Realne funkcije realne varijable – 2. dio

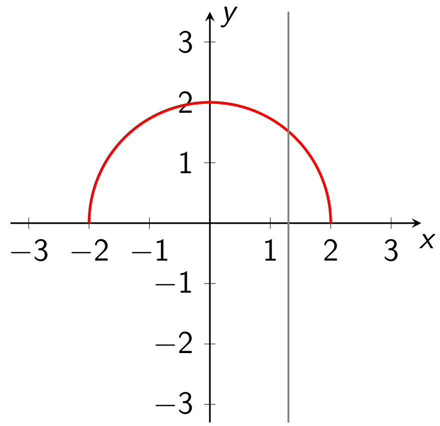
MATEMATIKA 2

Damir Horvat

FOI, Varaždin

Definicija funkcije

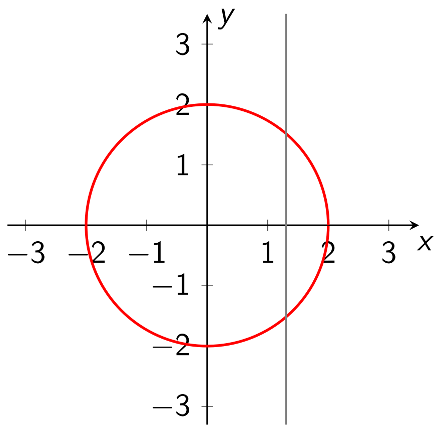
$y = \sqrt{4 - x^2}$



- Gornja polukružnica jest graf funkcije $y = f(x)$ jer svaka paralela s y-osi siječe tu krivulju u najviše jednoj točki.

Definicija funkcije

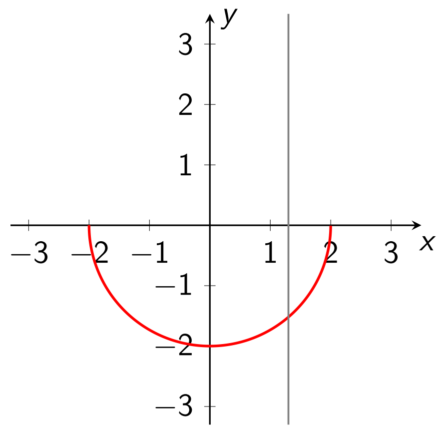
$x^2 + y^2 = 4$



- Kružnica $x^2 + y^2 = 4$ nije graf niti jedne funkcije $y = f(x)$ jer postoje paralele s y-osi koje sijeku tu krivulju u više od jedne točke.

Definicija funkcije

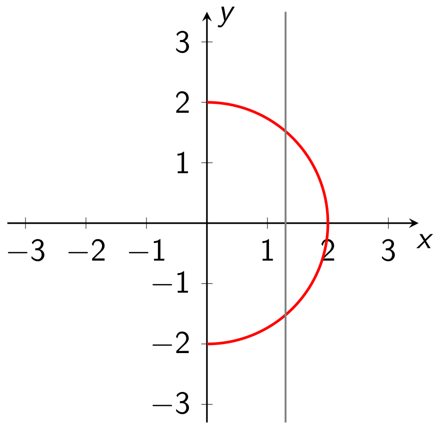
$y = -\sqrt{4 - x^2}$



- Donja polukružnica jest graf funkcije $y = f(x)$ jer svaka paralela s y-osi siječe tu krivulju u najviše jednoj točki.

Definicija funkcije

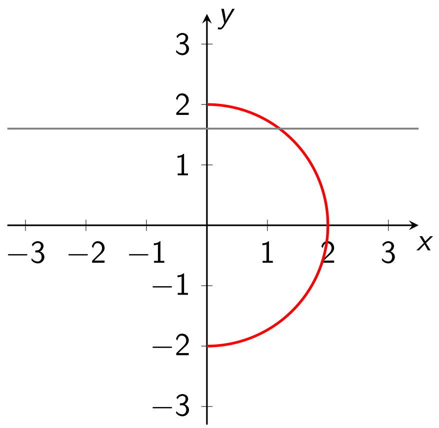
$\boxed{x^2 + y^2 = 4}$



- Desna polukružnica nije graf niti jedne funkcije $y = f(x)$ jer postoje paralele s y-osi koje sijeku tu krivulju u više od jedne točke.

Definicija funkcije

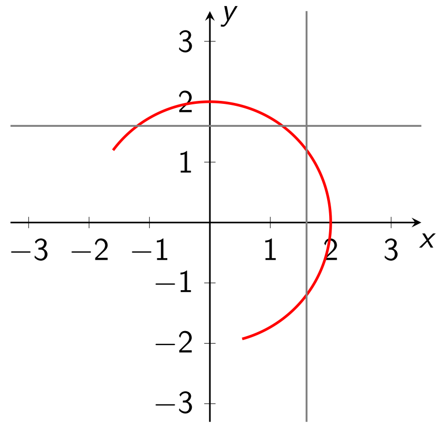
$\boxed{x = \sqrt{4 - y^2}}$



- Desna polukružnica jest graf funkcije $x = f(y)$ jer svaka paralela s x-osi siječe tu krivulju u najviše jednoj točki.

Definicija funkcije

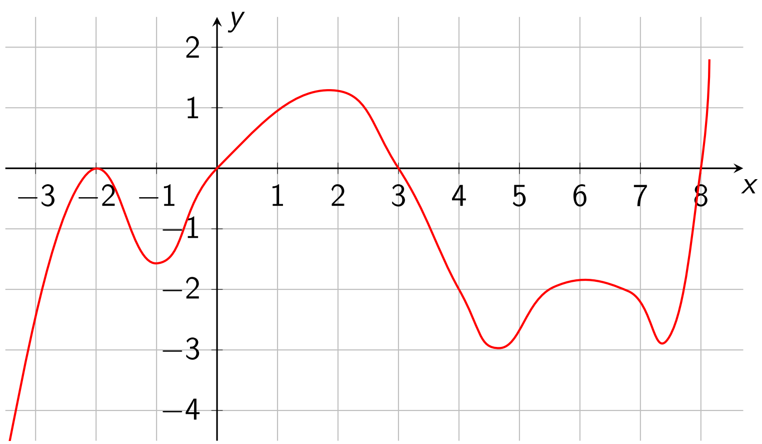
$\boxed{x^2 + y^2 = 4}$



- Dio kružnice prikazan na slici nije graf niti jedne funkcije $y = f(x)$ i nije graf niti jedne funkcije $x = f(y)$.

Zadatak 1

Zadan je graf funkcije f.



a) *Odredite nultočke funkcije f.*

b) *Navedite neki interval na kojemu je funkcija f pozitivna.*

c) *Navedite neki interval na kojemu je funkcija f negativna.*

d) *Napišite neki interval na kojemu funkcija f pada.*

e) *Napišite neki interval na kojemu funkcija f raste.*

f) *Napišite neki interval na kojemu funkcija f nije monotona.*

g) *Napišite neki interval na kojemu je $f(x) \leqslant -1$.*

h) *Koliko lokalnih ekstrema ima funkcija f?*

i) *Koliko rješenja ima jednadžba $f(x) = 1$ na segmentu $[-3, 9]$?*

j) *Koliko rješenja ima jednadžba $f(x) = 1$ na segmentu $[-3, 8]$?*

Rješenje

a) Nultočke funkcije f su: $-2, 0, 3, 8$.

b) Funkcija f je pozitivna na primjer na intervalu $\langle 0, 3\rangle$.

c) Funkcija f je negativna na primjer na intervalu $\langle 4, 7\rangle$.

d) Funkcija f pada na primjer na intervalu $\langle 2, 4\rangle$.

e) Funkcija f raste na primjer na intervalu $\langle -1, 1\rangle$.

f) Funkcija f nije monotona na primjer na intervalu $\langle -2, 1\rangle$.

g) $f(x) \leqslant -1$ na primjer na intervalu $\langle 4, 7\rangle$.

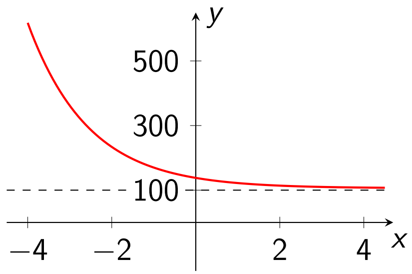
h) f ima ukupno 6 lokalnih ekstrema.

i) Jednadžba $f(x) = 1$ ima ukupno 3 rješenja na segmentu $[-3, 9]$.

j) Jednadžba $f(x) = 1$ ima ukupno 2 rješenja na segmentu $[-3, 8]$.

Zadatak 2

Zadana je funkcija h svojim grafom na donjoj slici.



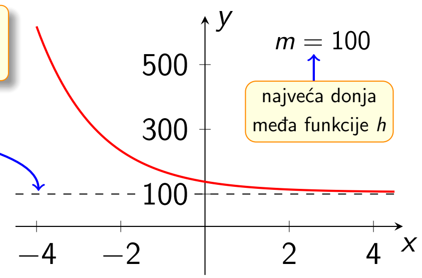
Ispitajte monotonost, omeđenost i parnost funkcije h na temelju njezinog grafa.

Rješenje

$y = 100$ je horizontalna asimptota funkcije h.

monotonost

Funkcija h je monotona funkcija jer strogo pada.



omeđenost $\quad m \leqslant h(x) \leqslant M$

Funkcija h nije omeđena odozgo jer je

$$\lim_{x \to -\infty} h(x) = +\infty.$$

kraći zapis

Kada je x jako veliki negativni broj, tada je $h(x)$ jako veliki pozitivni broj.

Funkcija h je omeđena odozdo jer je $h(x) \geqslant 100$, tj. $m = 100$ je jedna donja međa funkcije h.

Funkcija h nije omeđena jer nije omeđena odozgo.

parnost/neparnost

Funkcija h nije parna jer njezin graf nije simetričan s obzirom na os y.

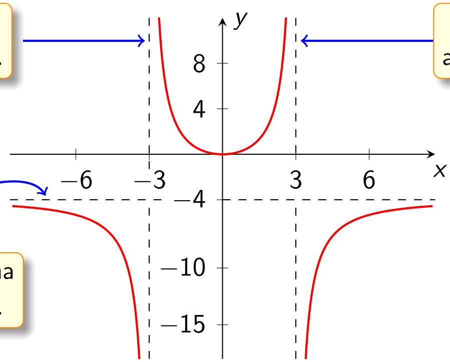
Funkcija h nije neparna jer njezin graf nije simetričan s obzirom na ishodište koordinatnog sustava.

Zadatak 3

Zadana je funkcija f svojim grafom na donjoj slici.

$x=-3$ je vertikalna asimptota funkcije f.

$x=3$ je vertikalna asimptota funkcije f.



$y=-4$ je horizontalna asimptota funkcije f.

Ispitajte monotonost, omeđenost i parnost funkcije f na temelju njezinog grafa.

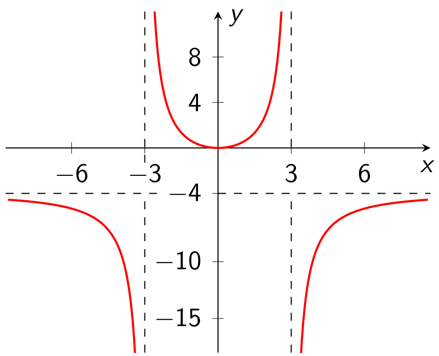
Rješenje

monotonost

Funkcija f raste na intervalima $\langle 0,3\rangle$ i $\langle 3,+\infty\rangle$.

Funkcija f pada na intervalima $\langle -\infty,-3\rangle$ i $\langle -3,0\rangle$.

Funkcija f nije monotona funkcija na svojoj domeni.



parnost/neparnost

Funkcija f je parna jer je njezin graf simetričan s obzirom na os y.

Budite iznimno oprezni

Funkcija f ne raste na skupu $\langle 0,3\rangle \cup \langle 3,+\infty\rangle$.

Budite iznimno oprezni

Funkcija f ne pada na skupu $\langle -\infty,-3\rangle \cup \langle -3,0\rangle$.

omeđenost $\quad m \leqslant f(x) \leqslant M$

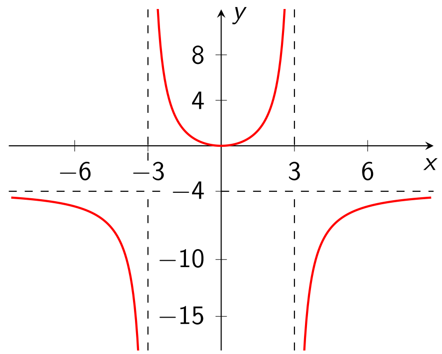
Funkcija f nije omeđena odozgo jer u okolini broja 3 s lijeve (minus) strane poprima beskonačno velike pozitivne vrijednosti, tj.

$$\lim_{x\to 3-} f(x) = +\infty.$$

Funkcija f nije omeđena odozdo jer u okolini broja 3 s desne (plus) strane poprima beskonačno velike negativne vrijednosti, tj.

$$\lim_{x\to 3+} f(x) = -\infty.$$

Funkcija f nije omeđena jer nije omeđena niti odozgo niti odozdo.



Slično je u okolini broja -3

$$\lim_{x\to -3-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to -3+} f(x) = +\infty$$

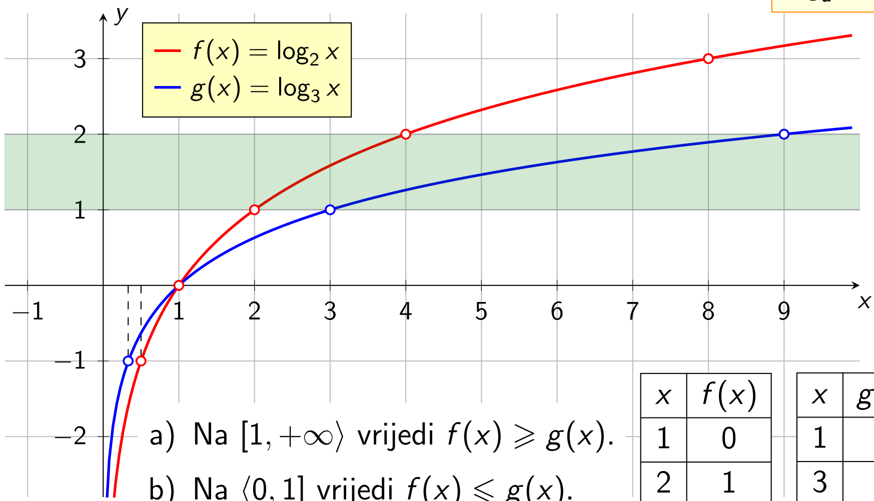
Zadatak 4

Zadane su funkcije $f(x)=\log_2 x$ i $g(x)=\log_3 x$.

a) *Na kojim dijelovima domena vrijedi nejednakost $f(x) \geqslant g(x)$?*
b) *Na kojim dijelovima domena vrijedi nejednakost $f(x) \leqslant g(x)$?*
c) *Na kojem dijelu domene vrijedi $1 \leqslant f(x) \leqslant 2$?*
d) *Na kojem dijelu domene vrijedi $1 \leqslant g(x) \leqslant 2$?*
e) *Na kojim dijelovima domena vrijedi nejednakost $f^{-1}(x) \geqslant g^{-1}(x)$?*
f) *Na kojim dijelovima domena vrijedi nejednakost $f^{-1}(x) \leqslant g^{-1}(x)$?*
g) *Usporedite funkcije f, g, f^{-1} i g^{-1} na intervalu $\langle 0,+\infty\rangle$ s linearnom funkcijom $h(x)=x$.*

Rješenje $f : \langle 0, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ $\quad g : \langle 0, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$

$\boxed{\log_a a^x = x}$



a) Na $[1, +\infty\rangle$ vrijedi $f(x) \geqslant g(x)$.

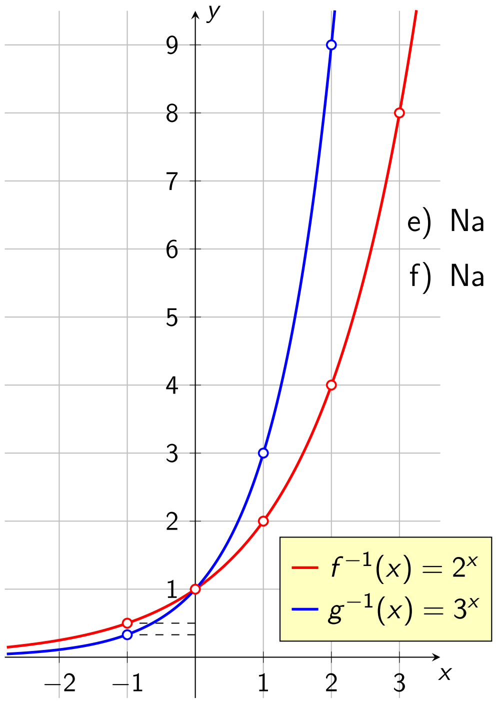
b) Na $\langle 0, 1]$ vrijedi $f(x) \leqslant g(x)$.

c) Na $[2, 4]$ vrijedi $1 \leqslant f(x) \leqslant 2$.

d) Na $[3, 9]$ vrijedi $1 \leqslant g(x) \leqslant 2$.

x	$f(x)$
1	0
2	1
4	2
8	3
$\frac{1}{2}$	-1

x	$g(x)$
1	0
3	1
9	2
$\frac{1}{3}$	-1



$f^{-1} : \mathbb{R} \to \langle 0, +\infty\rangle$

$g^{-1} : \mathbb{R} \to \langle 0, +\infty\rangle$

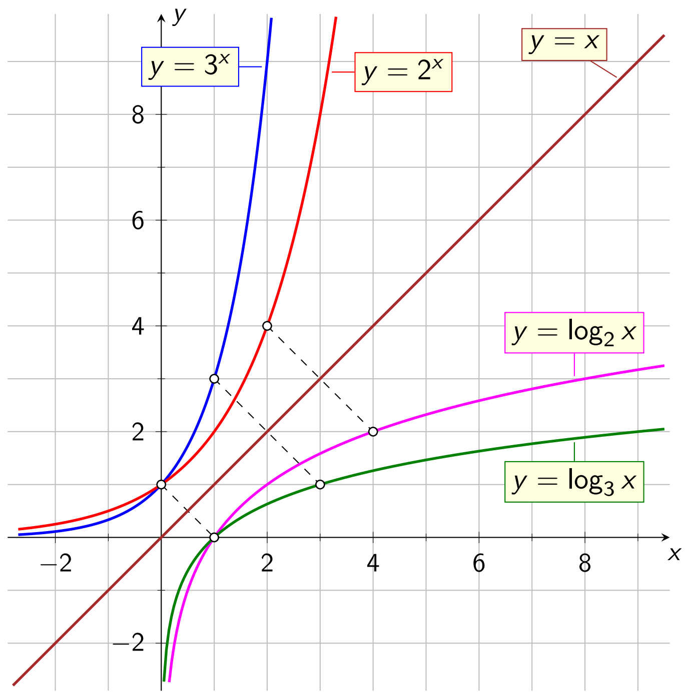
e) Na $\langle -\infty, 0]$ vrijedi $f^{-1}(x) \geqslant g^{-1}(x)$.

f) Na $[0, +\infty\rangle$ vrijedi $f^{-1}(x) \leqslant g^{-1}(x)$.

x	$f^{-1}(x)$
0	1
1	2
2	4
3	8
-1	$\frac{1}{2}$

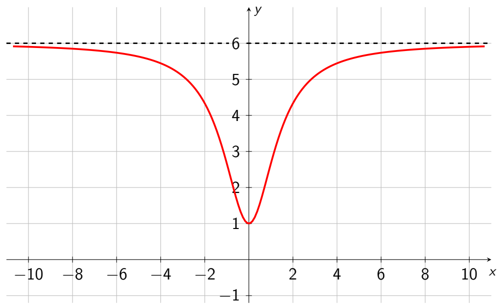
x	$g^{-1}(x)$
0	1
1	3
2	9
-1	$\frac{1}{3}$

g)



Zadatak 5

Zadan je graf funkcije $g : \mathbb{R} \to \operatorname{Im} g$, a funkcije g_1, g_2 i g_3 imaju isto pravilo pridruživanja kao i funkcija g.



a) *Ispitajte omeđenost funkcije g.*

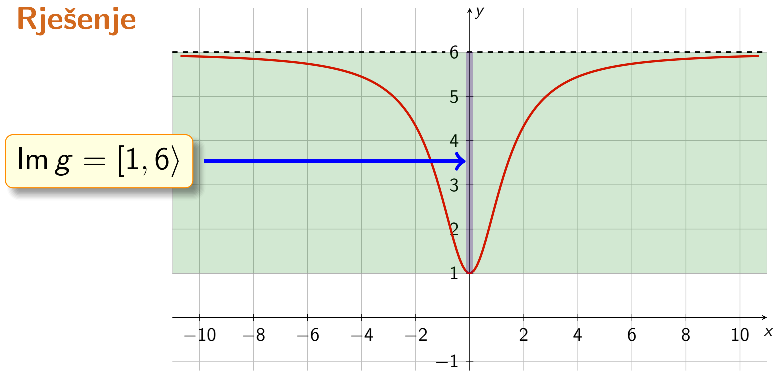
b) *Je li funkcija $g : \mathbb{R} \to \operatorname{Im} g$ bijekcija?*

c) *Je li funkcija $g_1 : \langle -\infty, 0] \to \mathbb{R}$ bijekcija?*

d) *Je li funkcija $g_2 : \langle -\infty, 0] \to [1, 6\rangle$ bijekcija?*

e) *Je li funkcija $g_3 : [0, +\infty\rangle \to [1, 6]$ bijekcija?*

Rješenje



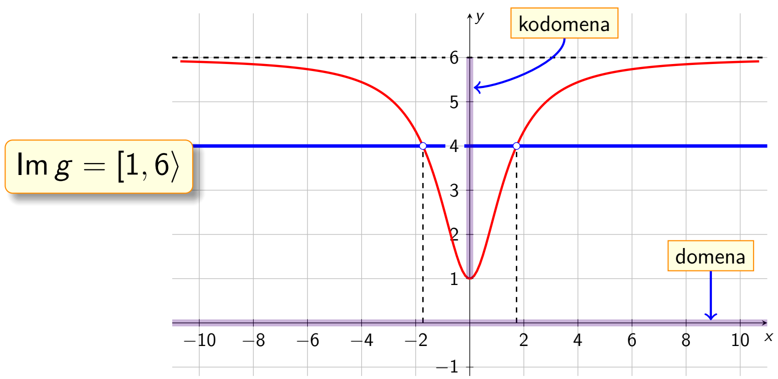
omeđenost $m \leqslant g(x) \leqslant M$

$g : \mathbb{R} \to \operatorname{Im} g$

a) Funkcija g je omeđena jer je $1 \leqslant g(x) \leqslant 6$.

$m = 1 \longleftarrow$ najveća donja međa funkcije g

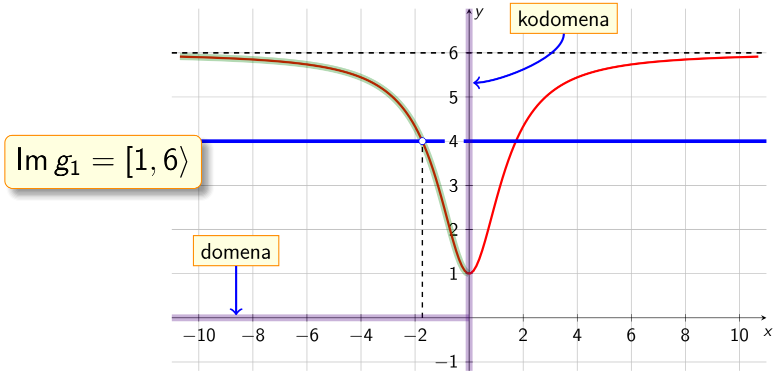
$M = 6 \longleftarrow$ najmanja gornja međa funkcije g



$g : \mathbb{R} \to \operatorname{Im} g$

b) Funkcija g nije bijekcija (jer nije injekcija).

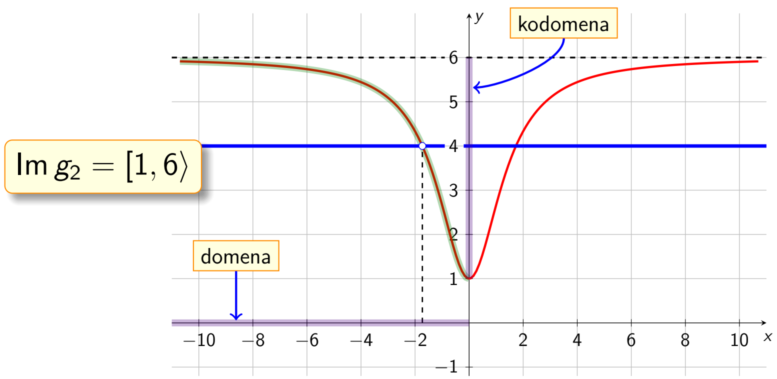
- ✏ g nije injekcija jer, na primjer, pravac $y = 4$ siječe graf funkcije g u više od jedne točke.
- ✏ g je surjekcija jer je njezina kodomena jednaka $\operatorname{Im} g$.



$g_1 : \langle -\infty, 0] \to \mathbb{R}$

c) Funkcija g_1 nije bijekcija (jer nije surjekcija).

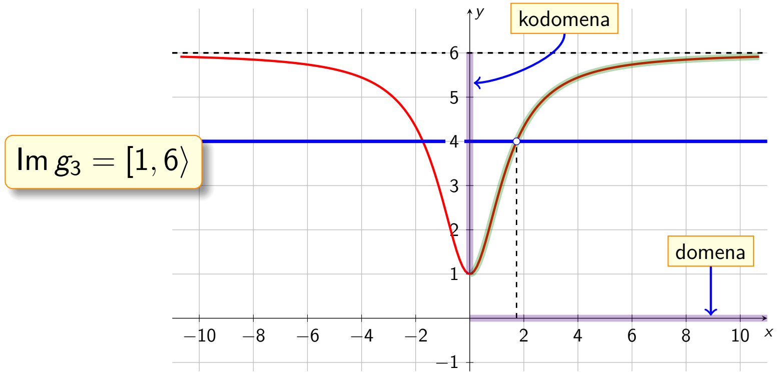
- ✏ g_1 jest injekcija jer svaki pravac paralelan s x-osi siječe graf funkcije g_1 u najviše jednoj točki.
- ✏ g_1 nije surjekcija jer je $\operatorname{Im} g_1 \neq \mathbb{R}$.



$g_2 : \langle -\infty, 0] \to [1, 6\rangle$

d) Funkcija g_2 je bijekcija.

- ✏ g_2 jest injekcija jer svaki pravac paralelan s x-osi siječe graf funkcije g_2 u najviše jednoj točki.
- ✏ g_2 jest surjekcija jer je $\operatorname{Im} g_2 = [1, 6\rangle$.



$g_3 : [0, +\infty\rangle \to [1, 6]$

$6 \notin \operatorname{Im} g_3$

e) Funkcija g_3 nije bijekcija (jer nije surjekcija).

✏ g_3 jest injekcija jer svaki pravac paralelan s x-osi siječe graf funkcije g_3 u najviše jednoj točki.

✏ g_3 nije surjekcija jer je $\operatorname{Im} g_3 \neq [1, 6]$.

Rješenje

$$f(x) = \frac{2x^2}{3 - x^2}$$

a) domena $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$

$3 - x^2 \neq 0 \rightsquigarrow x^2 \neq 3 \rightsquigarrow x \neq \pm\sqrt{3}$

$$f(-x) = \frac{2 \cdot (-x)^2}{3 - (-x)^2} = \frac{2x^2}{3 - x^2} = f(x)$$

Funkcija f je parna funkcija.

$$h(x) = 2^{5-x} + 50$$

b) domena $D_h = \mathbb{R}$

$$h(-x) = 2^{5-(-x)} + 50 = 2^{5+x} + 50 \neq \pm h(x)$$

Funkcija h nije niti parna niti neparna.

Protuprimjer $h(-1) \neq \pm h(1)$

$$h(1) = 2^4 + 50 = 66, \quad h(-1) = 2^6 + 50 = 114$$

Zadatak 6

Ispitajte parnost sljedećih funkcija:

a) $f(x) = \dfrac{2x^2}{3 - x^2}$

b) $h(x) = 2^{5-x} + 50$

c) $g(x) = \log_4 \dfrac{3 + 2x}{3 - 2x}$

Parna funkcija

- $x \in D_f \ \Rightarrow \ -x \in D_f$
- $f(-x) = f(x), \ \forall x \in D_f$

Neparna funkcija

- $x \in D_f \ \Rightarrow \ -x \in D_f$
- $f(-x) = -f(x), \ \forall x \in D_f$

$\log_a x^k = k \cdot \log_a x$

$$\boxed{D_g = \left\langle -\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle}$$

$$g(x) = \log_4 \frac{3 + 2x}{3 - 2x}$$

c) domena

$$\frac{3 + 2x}{3 - 2x} > 0$$

$3 + 2x = 0 \qquad 3 - 2x = 0$

$x = -\dfrac{3}{2} \qquad x = \dfrac{3}{2}$

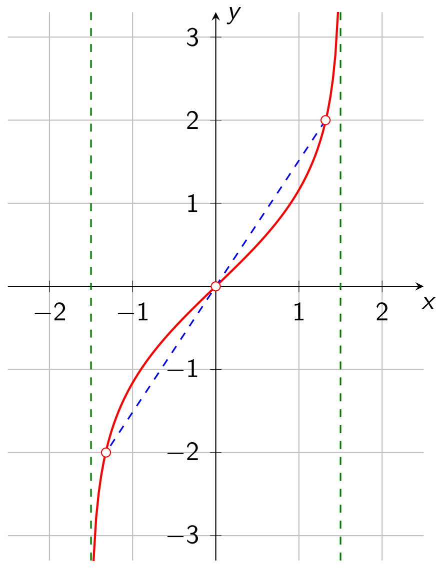
	$-\infty$ … $-\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$ … $\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$ … $+\infty$
$3 + 2x$	$-$	$+$	$+$
$3 - 2x$	$+$	$+$	$-$
$\frac{3+2x}{3-2x}$	$-$	$+$	$-$

$$g(-x) = \log_4 \frac{3 + 2 \cdot (-x)}{3 - 2 \cdot (-x)} = \log_4 \frac{3 - 2x}{3 + 2x} = \log_4 \left(\frac{3 + 2x}{3 - 2x} \right)^{-1} =$$

$$= -\log_4 \frac{3 + 2x}{3 - 2x} = -g(x)$$

g je neparna funkcija

Graf funkcije g



$$g(x) = \log_4 \frac{3+2x}{3-2x}$$

$$D_g = \left\langle -\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle$$

$$\lim_{x \to \frac{3}{2}-} g(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\frac{3}{2}+} g(x) = -\infty$$