovaj drugi poredak integriranja znatno dulji od prvog. Ponekad čak u jednom poretku integriranja možemo dobiti integral koji nije moguće riješiti elementarnim funkcijama, dok zamjenom poretka integriranja dobivamo jednostavniji integral kojeg lagano riješimo.

Zamjena varijabli u dvostrukom integralu

Kod jednostrukih integrala je zamjena varijabli relativno jednostavna, dok je kod dvostrukih integrala to ipak nešto složenije. Naime, kod jednostrukih integrala je područje integracije uvijek neki interval pa se kod zamjene varijabli samo taj interval preslika u neki novi interval. Kod dvostrukih integrala područja integracije mogu biti razni J-izmjerivi skupovi u ravnini pa kod zamjeni varijabli treba paziti u što će se preslikati područje integracije. Tako se, npr. nakon zamjene varijabli pravokutnik može preslikati u krug i slično.

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Dvostruki integral
Problem površine
Jednostruki integral
Dvostruke sume
 \iint pravokutnik
 \iint omeđen skup
 \iint svojstva
Računanje \iint
Zamjena varijabli



Prisjetimo se kako izgleda zamjena varijabli u jednostrukom integralu.

Propozicija 66.

Neka je $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija klase C^1 , a

$f : \varphi([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Tada vrijedi

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) \, dx = \int_a^b f(\varphi(x)) \varphi'(x) \, dx.$$

Dokaz.

Kako je f neprekidna funkcija, tada ona ima primitivnu funkciju. Neka je F primitivna funkcija od f , tj. $F' = f$.

Prema Newton-Leibnizovoj formuli je

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) \, dx = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = (F \circ \varphi)(b) - (F \circ \varphi)(a)$$

Iz

$$(F \circ \varphi)'(x) = F'(\varphi(x))\varphi'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x)$$

slijedi da je

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) \, dx = \int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x) \, dx.$$



Kratko pišemo

$$\int_{\varphi([a,b])} f = \int_{[a,b]} (f \circ \varphi) \cdot \varphi'.$$

Ako je φ injekcija, tada je ona strogo rastuća ili strogo padajuća funkcija, pa se lako vidi da vrijedi

$$\int_{\varphi([a,b])} f = \int_{[a,b]} (f \circ \varphi) \cdot |\varphi'|.$$

Posljednju jednakost želimo generalizirati na funkcije dvije varijable.

Dvostruki integral
Problem površine
Jednostruki integral
Dvostruke sume
 \iint pravokutnik
 \iint omeđen skup
 \iint svojstva
Računanje \iint
Zamjena varijabli

Pretpostavimo da je u dvostrukom integralu

$$\iint_S f(x, y) \, dx \, dy$$

napravljena supstitucija

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v).$$

Tom supstitucijom funkcija $f(x, y)$ varijabli x i y prelazi u funkciju $f(x(u, v), y(u, v))$ varijabli u i v , skup S se preslika u skup S^* , a integral će prijeći u integral tipa

$$\iint_{S^*} g(u, v) \, du \, dv.$$

Produkt $du dv$ je površina nekog pravokutnika pri formiranju posljednjeg integrala u u - v ravnini. Krivulje $u = u_0$ i $v = v_0$ čine mrežu podjele područja u u - v ravnini. Nadalje je

$$dx = x_u du + x_v dv, \quad dy = y_u du + y_v dv.$$

Dakle, promijeni li se točka (u_0, v_0) do točke $(u_0 + du, v_0)$ (uz konstantan v , pa je $dv = 0$), točka (x_0, y_0) se promijeni do točke $(x_0 + x_u du, y_0 + y_u du)$. Dobivamo vektor

$$\vec{a} = x_u du \vec{i} + y_u du \vec{j}$$

koji je određen sa ove dvije točke.

Isto tako, promijeni li se točka (u_0, v_0) do točke $(u_0, v_0 + dv)$ (uz konstantan u , pa je $du = 0$), točka (x_0, y_0) se promijeni do točke $(x_0 + x_v dv, y_0 + y_v dv)$.

Dobivamo vektor

$$\vec{b} = x_v dv \vec{i} + y_v dv \vec{j}.$$

Vektori \vec{a} i \vec{b} određuju paralelogram u x - y ravnini čija je površina približno jednaka površini koju određuju krivulje

$$c_1(u) = (x(u, v_0), y(u, v_0)), \quad c_2(v) = (x(u_0, v), y(u_0, v)).$$

Zapravo su vektori \vec{a} i \vec{b} tangencijalni vektori tih krivulja u točki u_0 , odnosno v_0 .

Na vektore \vec{a} i \vec{b} možemo gledati kao na vektore u prostoru kojima su zadnje koordinate jednake 0.

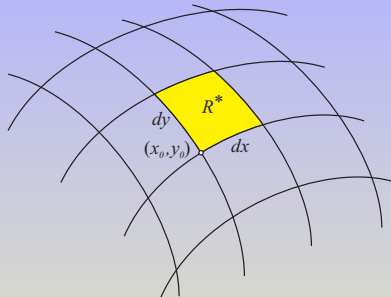
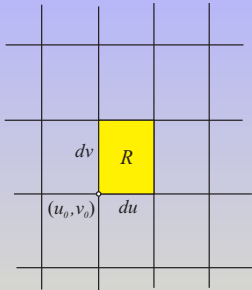
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_u du & y_u du & 0 \\ x_v dv & y_v dv & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} du dv \vec{k}$$

Površina paralelograma određenog vektorima \vec{a} i \vec{b} jednaka je

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv,$$

gdje je

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}.$$



$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v)$$

$$\varphi(u, v) = (x, y)$$

$$d\varphi = \begin{bmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{bmatrix}, \quad \det d\varphi = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}$$

$$dx \, dy = |\det d\varphi| \, du \, dv$$

Teorem 54 (O zamjeni varijabli u dvostrukom integralu).

Neka je $S \subseteq \mathbb{R}^2$ kompaktan J -izmjeriv skup, $\Omega \supseteq S$ otvoren skup, a $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ injektivno diferencijabilno preslikavanje klase C^1 takvo da je diferencijal $d\varphi(P)$ regularan u svim točkama $P \in \Omega$. Tada za svaku Riemann integrabilnu funkciju $f : \varphi(S) \rightarrow \mathbb{R}$ vrijedi

$$\iint_{\varphi(S)} f(x, y) \, dx \, dy = \iint_S (f \circ \varphi)(u, v) |\det d\varphi(u, v)| \, du \, dv$$

Kratko pišemo

$$\iint_{\varphi(S)} f = \iint_S (f \circ \varphi) |\det d\varphi|.$$

Prisjetimo se, za funkciju jedne varijable je

$$\int_{\varphi([a,b])} f = \int_{[a,b]} (f \circ \varphi) \cdot |\varphi'|.$$

Zadatak 23.

Usporedite gornje dvije formule. Objasnite da li se one bitno razlikuju u svojoj strukturi.

Dvostruki integral
Problem površine
Jednostruki integral
Dvostruke sume
 \iint pravokutnik
 \iint omeđen skup
 \iint svojstva
Računanje \iint
Zamjena varijabli

Prijelaz na polarne koordinate

Jedna od najčešćih supstitucija je prijelaz na polarne koordinate. Ona se u većini slučajeva upotrebljava kada je područje integracije krug, kružni vijenac i slično.

Radi se o supstituciji oblika

$$x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi, \quad \phi \in [0, 2\pi], \quad r \geq 0.$$

Tada je

$$x_\phi = -r \sin \phi, \quad x_r = \cos \phi, \quad y_\phi = r \cos \phi, \quad y_r = \sin \phi,$$

pa je

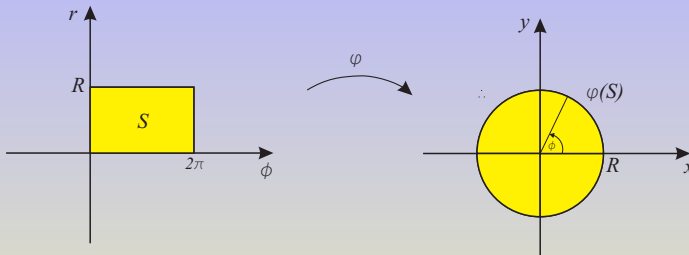
$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\phi, r)} = \begin{vmatrix} -r \sin \phi & r \cos \phi \\ \cos \phi & \sin \phi \end{vmatrix} = -r.$$

Stoga je

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(\phi, r)} \right| = r.$$

Ovo ćemo zapamtiti tako da svaki put kad idemo na polarne koordinate nećemo više to posebno računati.

Ovom supstitucijom se integriranje po krugu koji ima središte u ishodištu svodi na integriranje po pravokutniku kojemu su stranice paralelne s koordinatnim osima.



$$x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi$$

$$\varphi(\phi, r) = (x, y), \quad |\det d\varphi| = r$$

$$\iint_{\varphi(S)} f(x, y) \, dx \, dy = \iint_S f(r \cos \phi, r \sin \phi) r \, d\phi \, dr$$

Dvostruki integral
Problem površine
Jednostruki integral
Dvostruke sume
 \iint pravokutnik
 \iint omeđen skup
 \iint svojstva
Računanje \iint
Zamjena varijabli

Primjer 84.

Izračunajte

$$I = \iint_S \sqrt{1 - x^2 - y^2} \, dx \, dy$$

ako je S četvrtina kruga $x^2 + y^2 \leq 1$ koja se nalazi u prvom kvadrantu.

Rješenje

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Dvostruki integral
Problem površine
Jednostruki integral
Dvostruke sume
 \iint pravokutnik
 \iint omeđen skup
 \iint svojstva
Računanje \iint
Zamjena varijabli

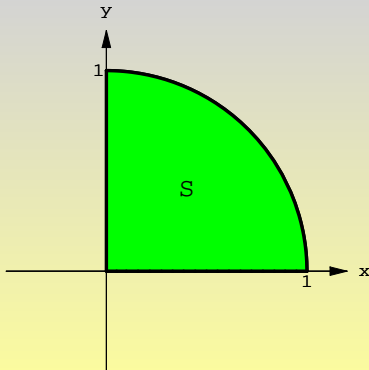
Primjer 84.

Izračunajte

$$I = \iint_S \sqrt{1 - x^2 - y^2} \, dx \, dy$$

ako je S četvrtina kruga $x^2 + y^2 \leq 1$ koja se nalazi u prvom kvadrantu.

Rješenje



Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Dvostruki integral
Problem površine
Jednostruki integral
Dvostruke sume
 \iint pravokutnik
 \iint omeđen skup
 \iint svojstva
Računanje \iint
Zamjena varijabli

Prelazimo na polarne koordinate.

$$x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi, \quad |\det d\varphi| = r$$

Tada je

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int_0^1 \sqrt{1 - r^2 \cos^2 \phi - r^2 \sin^2 \phi} r dr = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int_0^1 r \sqrt{1 - r^2} dr. \end{aligned}$$

Kako je

$$\int r \sqrt{1 - r^2} dr = \left[\begin{array}{l} 1 - r^2 = t \\ -2r dr = dt \end{array} \right] = \frac{-1}{2} \int \sqrt{t} dt =$$

$$= \frac{-1}{3} t^{\frac{3}{2}} = \frac{-1}{3} (1 - r^2)^{\frac{3}{2}}$$

slijedi da je

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left. \frac{-1}{3} (1 - r^2)^{\frac{3}{2}} \right|_{r=0}^{r=1} d\phi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3} d\phi = \frac{1}{3} \phi \Big|_{\phi=0}^{\phi=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{6}$$

Primjer 85.

Izračunajte površinu kruga polumjera R .

Rješenje

$$= \frac{-1}{3} t^{\frac{3}{2}} = \frac{-1}{3} (1 - r^2)^{\frac{3}{2}}$$

slijedi da je

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-1}{3} (1 - r^2)^{\frac{3}{2}} \bigg|_{r=0}^{r=1} d\phi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3} d\phi = \frac{1}{3} \phi \bigg|_{\phi=0}^{\phi=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{6}$$

Primjer 85.

Izračunajte površinu kruga polumjera R .

Rješenje

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da krug K ima središte u ishodištu koordinatnog sustava. Tada je prema formuli

$$P(K) = \iint_K dx \, dy.$$

Prijelazom na polarne koordinate dobivamo

$$\begin{aligned} P(K) &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r \, dr = \int_0^{2\pi} \frac{r^2}{2} \Big|_{r=0}^{r=R} d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{R^2}{2} d\varphi = \\ &= \frac{R^2}{2} \varphi \Big|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} = R^2 \pi. \end{aligned}$$

Primjer 86.

Izračunajte površinu kružnog isječka S polumjera R sa središnjim kutom α .

Rješenje

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

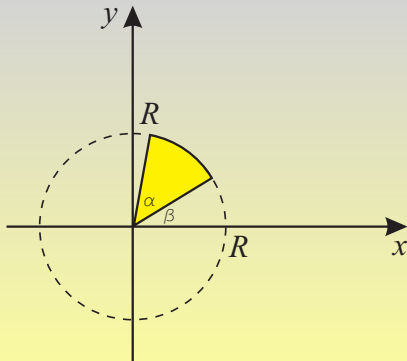
Dvostruki integral
Problem površine
Jednostruki integral
Dvostruke sume
 \iint pravokutnik
 \iint omeđen skup
 \iint svojstva
Računanje \iint
Zamjena varijabli

Primjer 86.

Izračunajte površinu kružnog isječka S polumjera R sa središnjim kutom α .

Rješenje

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je središte kružnog isječka u ishodištu koordinatnog sustava.



Uz oznake sa slike, prijelazom na polarne koordinate
dobivamo

$$\begin{aligned}
 P(S) &= \iint_S dx \, dy = \int_{\beta}^{\beta+\alpha} d\varphi \int_0^R r \, dr = \int_{\beta}^{\beta+\alpha} \left. \frac{r^2}{2} \right|_{r=0}^{r=R} d\varphi = \\
 &= \int_{\beta}^{\beta+\alpha} \frac{R^2}{2} d\varphi = \left. \frac{R^2}{2} \varphi \right|_{\varphi=\beta}^{\varphi=\beta+\alpha} = \frac{R^2 \alpha}{2}.
 \end{aligned}$$

Primjer 87.

Izračunajte volumen kružnog valjka visine v i polumjera baze R .

Rješenje

Dvostruki integral
Problem površine
Jednostruki integral
Dvostruke sume
 \iint pravokutnik
 \iiint omeđen skup
 \iint svojstva
Računanje \iint
Zamjena varijabli

Primjer 87.

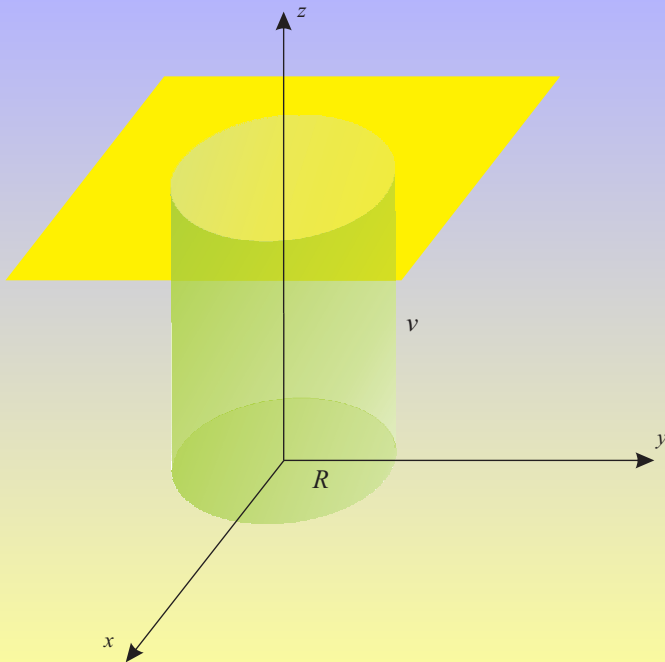
Izračunajte volumen kružnog valjka visine v i polumjera baze R .

Rješenje

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je središte baze K valjka u ishodištu koordinatnog sustava. Sa slike vidimo da je tada volumen valjka jednak integralu funkcije $f(x, y) = v$ po skupu K .

$$V = \iint_K v \, dx \, dy$$

Prelaskom na polarne koordinate dobivamo



$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R vr \, dr = \int_0^{2\pi} \frac{v}{2} r^2 \Big|_{r=0}^{r=R} d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{v}{2} R^2 d\varphi = \frac{vR^2}{2} \varphi \Big|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} = R^2 \pi v \end{aligned}$$

Primjer 88.

Izračunajte volumen kugle polumjera R .

Rješenje

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R vr \, dr = \int_0^{2\pi} \frac{v}{2} r^2 \Big|_{r=0}^{r=R} d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{v}{2} R^2 d\varphi = \frac{vR^2}{2} \varphi \Big|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} = R^2 \pi v \end{aligned}$$

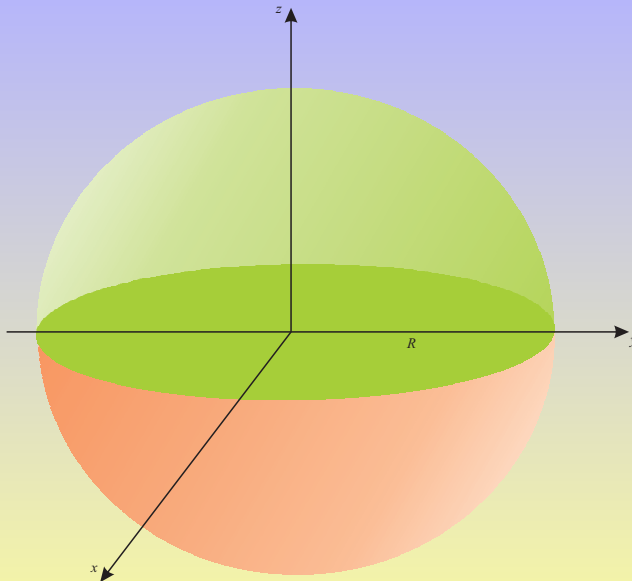
Primjer 88.

Izračunajte volumen kugle polumjera R .

Rješenje

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da sfera ima središte u ishodištu koordinatnog sustava. Njezina je jednadžba

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$



Volumen kugle jednak je dvostrukom volumenu koji je omeđen gornjom polusferom i xy -ravninom. Gornja polusfera ima jednadžbu

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}.$$

Stoga je

$$V = 2 \iint_K \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \, dx \, dy,$$

gdje je K krug u xy -ravnini polumjera R sa središtem u ishodištu. Prijelazom na polarne koordinate dobivamo

$$\begin{aligned} V &= 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \sqrt{R^2 - r^2 \cos^2 \varphi - r^2 \sin^2 \varphi} r dr = \\ &= 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r \sqrt{R^2 - r^2} dr. \end{aligned}$$

Kako je

$$\begin{aligned} \int r \sqrt{R^2 - r^2} dr &= \left[\begin{array}{l} R^2 - r^2 = t \\ -2r dr = dt \end{array} \right] = \frac{-1}{2} \int \sqrt{t} dt = \\ &= \frac{-1}{3} t^{\frac{3}{2}} = \frac{-1}{3} (R^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}, \end{aligned}$$

slijedi da je

$$V = 2 \int_0^{2\pi} \frac{1}{3} (R^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} \bigg|_{r=0}^{r=R} d\varphi = 2 \int_0^{2\pi} \frac{1}{3} R^3 d\varphi =$$

$$= \frac{2}{3} R^3 \varphi \bigg|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} = \frac{4}{3} R^3 \pi$$

Osim polarnih koordinata, druga korisna zamjena varijabli je prijelaz na eliptičke koordinate. Radi se o supstituciji oblika

$$x = ar \cos \phi, \quad y = br \sin \phi, \quad r \in [0, 1], \quad \phi \in [0, 2\pi], \quad a, b > 0$$

Tada je

$$x_\phi = -ar \sin \phi, \quad x_r = a \cos \phi, \quad y_\phi = br \cos \phi, \quad y_r = b \sin \phi,$$

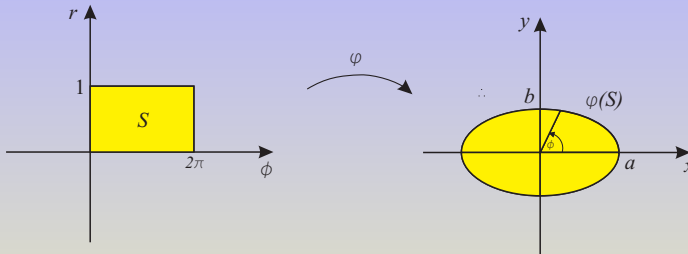
pa je

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\phi, r)} = \begin{vmatrix} -ar \sin \phi & br \cos \phi \\ a \cos \phi & b \sin \phi \end{vmatrix} = -abr$$

odnosno

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(\phi, r)} \right| = abr.$$

Ovom supstitucijom se integriranje po elipsi koji ima središte u ishodištu svodi na integriranje po pravokutniku kojemu su stranice paralelne s koordinatnim osima.



$$x = ar \cos \phi, \quad y = br \sin \phi$$

$$\varphi(\phi, r) = (x, y), \quad |\det d\varphi| = \textcolor{red}{abr}$$

$$\iint_{\varphi(S)} f(x, y) \, dx \, dy = \iint_S f(ar \cos \phi, br \sin \phi) \textcolor{red}{abr} \, d\phi \, dr$$

Dvostruki integral
Problem površine
Jednostruki integral
Dvostruke sume
 \iint pravokutnik
 \iint omeđen skup
 \iint svojstva
Računanje \iint
Zamjena varijabli

Primjer 89.

Izračunajte površinu elipse E s poluosima a i b .

Rješenje

Dvostruki integral
Problem površine
Jednostruki integral
Dvostruke sume
 \iint pravokutnik
 \iiint omeđen skup
 \iiint svojstva
Računanje \iint
Zamjena varijabli

Primjer 89.

Izračunajte površinu elipse E s poluosima a i b .

Rješenje

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da elipsa E ima središte u ishodištu koordinatnog sustava.

Prijelazom na eliptičke koordinate dobivamo

$$\begin{aligned} P(E) &= \iint_E dx \, dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 abr \, dr = \int_0^{2\pi} \frac{abr^2}{2} \Big|_{r=0}^{r=1} d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{ab}{2} d\varphi = \frac{ab}{2} \varphi \Big|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} = ab\pi. \end{aligned}$$

Dvostruki integral
Problem površine
Jednostruki integral
Dvostruke sume
 \iint pravokutnik
 \iint omeđen skup
 \iint svojstva
Računanje \iint
Zamjena varijabli

Primjer 90.

Izračunajte dvostruki integral

$$I = \iint_K y \, dx \, dy$$

ako je K polukrug promjera a sa središtem u točki $(\frac{a}{2}, 0)$ koji čitav leži u prvom kvadrantu.

Rješenje

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Dvostruki integral
Problem površine
Jednostruki integral
Dvostruke sume
 \iint pravokutnik
 \iint omeđen skup
 \iint svojstva
Računanje \iint
Zamjena varijabli

Primjer 90.

Izračunajte dvostruki integral

$$I = \iint_K y \, dx \, dy$$

ako je K polukrug promjera a sa središtem u točki $(\frac{a}{2}, 0)$ koji čitav leži u prvom kvadrantu.

Rješenje

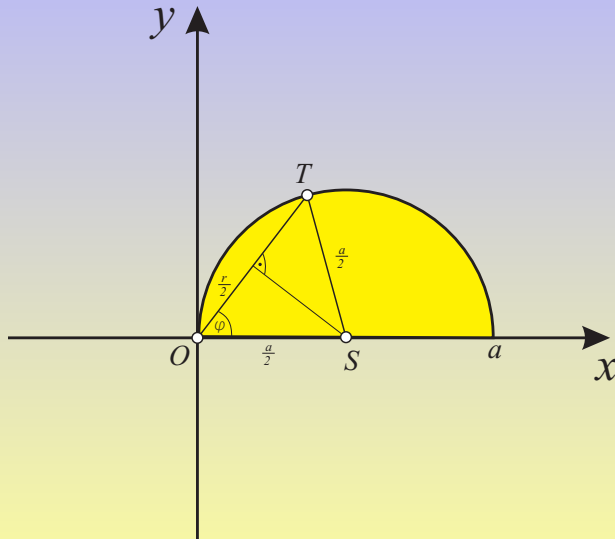
1. način

Kako je $|OS| = |OT| = \frac{a}{2}$, trokut OST je jednakokračan, pa vrijedi

$$\cos \varphi = \frac{\frac{r}{2}}{\frac{a}{2}},$$

odnosno

$$r = a \cos \varphi.$$



Dakle, za odabrani $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ je $r \in [0, a \cos \varphi]$.

Prelaskom na polarne koordinate dobivamo

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a \cos \varphi} r \sin \varphi \cdot r dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a \cos \varphi} r^2 \sin \varphi dr = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^3}{3} \sin \varphi \Big|_{r=0}^{r=a \cos \varphi} d\varphi = \frac{a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \varphi \sin \varphi d\varphi \end{aligned}$$

Nadalje,

$$\begin{aligned} \int \cos^3 \varphi \sin \varphi d\varphi &= \left[\begin{array}{l} t = \cos \varphi \\ dt = -\sin \varphi d\varphi \end{array} \right] = - \int t^3 dt = \\ &= -\frac{t^4}{4} = -\frac{1}{4} \cos^4 \varphi \end{aligned}$$

Stoga je

$$I = \frac{-a^3}{12} \cos^4 \varphi \Big|_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} = \frac{a^3}{12}.$$

2. način

Prije nego krenemo na polarne koordinate pomaknimo prvo zadani polukrug tako da njegovo središte dođe u ishodište koordinatnog sustava. To ćemo postići pomoću supstitucije

$$x = u + \frac{a}{2}, \quad y = v.$$

Tada je

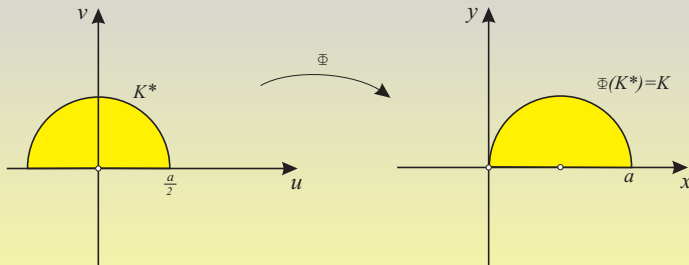
$$x_u = 1, \quad x_v = 0, \quad y_u = 0, \quad y_v = 1.$$

Računamo

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

pa je

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = 1.$$



Dvostruki integral
Problem površine
Jednostruki integral
Dvostruke sume
 \iint pravokutnik
 \iint omeđen skup
 \iint svojstva
Računanje \iint
Zamjena varijabli

Stoga je

$$I = \iint_{K^*} v \cdot \mathbf{1} \, du \, dv = \iint_{K^*} v \, du \, dv.$$

Sada je puno lakše prijeći na polarne koordinate

$$u = r \cos \varphi, \quad v = r \sin \varphi, \quad \varphi \in [0, \pi], \quad r \in [0, \frac{a}{2}].$$

$$I = \int_0^\pi d\varphi \int_0^{\frac{a}{2}} r \sin \varphi \cdot r \, dr = \int_0^\pi d\varphi \int_0^{\frac{a}{2}} r^2 \sin \varphi \, dr =$$

$$= \int_0^\pi \frac{r^3}{3} \sin \varphi \Big|_{r=0}^{r=\frac{a}{2}} d\varphi = \int_0^\pi \frac{a^3}{24} \sin \varphi \, d\varphi = \frac{-a^3}{24} \cos \varphi \Big|_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} =$$

$$= \frac{a^3}{24} - \left(-\frac{a^3}{24} \right) = \frac{a^3}{12}$$

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Dvostruki integral
Problem površine
Jednostruki integral
Dvostruke sume
 \iiint pravokutnik
 \iint omeđen skup
 \iint svojstva
Računanje \iint
Zamjena varijabli



Dio X

Obične diferencijalne jednačbe

Obične dif. jednačbe
Osnovne definicije
Separacija varijabli
Homogene jednačbe
Egzaktne jednačbe
Eulerovi multiplikatori
Linearne jednačbe
Bernoullijeva jednačba
Jednačbe višeg reda

- Obične diferencijalne jednačbe
 - Osnovne definicije
 - Separacija varijabli
 - Homogene diferencijalne jednačbe
 - Egzaktne diferencijalne jednačbe
 - Eulerovi multiplikatori
 - Linearne jednačbe 1. reda
 - Bernoullijeva jednačba
 - Diferencijalne jednačbe višeg reda

Obične dif. jednačbe

Osnovne definicije
Separacija varijabli
Homogene jednačbe
Egzaktne jednačbe
Eulerovi multiplikatori
Linearne jednačbe
Bernoullijeva jednačba
Jednačbe višeg reda

Osnovne definicije

Diferencijalne jednađbe su uz matrice jedan od temelja moderne matematike koje imaju široku primjenu u prirodnim znanostima, ali isto tako i u društvenim znanostima. Razvojem računala razvile su se mnoge numeričke metode za rješavanje diferencijalnih jednađbi koje omogućuju modeliranje i rješavanje složenih problema koji se baziraju na sustavima diferencijalnih jednađbi.

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Obične dif. jednađbe

Osnovne definicije

Separacija varijabli

Homogene jednađbe

Egzaktne jednađbe

Eulerovi multiplikatori

Linearne jednađbe

Bernoullijeva jednađba

Jednađbe višeg reda

Neka je $n \in \mathbb{N}$. **Obična diferencijalna jednačba n -tog reda** je jednačba oblika

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

ili

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}),$$

tj. relacija koja veže nezavisnu varijablu x , nepoznatu funkciju jedne varijable $y = y(x)$ i njezine derivacije $y', y'', \dots, y^{(n)}$.

Red diferencijalne jednačbe je red najviše derivacije koja se javlja u jednačbi.

Specijalno, obična diferencijalna jednačba prvog reda je jednačba oblika

$$F(x, y, y') = 0$$

ili

$$y' = f(x, y)$$

ili pak

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Funkciju $f(x, y)$ možemo uvijek napisati u obliku kvocijenta dviju funkcija $M(x, y)$ i $-N(x, y)$, pa dobivamo

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)}.$$

Ako to formalno izmnožimo, dobivamo ekvivalentni zapis u obliku diferencijalne forme

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0.$$

Primjer 91.

Ekvivalentni zapisi obične diferencijalne jednadžbe

$$y' = 5x + 3:$$

- $y' = 5x + 3$

- $\frac{dy}{dx} = 5x + 3$

- $(5x + 3) dx - dy = 0$

Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ otvoren skup i f neprekidna realna funkcija na Ω . Funkcija $u : J \rightarrow \mathbb{R}$ je **rješenje** obične diferencijalne jednačbe

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

ako je:

- J interval u \mathbb{R}
- $u \in C^1(J, \mathbb{R})$
- graf $u = \{(x, u(x)) : x \in J\} \subseteq \Omega$
- $\frac{du}{dx}(x) = f(x, u(x))$

Napomena.

U definiciji rješenja obične diferencijalne jednačbe prvog reda zahtijevamo da domena funkcije koja je rješenje bude interval. To znači da ako, npr. 0 nije u domeni da je domena nekog rješenja ili lijevo ili desno od 0.

Iako kod rješavanja običnih diferencijalnih jednačbi ne vodimo toliko brigu o domeni rješenja (naravno imamo na umu da domena mora biti interval), ponekad je koristan taj zahtjev da domena mora biti interval, pogotovo u trenutku kada želimo ispustiti apsolutne vrijednosti i slično, što ćemo vidjeti na konkretnim zadacima.

Obične dif. jednačbe

Osnovne definicije

Separacija varijabli

Homogene jednačbe

Egzaktne jednačbe

Eulerovi multiplikatori

Linearne jednačbe

Bernoullijeva jednačba

Jednačbe višeg reda

Napomena.

Opće rješenje obične diferencijalne jednačbe

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

nećemo moći uvijek naći u eksplicitnom obliku $y = y(x)$.

U većini slučajeva rješenje ćemo dobiti u implicitnom obliku $U(x, y) = 0$, odnosno dobit ćemo nekakvu jednakost u kojoj se javlja nezavisna varijabla x i funkcija y iz koje neće biti moguće eksplicitno izraziti y . No, bitno je to da se u toj jednakosti ne javljaju derivacije.

Isto tako, diferencijalne jednačbe mogu imati i **singularna rješenja**, a to su ona rješenja koja se ne mogu dobiti iz općeg rješenja.

Napomena.

Diferencijalnu jednačbu u kojoj nepoznata funkcija ovisi o dvije ili više varijabli zovemo **parcijalnom diferencijalnom jednačbom**. Ovdje ćemo se baviti samo običnim diferencijalnim jednačbama pa ćemo od sada riječ "obične" ispuštati.

Primjer 92.

Primjer parcijalne diferencijalne jednačbe

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - 5 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$$

U većini situacija tražimo rješenje diferencijalne jednačbe

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

uz neki početni uvjet $y(x_0) = y_0$. Takav problem se zove
Cauchyjev problem.

Primjer 93.

Provjerite da je $y = x^2$ rješenje jednačbe $xy' = 2y$ za
svaki $x \in \mathbb{R}$.

Rješenje

U većini situacija tražimo rješenje diferencijalne jednačbe

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

uz neki početni uvjet $y(x_0) = y_0$. Takav problem se zove
Cauchyjev problem.

Primjer 93.

Provjerite da je $y = x^2$ rješenje jednačbe $xy' = 2y$ za
svaki $x \in \mathbb{R}$.

Rješenje

Kako je $y' = 2x$, dobivamo

$$xy' = x \cdot 2x = 2x^2 = 2y.$$

Primjer 94.

Provjerite da je $x^2 + y^2 - 1 = 0$ rješenje jednadžbe $yy' = -x$ za svaki $x \in \langle -1, 1 \rangle$.

Rješenje

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Obične dif. jednadžbe

Osnovne definicije

Separacija varijabli

Homogene jednadžbe

Egzaktne jednadžbe

Eulerovi multiplikatori

Linearne jednadžbe

Bernoullijeva jednadžba

Jednadžbe višeg reda



Primjer 94.

Provjerite da je $x^2 + y^2 - 1 = 0$ rješenje jednačbe
 $yy' = -x$ za svaki $x \in \langle -1, 1 \rangle$.

Rješenje

Deriviramo li jednakost $x^2 + y^2 - 1 = 0$ po x , dobivamo

$$2x + 2yy' = 0,$$

odnosno $yy' = -x$.

Primjer 95.

Riješite diferencijalnu jednačbu $y' = \cos x$.

Rješenje

Primjer 94.

Provjerite da je $x^2 + y^2 - 1 = 0$ rješenje jednačbe
 $yy' = -x$ za svaki $x \in \langle -1, 1 \rangle$.

Rješenje

Deriviramo li jednakost $x^2 + y^2 - 1 = 0$ po x , dobivamo

$$2x + 2yy' = 0,$$

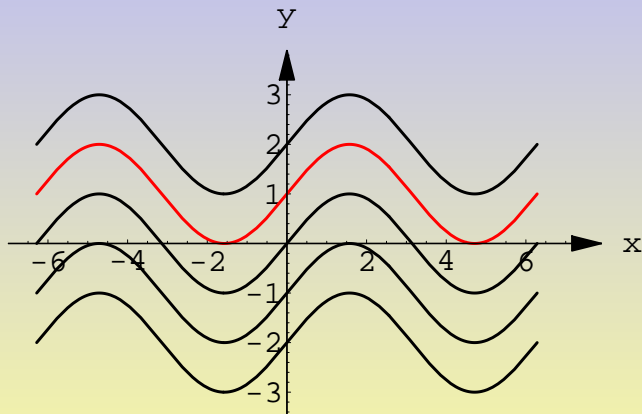
odnosno $yy' = -x$.

Primjer 95.

Riješite diferencijalnu jednačbu $y' = \cos x$.

Rješenje

Integriranjem dobivamo opće rješenje $y = \sin x + C$,
 $C \in \mathbb{R}$. Specijalno, tražimo li da je $y(0) = 1$, dobivamo
samo jedno rješenje $y = \sin x + 1$. Jasno je da zadana
diferencijalna jednačba nema singularnih rješenja.



Separacija varijabli

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Diferencijalna jednačina

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

je jednačina sa separiranim varijablama ako je

$$f(x, y) = f_1(x)f_2(y).$$

Tada je

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x)f_2(y),$$

odnosno

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x) dx.$$

Obične dif. jednačine
Osnovne definicije

Separacija varijabli

Homogene jednačine

Egzaktne jednačine

Eulerovi multiplikatori

Linearne jednačine

Bernoullijeva jednačina

Jednačine višeg reda



Integriranjem lijeve i desne strane po y , odnosno x ,
dobivamo opće rješenje

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x) dx.$$

Primjer 96.

Riješite diferencijalnu jednačbu $y' = 1 + y^2$.

Rješenje

Integriranjem lijeve i desne strane po y , odnosno x ,
dobivamo opće rješenje

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x) dx.$$

Primjer 96.

Riješite diferencijalnu jednačbu $y' = 1 + y^2$.

Rješenje

$$\frac{dy}{dx} = 1 + y^2$$

$$\frac{dy}{1 + y^2} = dx$$

Integriranjem dobivamo

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int dx$$

$$\arctg y = x + C$$

$$y = \operatorname{tg}(x + C), \quad C \in \mathbb{R}$$

Obratimo malo u ovom slučaju pažnju na domenu rješenja. Uzmimo da je $C = 0$. Tada je $y = \operatorname{tg} x$ rješenje početne diferencijalne jednačbe. Međutim, rješenje diferencijalne jednačbe je neka funkcija, a funkcija je zadana ako je zadana njezina domena, kodomena i pravilo pridruživanja. Nadalje, znamo da je domena funkcije tg

$$D(\operatorname{tg}) = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{2k+1}{2}\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Tako je, npr. funkcija

$$\phi_1 : \langle \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi_1(x) = \operatorname{tg} x$$

rješenje polazne diferencijalne jednačbe. Isto tako su funkcije

$$\phi_2 : \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi_2(x) = \operatorname{tg} x$$

i

$$\phi_3 : \langle \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \rangle \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi_3(x) = \operatorname{tg} x$$

rješenja polazne diferencijalne jednačbe.

Nikoje dvije od tih triju funkcija nisu međusobno jednake jer nemaju jednake domene.

Nadalje, funkcija

$$\phi : \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle \cup \langle \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \rangle \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi(x) = \operatorname{tg} x$$

nije rješenje polazne diferencijalne jednačbe zato jer njezina domena nije interval, nego unija dva disjunktne intervala, a u definiciji rješenja diferencijalne jednačbe tražimo da je domena interval.

Iz navedenog vidimo da je rasprava o domeni rješenja u neku ruku suvišna i "besmislena" jer jednom kada nađemo rješenje (bilo u eksplicitnom ili implicitnom obliku) za njegovu domenu uzimamo ono što nama u tom trenutku treba (ovisi o problemu koji proučavamo), imajući pritom na umu da domena mora biti neki interval. Nadalje, jasno je da ako uzmemo neki interval za domenu, tada je i svaki interval koji je podskup tog intervala također dobar za domenu.

U teoriji diferencijalnih jednačbi se proučavaju rješenja čije domene su maksimalni mogući intervali i takva rješenja se zovu **neproširiva rješenja**.

U našem konkretnom primjeru bi, npr. rješenje

$$\phi_1 : \left\langle \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi_1(x) = \operatorname{tg} x$$

bilo neproširivo rješenje, dok

$$\phi_2 : \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi_2(x) = \operatorname{tg} x$$

nije neproširivo rješenje zato jer je rješenje ϕ_1 proširenje rješenja ϕ_2 .

Od sada pa nadalje nećemo više ulaziti u tako detaljnu raspravu o domeni rješenja iz navedenih razloga.

Primjer 97.

Riješite diferencijalnu jednačbu $9yy' + 4x = 0$.

Rješenje

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Obične dif. jednačbe

Osnovne definicije

Separacija varijabli

Homogene jednačbe

Egzaktne jednačbe

Eulerovi multiplikatori

Linearne jednačbe

Bernoullijeva jednačba

Jednačbe višeg reda



Primjer 97.

Riješite diferencijalnu jednadžbu $9yy' + 4x = 0$.

Rješenje

$$9y \frac{dy}{dx} + 4x = 0$$

$$9y \, dy = -4x \, dx$$

$$\int 9y \, dy = \int -4x \, dx$$

$$\frac{9}{2}y^2 = -2x^2 + C$$

$$9y^2 + 4x^2 = 2C \Big/ \cdot \frac{1}{36}$$

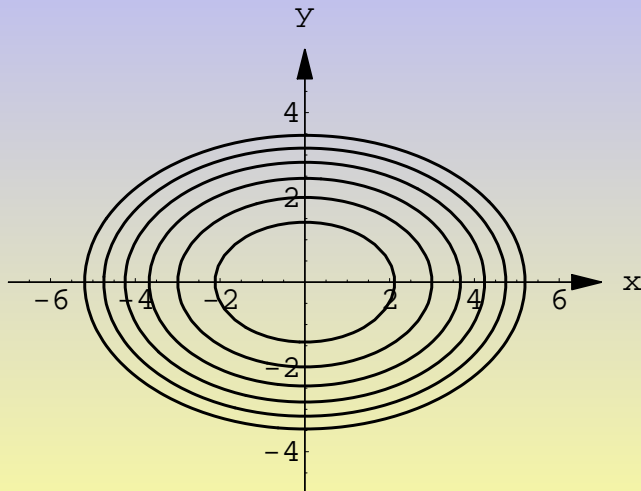
$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = \frac{C}{18}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Kada C prođe skupom \mathbb{R} , tada će i $C_1 = \frac{C}{18}$ proći skupom \mathbb{R} , pa možemo opet umjesto $\frac{C}{18}$ pisati samo C .
Ovakve transformacije konstanti ćemo i dalje koristiti bez da ćemo to posebno naglasiti kao sada ovdje.

Dakle, opće rješenje polazne jednačbe je

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Vidimo da je opće rješenje familija elipsi.



Primjer 98.

Riješite Cauchyjev problem

$$y' = -\frac{y}{x}, \quad y(1) = 1.$$

Rješenje

Obične dif. jednačbe

Osnovne definicije

Separacija varijabli

Homogene jednačbe

Egzaktne jednačbe

Eulerovi multiplikatori

Linearne jednačbe

Bernoullijeva jednačba

Jednačbe višeg reda

Primjer 98.

Riješite Cauchyjev problem

$$y' = -\frac{y}{x}, \quad y(1) = 1.$$

Rješenje

Primijetimo odmah da je $x \neq 0$. Stoga se domena svakog rješenja nalazi ili lijevo ili desno od nule.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

Ako je $y \neq 0$, dobivamo

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}.$$

Odavde integriranjem slijedi

$$\int \frac{dy}{y} = - \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln |y| = - \ln |x| + \ln C, \quad C > 0$$

$$\ln |y| + \ln |x| = \ln C$$

$$\ln (|x| \cdot |y|) = \ln C$$

$$|x| \cdot |y| = C$$

$$|y| = \frac{C}{|x|}, \quad C > 0$$

Kako je $x \neq 0$, onda je x konstantnog predznaka na domeni, pa je zbog glatkoće i y konstantnog predznaka.

Stoga je

$$y = \frac{C}{x}, \quad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

No, očito je $y = 0$ rješenje početne diferencijalne jednačbe pa je njezino opće rješenje

$$y = \frac{C}{x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Zbog početnog uvjeta $y(1) = 1$ slijedi da je $C = 1$.

Dakle, rješenje zadanog Cauchyjevog problema je $y = \frac{1}{x}$.

Diferencijalnu jednačbu oblika

$$y' = f(ax + by + c), \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad b \neq 0$$

svodimo na jednačbu sa separiranim varijablama
pomoću supstitucije

$$z = ax + by + c, \quad z = z(x).$$

Tada je

$$\frac{dz}{dx} = a + b \cdot \frac{dy}{dx}$$

odnosno

$$z' = a + by'$$

i konačno

$$z' = a + bf(z).$$

Primjer 99.

Riješite diferencijalnu jednačinu $y' = (x + y)^2$.

Rješenje

Obične dif. jednačine

Osnovne definicije

Separacija varijabli

Homogene jednačine

Egzaktne jednačine

Eulerovi multiplikatori

Linearne jednačine

Bernoullijeva jednačina

Jednačine višeg reda

Primjer 99.

Riješite diferencijalnu jednačbu $y' = (x + y)^2$.

Rješenje

Uvodimo supstituciju

$$z = x + y.$$

Deriviranjem po x dobivamo

$$z' = 1 + y'$$

odnosno

$$z' = 1 + z^2.$$

Ovo je diferencijalna jednačba sa separiranim varijablama, pa imamo

$$\frac{dz}{dx} = 1 + z^2$$

$$\frac{dz}{1 + z^2} = dx$$

$$\int \frac{dz}{1 + z^2} = \int dx$$

$$\operatorname{arctg} z = x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$z = \operatorname{tg}(x + C)$$

$$x + y = \operatorname{tg}(x + C)$$

$$y = \operatorname{tg}(x + C) - x, \quad C \in \mathbb{R}$$

Primjer 100.

Riješite diferencijalnu jednadžbu $y' = \sqrt{4x + 2y - 8}$.

Rješenje

Obične dif. jednadžbe

Osnovne definicije

Separacija varijabli

Homogene jednadžbe

Egzaktne jednadžbe

Eulerovi multiplikatori

Linearne jednadžbe

Bernoullijeva jednadžba

Jednadžbe višeg reda

Primjer 100.

Riješite diferencijalnu jednačbu $y' = \sqrt{4x + 2y - 8}$.

Rješenje

Uvodimo supstituciju

$$z = 4x + 2y - 8.$$

Deriviranjem po x dobivamo

$$z' = 4 + 2y'$$

odnosno

$$z' = 4 + 2\sqrt{z}.$$

Ovo je diferencijalna jednačba sa separiranim varijablama, pa imamo

$$\frac{dz}{dx} = 4 + 2\sqrt{z}$$

$$\frac{dz}{4 + 2\sqrt{z}} = dx$$

$$\int \frac{dz}{4 + 2\sqrt{z}} = \int dx$$

Kako je

$$\begin{aligned} \int \frac{dz}{4 + 2\sqrt{z}} &= \left[\begin{array}{l} z = t^2 \\ dz = 2t dt \end{array} \right] = \int \frac{2t}{4 + 2t} dt = \\ &= \int \frac{(2t + 4) - 4}{4 + 2t} dt = t - 4 \int \frac{dt}{2t + 4} = \\ &= t - 2 \ln |2t + 4| = \sqrt{z} - 2 \ln |2\sqrt{z} + 4|, \end{aligned}$$

dalje dobivamo

$$\sqrt{z} - 2 \ln |2\sqrt{z} + 4| = x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\sqrt{4x + 2y - 8} - 2 \ln |2\sqrt{4x + 2y - 8} + 4| = x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Primjer 101.

Na dan kada se rodio želeći mu osigurati sigurnu budućnost, brižni roditelji su svome Perici u Zagrebačkoj banci otvorili devizni račun na kojeg su položili 10 000 € i oročili na 21 godinu. Ako se u međuvremenu na račun ne položi nikakav dodatni iznos, a godišnja kamatna stopa je 5 % i ukamaćivanje je kontinuirano, kolikom svotom novaca Perica raspolaže na svoj 21. rođendan?

Rješenje

$t \rightarrow$ vrijeme u godinama

$N(t) \rightarrow$ količina novaca na računu u trenutku t

$$N(t + \Delta t) = N(t) + \frac{5}{100} N(t) \Delta t$$

$$\frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} = \frac{1}{20} N(t) \quad / \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0}$$

$$N' = \frac{1}{20} N \quad (*)$$

Dakle, treba riješiti diferencijalnu jednačbu (*) uz početni uvjet $N(0) = 10\,000$. Nadalje, iz prirode problema je $N(t) > 0$ i $t \geq 0$. Stoga iz (*) separacijom dobivamo

$$\frac{dN}{dt} = \frac{1}{20} N$$

$$\frac{dN}{N} = \frac{1}{20} dt$$

$$\int \frac{dN}{N} = \int \frac{1}{20} dt$$

$$\ln N = \frac{1}{20}t + \ln C, \quad C > 0$$

$$\ln N - \ln C = \frac{t}{20}$$

$$\ln \frac{N}{C} = \frac{t}{20}$$

$$N(t) = Ce^{\frac{t}{20}}, \quad C > 0$$

Iz početnog uvjeta $N(0) = 10\,000$ dobivamo

$$Ce^0 = 10\,000, \quad \text{odnosno} \quad C = 10\,000.$$

Dakle,

$$N(t) = 10\,000 e^{\frac{t}{20}},$$

pa je

$$N(21) = 10\,000 e^{\frac{21}{20}} \approx 28\,577 \text{ €}$$

Na svoj 21. rođendan Perica raspolaže sa 28 577 €.

Primjer 102.

Brzina raspadanja radija proporcionalna je prisutnoj količini radija. Poznato je da nakon 1 600 godina ostane polovica prvobitne količine. Odredite koliki se postotak radija raspadne nakon 100 godina.

Rješenje

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Obične dif. jednačbe
Osnovne definicije

Separacija varijabli

Homogene jednačbe

Egzaktne jednačbe

Eulerovi multiplikatori

Linearne jednačbe

Bernoullijeva jednačba

Jednačbe višeg reda



Primjer 102.

Brzina raspadanja radija proporcionalna je prisutnoj količini radija. Poznato je da nakon 1600 godina ostane polovica prvobitne količine. Odredite koliki se postotak radija raspadne nakon 100 godina.

Rješenje

$t \rightarrow$ vrijeme u godinama

$Q(t) \rightarrow$ količina radija u trenutku t

Iz uvjeta zadatka imamo

$$\frac{dQ}{dt} = k \cdot Q$$

$$Q(1600) = \frac{1}{2}Q(0)$$

gdje je $Q \geq 0$ i $k < 0$ konstanta zbog $\frac{dQ}{dt} < 0$.

Separacijom varijabli dobivamo

$$\frac{dQ}{Q} = k dt$$

$$\int \frac{dQ}{Q} = \int k dt$$

$$\ln Q = kt + \ln C, \quad C > 0$$

$$Q(t) = Ce^{kt}, \quad k < 0, \quad C > 0$$

Iz početnog uvjeta dobivamo

$$\frac{1}{2} = \frac{Q(1600)}{Q(0)} = \frac{Ce^{1600k}}{Ce^{0 \cdot k}} = \left(e^{100k}\right)^{16}$$

iz čega slijedi da je postotak raspadnutog radija nakon
100 godina

$$\begin{aligned} p &= \frac{Q(0) - Q(100)}{Q(0)} \cdot 100 \% = \left(1 - \frac{Q(100)}{Q(0)}\right) \cdot 100 \% = \\ &= \left(1 - \frac{Ce^{100k}}{Ce^{k \cdot 0}}\right) \cdot 100 \% = \left(1 - \frac{1}{\sqrt[16]{2}}\right) \cdot 100 \% = 4.24 \% \end{aligned}$$

Nakon 100 godina se raspadne 4.24 % radija.

Homogene diferencijalne jednačbe

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Homogena diferencijalna jednačba prvog reda je
jednačba oblika

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Nju svodimo na jednačbu sa separiranim varijablama
pomoću supstitucije

$$u = \frac{y}{x}, \quad u = u(x),$$

odnosno

$$y = ux.$$

Deriviranjem po x dobivamo

$$y' = u'x + u$$

Obične dif. jednačbe
Osnovne definicije
Separacija varijabli
Homogene jednačbe
Egzaktne jednačbe
Eulerovi multiplikatori
Linearne jednačbe
Bernoullijeva jednačba
Jednačbe višeg reda



odnosno

$$u'x + u = f(u),$$

koju dalje rješavamo separacijom varijabli.

$$\frac{du}{dx}x + u = f(u)$$

$$\frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{du}{f(u) - u} = \ln|x| + C$$

Primjer 103.

Riješite diferencijalnu jednačbu $2xyy' = y^2 - x^2$.

Rješenje

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Obične dif. jednačbe

Osnovne definicije

Separacija varijabli

Homogene jednačbe

Egzaktne jednačbe

Eulerovi multiplikatori

Linearne jednačbe

Bernoullijeva jednačba

Jednačbe višeg reda



Primjer 103.

Riješite diferencijalnu jednadžbu $2xyy' = y^2 - x^2$.

Rješenje

Uočimo prvo da je $x \neq 0$ jer inače ne bismo imali diferencijalnu jednadžbu, što znači da je domena rješenja lijevo ili desno od nule. Nadalje, vidimo da $y = 0$ (nul-funkcija) nije rješenje zadane jednadžbe. Stoga je početna jednadžba ekvivalentna s jednadžbom

$$y' = \frac{1}{2} \left(\frac{y}{x} - \frac{x}{y} \right).$$

Uvodimo supstituciju

$$u = \frac{y}{x}, \quad \text{tj.} \quad y = ux.$$

Deriviranjem po x dobivamo

$$y' = u'x + u,$$

odnosno

$$u'x + u = \frac{1}{2} \left(u - \frac{1}{u} \right)$$

$$\frac{du}{dx}x + u = \frac{u^2 - 1}{2u}$$

$$x \frac{du}{dx} = \frac{-u^2 - 1}{2u}$$

$$\frac{2u}{u^2 + 1} du = -\frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{2u}{u^2 + 1} du = - \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln(u^2 + 1) = -\ln|x| + \ln C, \quad C > 0$$

$$u^2 + 1 = \frac{C}{|x|}$$

Kako je x konstantnog predznaka na domeni, slijedi da je

$$u^2 + 1 = \frac{C}{x}, \quad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

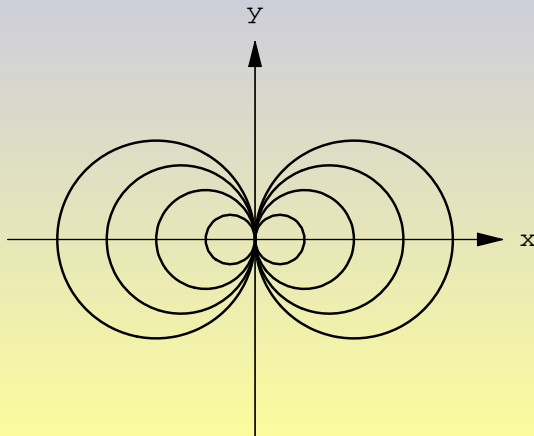
Vratimo natrag početnu supstituciju i dobivamo

$$\frac{y^2}{x^2} + 1 = \frac{C}{x}$$

$$x^2 + y^2 = Cx, \quad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\left(x - \frac{C}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{C^2}{4}$$

Rješenje je familija kružnica sa centrima na x -osi koje prolaze kroz ishodište.



Primjer 104.

Riješite diferencijalnu jednačbu $xy' - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x}$.

Rješenje

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Obične dif. jednačbe

Osnovne definicije

Separacija varijabli

Homogene jednačbe

Egzaktne jednačbe

Eulerovi multiplikatori

Linearne jednačbe

Bernoullijeva jednačba

Jednačbe višeg reda



Primjer 104.

Riješite diferencijalnu jednačbu $xy' - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x}$.

Rješenje

Dijeljenjem sa x dobivamo

$$y' = \frac{y}{x} + \operatorname{tg} \frac{y}{x}.$$

Ovo je homogena jednačba pa uvodimo supstituciju

$$u = \frac{y}{x}, \quad \text{odnosno} \quad y = ux.$$

Deriviranjem dobivamo

$$y' = u'x + u$$

$$u + \operatorname{tg} u = u'x + u$$

$$u'x = \operatorname{tg} u$$

Razlikujemo dva slučaja:

- $\operatorname{tg} u \neq 0$

Radimo separaciju varijabli

$$\frac{du}{dx} x = \operatorname{tg} u$$

$$\frac{du}{\operatorname{tg} u} = \frac{dx}{x}$$

Kako je

$$\begin{aligned} \int \frac{du}{\operatorname{tg} u} &= \int \frac{\cos u}{\sin u} du = \left[\begin{array}{l} \sin u = t \\ \cos u du = dt \end{array} \right] = \\ &= \int \frac{dt}{t} = \ln |t| = \ln |\sin u|, \end{aligned}$$

dobivamo da je

$$\int \frac{du}{\operatorname{tg} u} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln |\sin u| = \ln |x| + \ln C, \quad C > 0$$

$$|\sin u| = C|x|$$

Kako je x konstantnog predznaka na domeni, slijedi da je

$$\sin u = Cx, \quad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Vratimo li supstituciju, dobivamo

$$\sin \frac{y}{x} = Cx, \quad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

- $\operatorname{tg} u = 0$

Tada je $u = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, pa uvrštavanjem u jednačbu $u'x = \operatorname{tg} u$ vidimo da je i to rješenje. No, u tom slučaju je $\sin u = 0$, odnosno $\sin \frac{y}{x} = 0$.

Stoga je konačno rješenje

$$\sin \frac{y}{x} = Cx, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Diferencijalnu jednačbu oblika

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y}{a_2x + b_2y}\right)$$

možemo napisati u obliku

$$y' = f\left(\frac{a_1 + b_1\frac{y}{x}}{a_2 + b_2\frac{y}{x}}\right)$$

koju onda dalje rješavamo pomoću supstitucije

$$u = \frac{y}{x}.$$

Primjer 105.

Riješite diferencijalnu jednačbu $y' = \frac{x+y}{x-y}$.

Rješenje

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Obične dif. jednačbe

Osnovne definicije

Separacija varijabli

Homogene jednačbe

Egzaktne jednačbe

Eulerovi multiplikatori

Linearne jednačbe

Bernoullijeva jednačba

Jednačbe višeg reda

Primjer 105.

Riješite diferencijalnu jednačbu $y' = \frac{x+y}{x-y}$.

Rješenje

Jednačbu možemo napisati u obliku

$$y' = \frac{1 + \frac{y}{x}}{1 - \frac{y}{x}}.$$

Uvodimo supstituciju $u = \frac{y}{x}$, iz čega slijedi

$$y' = u'x + u$$

$$\frac{1 + u}{1 - u} = u'x + u$$

$$\frac{du}{dx}x = \frac{u^2 + 1}{1 - u}$$

$$\frac{1-u}{u^2+1} du = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{1-u}{u^2+1} du = \int \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{du}{u^2+1} - \int \frac{u}{u^2+1} du = \int \frac{dx}{x}$$

$$\arctg u - \frac{1}{2} \ln(u^2+1) = \ln|x| + \ln C, \quad C > 0$$

$$\ln \frac{e^{\arctg u}}{\sqrt{u^2+1}} = \ln(C|x|)$$

$$e^{\arctg u} = C|x|\sqrt{u^2+1}, \quad C > 0$$

$$e^{\arctg u} = Cx\sqrt{u^2+1}, \quad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Vratimo natrag supstituciju i dobivamo konačno rješenje

$$e^{\arctg \frac{y}{x}} = Cx \sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1}, \quad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Diferencijalna jednačba oblika

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

se svodi na jednačbu

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y}{a_2x + b_2y}\right).$$

Razlikujemo dva slučaja:

$$\bullet \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

Tada je $a_2 = ka_1$ i $b_2 = kb_1$ za neko $k \in \mathbb{R}$ pa imamo diferencijalnu jednačbu

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{k(a_1x + b_1y) + c_2}\right)$$

koju supstitucijom $u = a_1x + b_1y$ svodimo na jednačbu sa separiranim varijablama. Naime, deriviranjem po x dobivamo

$$u' = a_1 + b_1y'$$

odnosno

$$\frac{du}{dx} = a_1 + b_1f\left(\frac{u + c_1}{ku + c_2}\right).$$

$$\bullet \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Uvodimo nove varijable u i v

$$x = u + \alpha, \quad y = v + \beta \quad (\heartsuit)$$

gdje su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ za sada neodređeni realni brojevi.

Kako je $y = y(x)$, u novim varijablama je $v = v(u)$.

Iz (\heartsuit) slijedi

$$u = x - \alpha, \quad v = y - \beta$$

pa je

$$\frac{dv}{du} = \underbrace{\frac{dv}{dy}}_{=1} \cdot \underbrace{\frac{dy}{dx}}_{=y'} \cdot \underbrace{\frac{dx}{du}}_{=1}$$

Dakle, dobili smo da je

$$\frac{dv}{du} = y',$$

odnosno

$$\frac{dv}{du} = f \left(\frac{a_1(u + \alpha) + b_1(v + \beta) + c_1}{a_2(u + \alpha) + b_2(v + \beta) + c_2} \right)$$

$$\frac{dv}{du} = f \left(\frac{a_1u + b_1v + (a_1\alpha + b_1\beta + c_1)}{a_2u + b_2v + (a_2\alpha + b_2\beta + c_2)} \right)$$

Želimo da je

$$a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0$$

$$a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0$$

Kako je $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, postoje jedinstveni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ koji su rješenje tog sustava.

Uz tako odabrane α i β dobivamo jednačbu

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{a_1u + b_1v}{a_2u + b_2v}\right)$$

koju znamo riješiti.

Primjer 106.

Riješite diferencijalnu jednadžbu $y' = \frac{x+y+1}{2x+2y-1}$.

Rješenje

Obične dif. jednadžbe

Osnovne definicije

Separacija varijabli

Homogene jednadžbe

Egzaktne jednadžbe

Eulerovi multiplikatori

Linearne jednadžbe

Bernoullijeva jednadžba

Jednadžbe višeg reda



Primjer 106.

Riješite diferencijalnu jednačbu $y' = \frac{x+y+1}{2x+2y-1}$.

Rješenje

Jednačbu možemo napisati u obliku

$$y' = \frac{x + y + 1}{2(x + y) - 1}.$$

Uvodimo supstituciju $u = x + y$. Deriviranjem po x dobivamo

$$u' = 1 + y',$$

odnosno

$$u' = 1 + \frac{u + 1}{2u - 1}.$$

Sređivanjem dobivamo

$$\frac{du}{dx} = \frac{3u}{2u-1}.$$

Za $u \neq 0$ radimo separaciju varijabli i dobivamo

$$\frac{2u-1}{3u} du = dx$$

$$\int \frac{2u-1}{3u} du = \int dx$$

$$\frac{2}{3}u - \frac{1}{3} \ln |u| = x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\frac{2}{3}(x+y) - \frac{1}{3} \ln |x+y| = x + C$$

$$\frac{1}{3} \ln |x+y| = \frac{2y-x}{3} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Nadalje, lako se provjeri da je $u = 0$ također rješenje, odnosno $x + y = 0$ je rješenje početne jednačbe kojeg ne možemo dobiti iz općeg rješenja. To je onda **singularno rješenje** početne jednačbe.

Dakle, dobili smo da polazna jednačba ima

opće rješenje: $\frac{1}{3} \ln |x + y| = \frac{2y-x}{3} + C, C \in \mathbb{R}$

i jedno

singularno rješenje: $y = -x$

Primjer 107.

Riješite diferencijalnu jednačinu $y' = -\frac{2x+3y+1}{3x+4y+1}$.

Rješenje

Obične dif. jednačine
Osnovne definicije
Separacija varijabli
Homogene jednačine
Egzaktne jednačine
Eulerovi multiplikatori
Linearne jednačine
Bernoullijeva jednačina
Jednačine višeg reda

Primjer 107.

Riješite diferencijalnu jednačbu $y' = -\frac{2x+3y+1}{3x+4y+1}$.

Rješenje

Uočimo da je $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$.

Stoga uvodimo nove varijable u i v na sljedeći način

$$x = u + \alpha, \quad y = v + \beta, \quad (\heartsuit)$$

gdje su α i β za sada neodređeni realni brojevi. Uvrstimo li (\heartsuit) u početnu jednačbu, nakon sređivanja dobivamo

$$y' = -\frac{2u + 3v + (2\alpha + 3\beta + 1)}{3u + 4v + (3\alpha + 4\beta + 1)}. \quad (*)$$

Biramo α i β takve da je

$$2\alpha + 3\beta + 1 = 0$$

$$3\alpha + 4\beta + 1 = 0$$

Rješavanjem tog sustava dobivamo $\alpha = 1$, $\beta = -1$.

Uvrštavanjem u (*) dobivamo

$$y' = -\frac{2u + 3v}{3u + 4v},$$

a ranije smo dokazali da je $\frac{dv}{du} = y'$, pa je

$$\frac{dv}{du} = -\frac{2u + 3v}{3u + 4v},$$

odnosno

$$\frac{dv}{du} = -\frac{2 + 3\frac{v}{u}}{3 + 4\frac{v}{u}}.$$

Uvodimo još jednu supstituciju

$$z = \frac{v}{u}, \quad z = z(u).$$

Deriviranjem po u dobivamo

$$v' = z'u + z,$$

odnosno

$$-\frac{2+3z}{3+4z} = z'u + z$$

$$\frac{dz}{du}u = -\frac{4z^2 + 6z + 2}{4z + 3}$$

Za $4z^2 + 6z + 2 \neq 0$ radimo separaciju varijabli i
dobivamo

$$\frac{4z + 3}{4z^2 + 6z + 2} dz = -\frac{du}{u}$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{4z + 3}{2z^2 + 3z + 1} dz = - \int \frac{du}{u}$$

$$\frac{1}{2} \ln |2z^2 + 3z + 1| = -\ln |u| + \ln C, \quad C > 0$$

$$\ln |2z^2 + 3z + 1| = -2 \ln |u| + \ln C$$

$$|2z^2 + 3z + 1| = \frac{C}{u^2}, \quad C > 0$$

Kako smo separaciju varijabli radili uz pretpostavku da je $4z^2 + 6z + 2 \neq 0$, tj. $2z^2 + 3z + 1 \neq 0$, tada je zbog neprekidnosti $2z^2 + 3z + 1$ konstantnog predznaka na domeni, pa je dalje

$$2z^2 + 3z + 1 = \frac{C}{u^2}, \quad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\left(2 \left(\frac{v}{u}\right)^2 + 3\frac{v}{u} + 1\right) u^2 = C$$

$$u^2 + 3uv + 2v^2 = C$$

Nadalje, zbog $\alpha = 1$ i $\beta = -1$ iz (♥) slijedi da je

$$u = x - 1, \quad v = y + 1$$

pa dobivamo

$$x^2 + 3xy + 2y^2 + x + y = C, \quad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Preostaje još pogledati slučaj kada je $2z^2 + 3z + 1 = 0$.

U tom slučaju je $z = -\frac{1}{2}$ ili $z = -1$, pa je očito da je to rješenje jednačbe

$$\frac{dz}{du}u = -\frac{4z^2 + 6z + 2}{4z + 3},$$

koje dobijemo za $C = 0$. Dakle, opće rješenje početne jednačbe je

$$x^2 + 3xy + 2y^2 + x + y = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Egzaktne diferencijalne jednačbe

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Kažemo da je diferencijalna jednačba

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0 \quad (\heartsuit)$$

egzaktna ako je

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy$$

totalni diferencijal neke funkcije $u(x, y)$, tj.

$$du = M(x, y) dx + N(x, y) dy.$$

Iz (\heartsuit) slijedi da je $du = 0$, pa je opće rješenje od (\heartsuit) oblika

$$u(x, y) = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Obične dif. jednačbe
Osnovne definicije
Separacija varijabli
Homogene jednačbe

Egzaktne jednačbe

Eulerovi multiplikatori
Linearne jednačbe
Bernoullijeva jednačba
Jednačbe višeg reda



Kako je

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy,$$

iz jedinstvenosti diferencijala slijedi da nepoznatu funkciju u odredimo iz jednačbi

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y).$$

Nužan i dovoljan uvjet da bi (♡) bila egzaktna jednačba je da vrijedi

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x},$$

uz pretpostavku da su funkcije M i N definirane na otvorenom i povezanom skupu u \mathbb{R}^2 koji nema u svojem interioru "rupa".

Dokažimo nužnost. Zaista, ako je (\heartsuit) egzaktna, tada postoji funkcija $u = u(x, y)$ takva da je

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y).$$

Tada je prema Schwarzovom teoremu

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Dovoljnost slijedi iz Poincaréove leme u čije detalje ovdje nećemo ulaziti.

Primjer 108.

Riješite diferencijalnu jednačinu

$$(x^3 + 3xy^2) dx + (3x^2y + y^3) dy = 0.$$

Rješenje

Obične dif. jednačine

Osnovne definicije

Separacija varijabli

Homogene jednačine

Egzaktne jednačine

Eulerovi multiplikatori

Linearne jednačine

Bernoullijeva jednačina

Jednačine višeg reda

Primjer 108.

Riješite diferencijalnu jednačbu

$$(x^3 + 3xy^2) dx + (3x^2y + y^3) dy = 0.$$

Rješenje

$$M(x, y) = x^3 + 3xy^2, \quad N(x, y) = 3x^2y + y^3$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 6xy, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 6xy$$

Dakle, $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ pa je zadana jednačba egzaktna.

Stoga postoji funkcija $u(x, y)$ takva da je

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y),$$

odnosno u ovom slučaju

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x^3 + 3xy^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 3x^2y + y^3.$$

Sada imamo

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x^3 + 3xy^2 \Big/ \int dx$$

$$u(x, y) = \int (x^3 + 3xy^2) dx$$

$$u(x, y) = \frac{x^4}{4} + \frac{3}{2}x^2y^2 + \varphi(y) \Big/ \frac{\partial}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 3x^2y + \varphi'(y)$$

$$3x^2y + y^3 = 3x^2y + \varphi'(y)$$

$$\varphi'(y) = y^3$$

$$\varphi(y) = \frac{y^4}{4} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Dakle,

$$u(x, y) = \frac{x^4}{4} + \frac{3}{2}x^2y^2 + \frac{y^4}{4} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Stoga je opće rješenje zadane diferencijalne jednačbe

$$\frac{x^4}{4} + \frac{3}{2}x^2y^2 + \frac{y^4}{4} = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Primjer 109.

Riješite diferencijalnu jednačbu

$$(1 + y^2 \sin 2x) dx - 2y \cos^2 x dy = 0.$$

Rješenje

Obične dif. jednačbe

Osnovne definicije

Separacija varijabli

Homogene jednačbe

Egzaktne jednačbe

Eulerovi multiplikatori

Linearne jednačbe

Bernoullijeva jednačba

Jednačbe višeg reda

Primjer 109.

Riješite diferencijalnu jednačbu

$$(1 + y^2 \sin 2x) dx - 2y \cos^2 x dy = 0.$$

Rješenje

$$M(x, y) = 1 + y^2 \sin 2x, \quad N(x, y) = -2y \cos^2 x$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y \sin 2x, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -4y \cos x \cdot (-\sin x) = 2y \sin 2x$$

Dakle, $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ pa je zadana jednačba egzaktna.

Stoga postoji funkcija $u(x, y)$ takva da je

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y),$$

odnosno u ovom slučaju

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 + y^2 \sin 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y \cos^2 x.$$

Sada imamo

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 + y^2 \sin 2x \quad \Bigg/ \quad \int dx$$

$$u(x, y) = \int (1 + y^2 \sin 2x) dx$$

$$u(x, y) = x - \frac{y^2}{2} \cos 2x + \varphi(y) \quad \Bigg/ \quad \frac{\partial}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -y \cos 2x + \varphi'(y)$$

$$-2y \cos^2 x = -y \cos 2x + \varphi'(y)$$

$$-2y \cos^2 x = -y(2 \cos^2 x - 1) + \varphi'(y)$$

$$\varphi'(y) = -y$$

$$\varphi(y) = -\frac{y^2}{2} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Dakle,

$$u(x, y) = x - \frac{y^2}{2} \cos 2x - \frac{y^2}{2} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Stoga je opće rješenje zadane diferencijalne jednačbe

$$x - \frac{y^2}{2} \cos 2x - \frac{y^2}{2} = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Eulerovi multiplikatori

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

U većini situacija diferencijalna jednačba

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0 \quad (\heartsuit)$$

nije egzaktna, tj.

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Ideja je da (\heartsuit) pomnožimo s $\mu = \mu(x, y)$ tako da jednačba postane egzaktna. Dakle, tražimo funkciju $\mu = \mu(x, y) \neq 0$, takvu da jednačba

$$\mu(x, y)M(x, y) dx + \mu(x, y)N(x, y) dy = 0$$

bude egzaktna.

Obične dif. jednačbe

Osnovne definicije

Separacija varijabli

Homogene jednačbe

Egzaktne jednačbe

Eulerovi multiplikatori

Linearne jednačbe

Bernoullijeva jednačba

Jednačbe višeg reda



Tada je

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}, \quad (\heartsuit\heartsuit)$$

pa postoji funkcija $F = F(x, y)$ takva da je

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \mu M, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \mu N.$$

Iz $(\heartsuit\heartsuit)$ slijedi

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} \cdot M + \mu \cdot \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x} \cdot N + \mu \cdot \frac{\partial N}{\partial x},$$

odnosno

$$\frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial \mu}{\partial y} \cdot M - \frac{\partial \mu}{\partial x} \cdot N \right) = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}. \quad (\heartsuit\heartsuit\heartsuit)$$

(♥♥♥) je parcijalna diferencijalna jednačba koja je kompliciranija od obične diferencijalne jednačbe (♥). Međutim, mi ćemo tražiti μ kao funkciju jedne varijable, tj. $\mu = \mu(u)$, gdje je $u = u(x, y)$. Tada je

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{d\mu}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{d\mu}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial y}$$

Uvrstimo u (♥♥♥) i dobivamo

$$\frac{1}{\mu} \cdot \frac{d\mu}{du} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \cdot M - \frac{\partial u}{\partial x} \cdot N \right) = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}.$$

Ako vrijedi da je

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{\frac{\partial u}{\partial y} \cdot M - \frac{\partial u}{\partial x} \cdot N} = f(u)$$

tj., izraz na lijevoj strani ovisi samo o u , tada dobivamo diferencijalnu jednačbu

$$\frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{du} = f(u)$$

što je jednačba sa separiranim varijablama iz koje dobijemo **Eulerov multiplikator** $\mu = \mu(u)$.

Kod rješanja zadataka je pitanje u kojem obliku tražiti Eulerov multiplikator $\mu = \mu(u)$, tj. što uzeti za $u = u(x, y)$. Navest ćemo nekoliko primjera za $u = u(x, y)$ koji su najčešći u zadacima.

- $u = x$
- $u = y$
- $u = x + y$
- $u = x - y$
- $u = xy$
- $u = \frac{x}{y}$

Primjer 110.

Riješite diferencijalnu jednadžbu

$$2 \sin(y^2) dx + xy \cos(y^2) dy = 0.$$

Rješenje

Obične dif. jednadžbe

Osnovne definicije

Separacija varijabli

Homogene jednadžbe

Egzaktne jednadžbe

Eulerovi multiplikatori

Linearne jednadžbe

Bernoullijeva jednadžba

Jednadžbe višeg reda

Primjer 110.

Riješite diferencijalnu jednačbu

$$2 \sin(y^2) dx + xy \cos(y^2) dy = 0.$$

Rješenje

$$M(x, y) = 2 \sin(y^2), \quad N(x, y) = xy \cos(y^2)$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 4y \cos(y^2), \quad \frac{\partial N}{\partial x} = y \cos(y^2)$$

Dakle, jednačba nije egzaktna, pa tražimo multiplikator $\mu = \mu(y)$ s kojim treba pomnožiti zadanu jednačbu da bi ona postala egzaktna.

Multiplikator $\mu = \mu(u)$ ćemo dobiti iz jednačbe

$$\frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{du} = f(u),$$

gdje je

$$f(u) = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{\frac{\partial u}{\partial y} \cdot M - \frac{\partial u}{\partial x} \cdot N},$$

odnosno u ovom slučaju

$$f(u) = \frac{-3y \cos(y^2)}{2 \sin(y^2) \frac{\partial u}{\partial y} - xy \cos(y^2) \frac{\partial u}{\partial x}}.$$

Sada treba odabrati takav u da desna strana ovisi samo o

u . Uzmemo li $u = x$, tada je $\frac{\partial u}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$, pa je

$$f(u) = \frac{-3y \cos(y^2)}{2 \sin(y^2) \cdot 0 - xy \cos(y^2) \cdot 1},$$

odnosno

$$f(u) = \frac{3}{x} = \frac{3}{u}.$$

Sada rješavamo jednačbu

$$\frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{du} = f(u),$$

odnosno

$$\frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{du} = \frac{3}{u}$$

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{3}{u} du \Big/ \int$$

$$\int \frac{d\mu}{\mu} = \int \frac{3}{u} du$$

$$\ln |\mu| = 3 \ln |u| + \ln C, \quad C > 0$$

$$\mu = Cu^3, \quad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Uzmimo npr. $C = 1$ pa je $\mu = u^3$, odnosno $\mu = x^3$, jer je $u = x$. Dakle početnu jednačbu treba pomnožiti sa x^3 da bi ona postala egzaktna.

$$2 \sin(y^2) dx + xy \cos(y^2) dy = 0 \Big/ \cdot x^3$$

$$2x^3 \sin(y^2) dx + x^4 y \cos(y^2) dy = 0$$

$$M(x, y) = 2x^3 \sin(y^2), \quad N(x, y) = x^4 y \cos(y^2)$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 4x^3 y \cos(y^2) = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Dakle, sada je jednačba zaista egzaktna, pa postoji funkcija $F(x, y)$ takva da je

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x^3 \sin(y^2), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = x^4 y \cos(y^2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x^3 \sin(y^2) \Bigg/ \int dx$$

$$F(x, y) = \frac{1}{2} x^4 \sin(y^2) + \varphi(y) \Bigg/ \frac{\partial}{\partial y}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x^4 y \cos(y^2) + \varphi'(y)$$

$$x^4 y \cos(y^2) = x^4 y \cos(y^2) + \varphi'(y)$$

$$\varphi'(y) = 0$$

$$\varphi(y) = C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Stoga je

$$F(x, y) = \frac{1}{2} x^4 \sin(y^2) + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

pa je opće rješenje

$$\frac{1}{2} x^4 \sin(y^2) = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Primjer 111.

Riješite diferencijalnu jednažbu

$$(y + xy^2) dx + (x - x^2y) dy = 0.$$

Rješenje

Obične dif. jednažbe
Osnovne definicije
Separacija varijabli
Homogene jednažbe
Egzaktne jednažbe
Eulerovi multiplikatori
Linearne jednažbe
Bernoullijeva jednažba
Jednažbe višeg reda

Primjer 111.

Riješite diferencijalnu jednadžbu

$$(y + xy^2) dx + (x - x^2y) dy = 0.$$

Rješenje

$$M(x, y) = y + xy^2, \quad N(x, y) = x - x^2y$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 + 2xy, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 1 - 2xy$$

$$f(u) = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{\frac{\partial u}{\partial y} \cdot M - \frac{\partial u}{\partial x} \cdot N}$$

$$f(u) = \frac{-4xy}{(y + xy^2) \frac{\partial u}{\partial y} - (x - x^2y) \frac{\partial u}{\partial x}}$$

Obične dif. jednadžbe
Osnovne definicije
Separacija varijabli
Homogene jednadžbe
Egzaktne jednadžbe
Eulerovi multiplikatori
Linearne jednadžbe
Bernoullijeva jednadžba
Jednadžbe višeg reda

Uzmemo li $u = xy$, tada je $\frac{\partial u}{\partial x} = y$, $\frac{\partial u}{\partial y} = x$, pa je

$$f(u) = \frac{-4xy}{(y + xy^2)x - (x - x^2y)y},$$

odnosno nakon sređivanja

$$f(u) = \frac{-2}{xy} = \frac{-2}{u}.$$

Sada rješavamo jednačbu

$$\frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{du} = f(u),$$

odnosno

$$\frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{du} = \frac{-2}{u}$$

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{-2}{u} du \quad \Bigg/ \quad \int$$

$$\int \frac{d\mu}{\mu} = \int \frac{-2}{u} du$$

$$\ln |\mu| = -2 \ln |u| + \ln C, \quad C > 0$$

$$\ln |\mu| = \ln (C|u|^{-2})$$

$$|\mu| = \frac{C}{|u|^2}, \quad C > 0$$

$$\mu = \frac{C}{u^2}, \quad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Uzmimo, npr. $C = 1$. Tada je $\mu = \frac{1}{u^2}$, odnosno $\mu = \frac{1}{x^2y^2}$ jer je $u = xy$. Dakle, početnu jednačbu treba pomnožiti sa $\frac{1}{x^2y^2}$ da bi ona postala egzaktna.

$$(y + xy^2) dx + (x - x^2y) dy = 0 \quad \Bigg/ \cdot \frac{1}{x^2y^2}$$

$$\frac{1}{x^2y^2} (y + xy^2) dx + \frac{1}{x^2y^2} (x - x^2y) dy = 0$$

$$\left(\frac{1}{x^2y} + \frac{1}{x} \right) dx + \left(\frac{1}{xy^2} - \frac{1}{y} \right) dy = 0$$

$$M(x, y) = \frac{1}{x^2y} + \frac{1}{x}, \quad N(x, y) = \frac{1}{xy^2} - \frac{1}{y}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{1}{x^2 y^2} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Dakle, jednačba je zaista egzaktna pa postoji funkcija

$F(x, y)$ takva da je

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{x^2 y} + \frac{1}{x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{x y^2} - \frac{1}{y}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{x^2 y} + \frac{1}{x} \Bigg/ \int dx$$

$$F(x, y) = \int \left(\frac{1}{x^2 y} + \frac{1}{x} \right) dx$$

$$F(x, y) = -\frac{1}{x y} + \ln |x| + \varphi(y) \Bigg/ \frac{\partial}{\partial y}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{xy^2} + \varphi'(y)$$

$$\frac{1}{xy^2} - \frac{1}{y} = \frac{1}{xy^2} + \varphi'(y)$$

$$\varphi'(y) = -\frac{1}{y}$$

$$\varphi(y) = -\ln |y| + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Stoga je

$$F(x, y) = -\frac{1}{xy} + \ln |x| - \ln |y| + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

pa je opće rješenje

$$-\frac{1}{xy} + \ln |x| - \ln |y| = C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Linearne jednadžbe 1. reda

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Linearna diferencijalna jednadžba 1. reda je jednadžba oblika

$$y' + p(x)y = q(x)$$

gdje su p i q neprekidne realne funkcije.

Ako je $q = 0$, kažemo da je jednadžba **homogena**, a inače je riječ o **nehomogenoj** jednadžbi. Uočimo da homogenu linearnu jednadžbu možemo riješiti separacijom varijabli. Pitanje je kako riješiti nehomogenu linearnu jednadžbu.

Postoji više metoda kojima se rješavaju nehomogene linearne jednadžbe, a ovdje će biti objašnjena **metoda varijacije konstanti**.

Obične dif. jednadžbe

Osnovne definicije

Separacija varijabli

Homogene jednadžbe

Egzaktne jednadžbe

Eulerovi multiplikatori

Linearne jednadžbe

Bernoullijeva jednadžba

Jednadžbe višeg reda



Ta metoda se sastoji u tome da se prvo riješi pripadna homogena jednačba, a zatim opće rješenje nehomogene jednačbe tražimo u obliku koji dobijemo iz općeg rješenja homogene jednačbe tako da konstantu zamijenimo funkcijom. Pogledajmo na primjeru kako se to radi.

Primjer 112.

Riješite diferencijalnu jednačbu $y' - y = e^{2x}$.

Rješenje

Ta metoda se sastoji u tome da se prvo riješi pripadna homogena jednačba, a zatim opće rješenje nehomogene jednačbe tražimo u obliku koji dobijemo iz općeg rješenja homogene jednačbe tako da konstantu zamijenimo funkcijom. Pogledajmo na primjeru kako se to radi.

Primjer 112.

Riješite diferencijalnu jednačbu $y' - y = e^{2x}$.

Rješenje

Radi se o linearnoj diferencijalnoj jednačbi

$(p(x) = -1, q(x) = e^{2x})$. Rješavamo prvo pripadnu homogenu jednačbu $y' - y = 0$.

$$y' - y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = y$$

$$\frac{dy}{y} = dx \Big/ \int$$

$$\ln |y| = x + \ln C, \quad C > 0$$

$$\ln |y| = \ln (Ce^x)$$

$$|y| = Ce^x, \quad C > 0$$

$$y = Ce^x, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$y = Ce^x, \quad C \in \mathbb{R} \quad \leftarrow \text{ rješenje homogene jednačbe}$$

Sada, rješenje početne jednačbe tražimo u obliku

$$y = C(x)e^x,$$

gdje je C nepoznata funkcija koju ćemo odrediti iz početne jednačbe.

$$y' = C'e^x + Ce^x$$

Uvrštavanjem u početnu jednačbu dobivamo

$$y' - y = e^{2x}$$

$$(C'e^x + Ce^x) - Ce^x = e^{2x}$$

$$C' e^x = e^{2x}$$

$$C' = e^x$$

$$C(x) = e^x + K, \quad K \in \mathbb{R}$$

Stoga je rješenje početne jednačbe

$$y = (e^x + K) e^x,$$

odnosno

$$y = e^{2x} + K e^x, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Primjer 113.

Riješite Cauchyjev problem

$$y' + y \operatorname{tg} x = \sin 2x, \quad y(0) = 1.$$

Rješenje

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Obične dif. jednačbe

Osnovne definicije

Separacija varijabli

Homogene jednačbe

Egzaktne jednačbe

Eulerovi multiplikatori

Linearne jednačbe

Bernoullijeva jednačba

Jednačbe višeg reda



Primjer 113.

Riješite Cauchyjev problem

$$y' + y \operatorname{tg} x = \sin 2x, \quad y(0) = 1.$$

Rješenje

Vidimo da je

$$y' + y \operatorname{tg} x = \sin 2x$$

linearna diferencijalna jednačba. Rješavamo najprije pripadnu homogenu jednačbu.

$$y' + y \operatorname{tg} x = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -y \operatorname{tg} x$$

$$-\frac{dy}{y} = \operatorname{tg} x \, dx \quad \Bigg/ \quad \int$$

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Obične dif. jednačbe

Osnovne definicije

Separacija varijabli

Homogene jednačbe

Egzaktne jednačbe

Eulerovi multiplikatori

Linearne jednačbe

Bernoullijeva jednačba

Jednačbe višeg reda



Kako je

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg} x \, dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = \left[\begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x \, dx = dt \end{array} \right] = \\ &= \int \frac{-dt}{t} = -\ln |t| = -\ln |\cos x|,\end{aligned}$$

slijedi

$$-\int \frac{dy}{y} = \int \operatorname{tg} x \, dx$$

$$-\ln |y| = -\ln |\cos x| - \ln C, \quad C > 0$$

$$\ln |y| = \ln (C |\cos x|)$$

$$|y| = C |\cos x|, \quad C > 0$$

$$y = C \cos x, \quad C \in \mathbb{R}$$

Rješenje početne jednadžbe sada tražimo u obliku

$$y = C(x) \cos x,$$

gdje je C nepoznata funkcija koju treba odrediti.

Deriviranjem dobivamo

$$y' = C' \cos x - C \sin x.$$

Uvrstimo li u početnu jednadžbu imamo

$$y' + y \operatorname{tg} x = \sin 2x$$

$$(C' \cos x - C \sin x) + C \cos x \operatorname{tg} x = \sin 2x$$

$$C' \cos x = 2 \sin x \cos x$$

$$C' = 2 \sin x$$

$$C(x) = -2 \cos x + K, \quad K \in \mathbb{R}$$

Dakle, opće rješenje početne jednadžbe je

$$y = (-2 \cos x + K) \cos x,$$

odnosno

$$y = K \cos x - 2 \cos^2 x, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Imali smo početni uvjet $y(0) = 1$, pa dobivamo

$$1 = K \cos 0 - 2 \cos^2 0,$$

odnosno $K = 3$.

Stoga je rješenje Cauchyjevog problema funkcija

$$y = 3 \cos x - 2 \cos^2 x.$$

Bernoullijeva jednažba

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Bernoullijeva diferencijalna jednažba je jednažba oblika

$$y' + p(x)y = q(x)y^n, \quad (\clubsuit)$$

gdje su p i q neprekidne funkcije, a $n \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

Ako je $n \in \{0, 1\}$, tada se radi o linearnoj diferencijalnoj jednažbi.

Podijelimo li (\clubsuit) s y^n dobivamo

$$\frac{y'}{y^n} + p(x)\frac{1}{y^{n-1}} = q(x), \quad (\heartsuit)$$

pri čemu pretpostavljamo da je $y \neq 0$ jer očito je $y = 0$ rješenje od (\clubsuit) .

Obične dif. jednažbe

Osnovne definicije

Separacija varijabli

Homogene jednažbe

Egzaktne jednažbe

Eulerovi multiplikatori

Linearne jednažbe

Bernoullijeva jednažba

Jednažbe višeg reda



Stavimo li supstituciju

$$z = \frac{1}{y^{n-1}},$$

deriviranjem dobivamo

$$z' = (1 - n) \cdot \frac{y'}{y^n}.$$

Uvrstimo li to u (♡) i sredimo, dobivamo

$$z' + (1 - n)p(x)z = (1 - n)q(x),$$

što je linearna diferencijalna jednačba koju znamo riješiti
metodom varijacije konstanti.

Primjer 114.

Riješite diferencijalnu jednažbu $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = -xy^2$.

Rješenje

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Obične dif. jednažbe

Osnovne definicije

Separacija varijabli

Homogene jednažbe

Egzaktne jednažbe

Eulerovi multiplikatori

Linearne jednažbe

Bernoullijeva jednažba

Jednažbe višeg reda

Primjer 114.

Riješite diferencijalnu jednačbu $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = -xy^2$.

Rješenje

Radi se o Bernoullijevoj jednačbi za $n = 2$.

$$y' + \frac{1}{x}y = -xy^2 \quad / : y^2$$

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} = -x \quad (*)$$

Uvodimo supstituciju

$$z = \frac{1}{y}, \quad z' = -\frac{y'}{y^2}.$$

Uvrstimo u (*) i dobivamo linearnu jednačbu

$$z' - \frac{1}{x}z = x. \quad (**)$$

Prvo rješavamo pripadnu homogenu jednadžbu.

$$z' - \frac{1}{x}z = 0$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z}{x}$$

$$\frac{dz}{z} = \frac{dx}{x} \Bigg/ \int$$

$$\ln |z| = \ln |x| + \ln C, \quad C > 0$$

$$\ln |z| = \ln (C|x|)$$

$$|z| = C|x|, \quad C > 0$$

$$z = Cx, \quad C \in \mathbb{R}$$

Rješenje od (**) tražimo u obliku $z = C(x)x$, gdje je C nepoznata funkcija. Deriviranjem dobivamo

$$z' = C'x + C.$$

Uvrstimo to u (**).

$$z' - \frac{1}{x}z = x$$

$$(C'x + C) - \frac{1}{x} \cdot Cx = x$$

$$C'x = x$$

$$C' = 1$$

$$C(x) = x + K, \quad K \in \mathbb{R}$$

Dakle, opće rješenje od $(**)$ je

$$z = (x + K)x,$$

odnosno

$$z = x^2 + Kx, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Uvažimo li još da je $z = \frac{1}{y}$ dobivamo

$$\frac{1}{y} = x^2 + Kx,$$

pa je opće rješenje početne jednačbe

$$y = \frac{1}{x^2 + Kx}, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Primjer 115.

Riješite diferencijalnu jednačbu $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y$.

Rješenje

Obične dif. jednačbe

Osnovne definicije

Separacija varijabli

Homogene jednačbe

Egzaktne jednačbe

Eulerovi multiplikatori

Linearne jednačbe

Bernoullijeva jednačba

Jednačbe višeg reda

Primjer 115.

Riješite diferencijalnu jednačbu $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y$.

Rješenje

Podijelimo li jednačbu sa x dobivamo

$$y' - \frac{4}{x}y = 2xy^{\frac{1}{2}},$$

pa vidimo da se radi o Bernoullijevoj jednačbi za $n = \frac{1}{2}$.

$$y' - \frac{4}{x}y = 2x\sqrt{y} \quad / : \sqrt{y}$$

$$\frac{y'}{\sqrt{y}} - \frac{4}{x}\sqrt{y} = 2x \quad (\heartsuit)$$

Uvodimo supstituciju

$$z = \sqrt{y}, \quad z' = \frac{y'}{2\sqrt{y}}.$$

Uvrstimo to u (♡) i dobivamo linearnu jednadžbu

$$z' - \frac{2}{x}z = x. \quad (\heartsuit\heartsuit)$$

Rješavamo prvo pripadnu homogenu jednadžbu.

$$z' - \frac{2}{x}z = 0$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{2}{x}z$$

$$\frac{dz}{z} = \frac{2}{x}dx \quad \Bigg/ \quad \int$$

$$\ln |z| = 2 \ln |x| + \ln C, \quad C > 0$$

$$\ln |z| = \ln (C|x|^2)$$

$$|z| = C|x|^2, \quad C > 0$$

$$z = Cx^2, \quad C \in \mathbb{R}$$

Rješenje od ($\heartsuit\heartsuit$) tražimo u obliku $z = C(x)x^2$, gdje je C nepoznata funkcija. Deriviranjem dobivamo

$$z' = C'x^2 + 2Cx.$$

Uvrstimo to u ($\heartsuit\heartsuit$).

$$z' - \frac{2}{x}z = x$$

$$(C'x^2 + 2Cx) - \frac{2}{x} \cdot Cx^2 = x$$

$$C'x^2 = x$$

$$C' = \frac{1}{x}$$

$$C(x) = \ln|x| + K, \quad K \in \mathbb{R}$$

Stoga je opće rješenje od (♡♡)

$$z = (\ln|x| + K)x^2,$$

odnosno

$$z = x^2 \ln|x| + Kx^2, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Uvrstimo li još $z = \sqrt{y}$, dobivamo opće rješenje početne jednačbe

$$\sqrt{y} = x^2 \ln|x| + Kx^2, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Diferencijalne jednađžbe višeg reda

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

U ovom dijelu ćemo se baviti jednim specijalnim vrstama diferencijalnih jednađžbi višeg reda koje se zovu **linearne diferencijalne jednađžbe s konstantnim koeficijentima**.

Linearna diferencijalna jednađžba n -tog reda s konstantnim koeficijentima je jednađžba oblika

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \dots + a_1y' + a_0y = f(x)$$

gdje su $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$, a f je neprekidna realna funkcija.

Jednađžba je **homogena** ako je $f = 0$, a inače je **nehomogena**.

Obične dif. jednađžbe
Osnovne definicije
Separacija varijabli
Homogene jednađžbe
Egzaktne jednađžbe
Eulerovi multiplikatori
Linearne jednađžbe
Bernoullijeva jednađžba
Jednađžbe višeg reda



Homogena jednadžba

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0 \quad (\heartsuit)$$

Teorem 55.

Skup svih rješenja jednadžbe (\heartsuit) je n -dimenzionalni potprostor vektorskog prostora $C^n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, gdje je $C^n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ skup svih funkcija $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ klase C^n .

Lako se dokaže da je skup rješenja potprostor koristeći svojstva deriviranja, a umjesto da dokazujemo ovaj teorem opisat ćemo postupak kako se pronalazi baza za skup rješenja od (\heartsuit) .

Obične dif. jednadžbe
Osnovne definicije
Separacija varijabli
Homogene jednadžbe
Egzaktne jednadžbe
Eulerovi multiplikatori
Linearne jednadžbe
Bernoullijeva jednadžba
Jednadžbe višeg reda



Bazna rješenja se traže na sljedeći način:

- Nađemo korijene karakteristične jednadžbe

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0.$$

- Svakom jednostrukom realnom korijenu λ_j pridružujemo bazno rješenje $y = e^{\lambda_j x}$.
- Svakom višestrukom realnom korijenu λ_j kratnosti r pridružujemo r linearno nezavisnih baznih rješenja

$$y_1 = e^{\lambda_j x}, \quad y_2 = x e^{\lambda_j x}, \quad \dots, \quad y_r = x^{r-1} e^{\lambda_j x}$$

- Svakom paru jednostrukih konjugirano kompleksnih korijena $\lambda_j = \alpha + \beta i, \bar{\lambda}_j = \alpha - \beta i, (\beta > 0)$, pridružujemo dva linearno nezavisna bazna rješenja

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

- Svakom paru višestrukih konjugirano kompleksnih korijena $\lambda_j = \alpha + \beta i$, $\bar{\lambda}_j = \alpha - \beta i$, ($\beta > 0$), kratnosti r pridružujemo $2r$ linearno nezavisnih baznih rješenja

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x, y_2 = x e^{\alpha x} \cos \beta x, \dots, y_r = x^{r-1} e^{\alpha x} \cos \beta x$$

$$y_{r+1} = e^{\alpha x} \sin \beta x, y_{r+2} = x e^{\alpha x} \sin \beta x, \dots, y_{2r} = x^{r-1} e^{\alpha x} \sin \beta x$$

- Opće rješenje od (\heartsuit) je linearna kombinacija baznih rješenja.

Primjer 116.

Riješite diferencijalnu jednačbu $y'' - 2y' = 0$.

Rješenje

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Obične dif. jednačbe
Osnovne definicije
Separacija varijabli
Homogene jednačbe
Egzaktne jednačbe
Eulerovi multiplikatori
Linearne jednačbe
Bernoullijeva jednačba
Jednačbe višeg reda



Primjer 116.

Riješite diferencijalnu jednačbu $y'' - 2y' = 0$.

Rješenje

Najprije rješavamo karakterističnu jednačbu

$$\lambda^2 - 2\lambda = 0.$$

Njezina rješenja su $\lambda_1 = 0$ i $\lambda_2 = 2$. To su jednostruka realna rješenja pa svakom od njih pridružujemo bazna rješenja

$$y_1 = e^{0 \cdot x} = 1, \quad y_2 = e^{2x}.$$

Tada je opće rješenje početne jednačbe

$$y = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot e^{2x}$$

odnosno

$$y = C_1 + C_2 e^{2x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Primjer 117.

Riješite diferencijalnu jednačbu $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$.

Rješenje

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Obične dif. jednačbe
Osnovne definicije
Separacija varijabli
Homogene jednačbe
Egzaktne jednačbe
Eulerovi multiplikatori
Linearne jednačbe
Bernoullijeva jednačba
Jednačbe višeg reda



Primjer 117.

Riješite diferencijalnu jednadžbu $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$.

Rješenje

Najprije rješavamo karakterističnu jednadžbu

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0.$$

Lako se vidi da je $\lambda = 1$ njezin trostruki realni korijen.

Tom korijenu pridružujemo tri bazna rješenja

$$y_1 = e^{1 \cdot x}, \quad y_2 = x e^{1 \cdot x}, \quad y_3 = x^2 e^{1 \cdot x},$$

tj.

$$y_1 = e^x, \quad y_2 = x e^x, \quad y_3 = x^2 e^x.$$

Opće rješenje početne jednadžbe je

$$y = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 x^2 e^x, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

Primjer 118.

Riješite diferencijalnu jednačbu $y^{(4)} - y = 0$.

Rješenje

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Obične dif. jednačbe
Osnovne definicije
Separacija varijabli
Homogene jednačbe
Egzaktne jednačbe
Eulerovi multiplikatori
Linearne jednačbe
Bernoullijeva jednačba
Jednačbe višeg reda



Primjer 118.

Riješite diferencijalnu jednačbu $y^{(4)} - y = 0$.

Rješenje

Najprije rješavamo karakterističnu jednačbu

$$\lambda^4 - 1 = 0.$$

Njezini korijeni su

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = i, \quad \lambda_4 = -i.$$

Korijenima λ_1 i λ_2 pridružujemo bazna rješenja

$$y_1 = e^{1 \cdot x} = e^x, \quad y_2 = e^{-1 \cdot x} = e^{-x}.$$

Nadalje $\lambda_3 = 0 + 1 \cdot i$, pa korijenima λ_3 i λ_4 pridružujemo bazna rješenja

$$y_3 = e^{0 \cdot x} \cos(1 \cdot x), \quad y_4 = e^{0 \cdot x} \sin(1 \cdot x)$$

odnosno

$$y_3 = \cos x, \quad y_4 = \sin x.$$

Opće rješenje početne jednadžbe je

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x, \quad C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}.$$

Primjer 119.

Riješite Cauchyjev problem

$$y''' - y' = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -1, \quad y''(0) = 1.$$

Rješenje

odnosno

$$y_3 = \cos x, \quad y_4 = \sin x.$$

Opće rješenje početne jednačbe je

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x, \quad C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}.$$

Primjer 119.

Riješite Cauchyjev problem

$$y''' - y' = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -1, \quad y''(0) = 1.$$

Rješenje

Najprije rješavamo karakterističnu jednačbu

$$\lambda^3 - \lambda = 0.$$

Njezini korijeni su $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$.

Stoga je opće rješenje

$$y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-x}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

Nadalje,

$$y' = C_2 e^x - C_3 e^{-x}$$

$$y'' = C_2 e^x + C_3 e^{-x}.$$

Iz početnih uvjeta $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$, $y''(0) = 1$ slijedi

$$C_1 + C_2 + C_3 = 0$$

$$C_2 - C_3 = -1$$

$$C_2 + C_3 = 1$$

Rješavanjem sustava dobivamo $C_1 = -1$, $C_2 = 0$ i

$C_3 = 1$, pa je rješenje Cauchyjevog problema funkcija

$$y = e^{-x} - 1.$$

Nehomogena jednadžba

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \dots + a_1y' + a_0y = f(x)$$

Neka je y_P neko partikularno rješenje nehomogene jednadžbe. Tada je opće rješenje nehomogene jednadžbe jednako sumi partikularnog rješenja y_P i općeg rješenja y_H pripadne homogene jednadžbe, tj.

$$y = y_P + y_H.$$

Vidjeli smo kako se rješavaju homogene jednadžbe, pa da bismo riješili nehomogenu jednadžbu trebamo "pogoditi" neko njezino rješenje. Ovdje ćemo objasniti jednu metodu za traženje partikularnog rješenja kada je funkcija f specijalnog oblika.

Obične dif. jednadžbe
Osnovne definicije
Separacija varijabli
Homogene jednadžbe
Egzaktne jednadžbe
Eulerovi multiplikatori
Linearne jednadžbe
Bernoullijeva jednadžba
Jednadžbe višeg reda



Metoda neodređenih koeficijenata

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Ovu metodu koristimo kada je funkcija oblika

$$f(x) = e^{\alpha x} [P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x],$$

gdje su α, β konstante, P_n, Q_m polinomi stupnja n i m .

U tom slučaju partikularno rješenje tražimo u obliku

$$y_P = x^r e^{\alpha x} [P_l(x) \cos \beta x + Q_l(x) \sin \beta x],$$

gdje je r kratnost korijena $\lambda = \alpha + \beta i$ u pripadnoj karakterističnoj jednadžbi homogene jednadžbe (u slučaju da λ nije korijen, $r = 0$), $l = \max\{m, n\}$, P_l, Q_l su polinomi stupnja l .

Obične dif. jednadžbe
Osnovne definicije
Separacija varijabli
Homogene jednadžbe
Egzaktne jednadžbe
Eulerovi multiplikatori
Linearne jednadžbe
Bernoullijeva jednadžba
Jednadžbe višeg reda



Primjer 120.

Riješite diferencijalnu jednačžu

$$y''' + 3y'' + 3y' + y = 30e^{-x}.$$

Rješenje

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Obične dif. jednačžbe
Osnovne definicije
Separacija varijabli
Homogene jednačžbe
Egzaktne jednačžbe
Eulerovi multiplikatori
Linearne jednačžbe
Bernoullijeva jednačžba
Jednačžbe višeg reda

Primjer 120.

Riješite diferencijalnu jednadžbu

$$y''' + 3y'' + 3y' + y = 30e^{-x}.$$

Rješenje

Prvo rješavamo pripadnu homogenu jednadžbu

$$y''' + 3y'' + 3y' + y = 0.$$

Njezina karakteristična jednadžba je

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0.$$

Očito je da ona ima trostruki korijen $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$.

Stoga je opće rješenje homogene jednadžbe

$$y_H = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + C_3 x^2 e^{-x}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

Sada još trebamo naći neko partikularno rješenje početne jednačbe. U ovom slučaju je $f(x) = 30e^{-x}$ pa je $\alpha = -1$, $\beta = 0$, $\lambda = \alpha + \beta i = -1 + 0 \cdot i = -1$. Kako je $\lambda = -1$ trostruki korijen karakteristične jednačbe, slijedi da je $r = 3$. Stoga partikularno rješenje tražimo u obliku

$$y_P = Cx^3e^{-x},$$

gdje je $C \in \mathbb{R}$ nepoznata konstanta.

$$y'_P = (3Cx^2 - Cx^3)e^{-x}$$

$$y''_P = (6Cx - 6Cx^2 + Cx^3)e^{-x}$$

$$y'''_P = (6C - 18Cx + 9Cx^2 - Cx^3)e^{-x}$$

Uvrštavanjem u početnu jednačbu dobivamo

$$y_P''' + 3y_P'' + 3y_P' + y_P = 30e^{-x},$$

odnosno nakon sređivanja

$$6Ce^{-x} = 30e^{-x},$$

iz čega slijedi da je $C = 5$. Stoga je jedno partikularno rješenje početne jednačbe

$$y_P = 5x^3e^{-x},$$

pa je opće rješenje

$$y = y_P + y_H$$

odnosno

$$y = 5x^3e^{-x} + C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + C_3x^2e^{-x}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

Primjer 121.

Riješite diferencijalnu jednačbu

$$y'' - 3y' + 2y = x \cos x.$$

Rješenje

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Obične dif. jednačbe
Osnovne definicije
Separacija varijabli
Homogene jednačbe
Egzaktne jednačbe
Eulerovi multiplikatori
Linearne jednačbe
Bernoullijeva jednačba
Jednačbe višeg reda



Primjer 121.

Riješite diferencijalnu jednačbu

$$y'' - 3y' + 2y = x \cos x.$$

Rješenje

Prvo rješavamo pripadnu homogenu jednačbu

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

Njezina karakteristična jednačba je

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0.$$

Njezini korijeni su $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$.

Stoga je opće rješenje homogene jednačbe

$$y_H = C_1 e^{2x} + C_2 e^x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Kako je $f(x) = x \cos x$, slijedi da je $\alpha = 0$, $\beta = 1$.
Nadalje, $\lambda = \alpha + \beta i = i$ nije korijen karakteristične
jednačbe pa je $r = 0$. Stoga partikularno rješenje
tražimo u obliku

$$y_P = (Ax + B) \cos x + (Cx + D) \sin x.$$

Nadalje je

$$y'_P = (Cx + A + D) \cos x + (-Ax - B + C) \sin x,$$

$$y''_P = (-Ax - B + 2C) \cos x + (-Cx - 2A - D) \sin x.$$

Uvrstimo li sve ovo u početnu jednačbu, nakon
sređivanja dobivamo

$$\begin{aligned} &((A - 3C)x - 3A + B + 2C - 3D) \cos x + \\ &+ ((3A + C)x - 2A + 3B - 3C + D) \sin x = x \cos x \end{aligned}$$

Kako ova jednakost mora vrijediti za svaki $x \in \mathbb{R}$, slijedi da je

$$\begin{aligned} (A - 3C)x - 3A + B + 2C - 3D &= x \\ (3A + C)x - 2A + 3B - 3C + D &= 0, \end{aligned}$$

a prema teoremu o jednakosti dva polinoma slijedi da je

$$\begin{aligned} A - 3C &= 1 \\ -3A + B + 2C - 3D &= 0 \\ 3A + C &= 0 \\ -2A + 3B - 3C + D &= 0 \end{aligned}$$

Rješimo li taj sustav, dobivamo

$$A = \frac{1}{10}, \quad B = -\frac{3}{25}, \quad C = -\frac{3}{10}, \quad D = -\frac{17}{50}.$$

Stoga je jedno partikularno rješenje početne jednačbe

$$y_P = \left(\frac{1}{10}x - \frac{3}{25} \right) \cos x + \left(-\frac{3}{10}x - \frac{17}{50} \right) \sin x.$$

Opće rješenje početne jednačbe je

$$y = y_P + y_H,$$

odnosno

$$y = \left(\frac{1}{10}x - \frac{3}{25} \right) \cos x + \left(-\frac{3}{10}x - \frac{17}{50} \right) \sin x + C_1 e^{2x} + C_2 e^x$$

Metoda superpozicije

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Ako je y_1 rješenje jednačbe

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \dots + a_1y' + a_0y = f_1(x),$$

a y_2 rješenje jednačbe

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \dots + a_1y' + a_0y = f_2(x),$$

tada je $Ay_1 + By_2$ rješenje jednačbe

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \dots + a_1y' + a_0y = Af_1(x) + Bf_2(x),$$

gdje su $A, B \in \mathbb{R}$.

Obične dif. jednačbe
Osnovne definicije
Separacija varijabli
Homogene jednačbe
Egzaktne jednačbe
Eulerovi multiplikatori
Linearne jednačbe
Bernoullijeva jednačba
Jednačbe višeg reda



Primjer 122.

Riješite diferencijalnu jednađžu

$$y'' - 3y' + 2y = x \cos x + e^{8x}.$$

Rješenje

Matematičke metode
za informatičare

prof.dr.sc. Blaženka
Divjak,
Damir Horvat

Obične dif. jednađžbe
Osnovne definicije
Separacija varijabli
Homogene jednađžbe
Egzaktne jednađžbe
Eulerovi multiplikatori
Linearne jednađžbe
Bernoullijeva jednađžba
Jednađžbe višeg reda



Primjer 122.

Riješite diferencijalnu jednačbu

$$y'' - 3y' + 2y = x \cos x + e^{8x}.$$

Rješenje

$$y'' - 3y' + 2y = \underbrace{x \cos x}_{f_1(x)} + \underbrace{e^{8x}}_{f_2(x)}$$

Prvo rješavamo pripadnu homogenu jednačbu

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

Njezino opće rješenje je (prethodni primjer)

$$y_H = C_1 e^{2x} + C_2 e^x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Zatim tražimo partikularno rješenje od

$$y'' - 3y' + 2y = x \cos x.$$

Njega smo našli u prethodnom primjeru.

$$y_{P_1} = \left(\frac{1}{10}x - \frac{3}{25} \right) \cos x + \left(-\frac{3}{10}x - \frac{17}{50} \right) \sin x.$$

Nakon toga tražimo partikularno rješenje od

$$y'' - 3y' + 2y = e^{8x},$$

i dobivamo

$$y_{P_2} = \frac{1}{42}e^{8x}.$$

Opće rješenje početne jednačbe je

$$y = y_{P_1} + y_{P_2} + y_H,$$

odnosno

$$y = \left(\frac{1}{10}x - \frac{3}{25} \right) \cos x + \left(-\frac{3}{10}x - \frac{17}{50} \right) \sin x + \frac{1}{42}e^{8x} + C_1e^{2x} + C_2e^x.$$