Realne funkcije realne varijable – 3. dio

MATEMATIKA 2

Damir Horvat

FOI, Varaždin

Zadatak 1

Zadane su funkcije $f(x) = \ln(x-3)$ *i* $g(x) = x^2 + x + 1$.

a) *Odredite pravila pridruživanja funkcija* $f \circ g$ *i* $g \circ f$.

b) *Na kojim su domenama od funkcija* f *i* g *kompozicije* $f \circ g$ *i* $g \circ f$ *dobro definirane?*

$\boxed{g(x) = x^2 + x + 1}$ $\boxed{f(x) = \ln(x-3)}$

$\boxed{\ln = \log_e}$

Rješenje

a)

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f\big(x^2 + x + 1\big) = \\ = \ln\big((x^2 + x + 1) - 3\big) = \ln\big(x^2 + x - 2\big)$$

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g\big(\ln(x-3)\big) = \\ = \big(\ln(x-3)\big)^2 + \ln(x-3) + 1 = \\ = \ln^2(x-3) + \ln(x-3) + 1$$

Budite jako oprezni

$$\big(\log_a x\big)^k \neq \log_a x^k$$

$$\log_a^k x = \big(\log_a x\big)^k$$

$\boxed{f(x) = \ln(x-3)}$ $\boxed{(g \circ f)(x) = \ln^2(x-3) + \ln(x-3) + 1}$

$\boxed{g(x) = x^2 + x + 1}$ $\boxed{(f \circ g)(x) = \ln\big(x^2 + x - 2\big)}$

$\boxed{\operatorname{Im} f \subseteq D_g}$

b) domena funkcije $g \circ f$

$x - 3 > 0 \rightsquigarrow x > 3$

$D_{g \circ f} = \langle 3, +\infty\rangle$

domena funkcije $f \circ g$

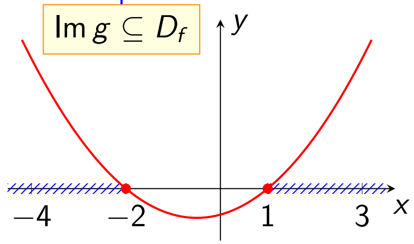
$x^2 + x - 2 > 0$

$x^2 + x - 2 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$$

$x_1 = 1, \ x_2 = -2$

$\boxed{\operatorname{Im} g \subseteq D_f}$



$D_{f \circ g} = \langle -\infty, -2\rangle \cup \langle 1, +\infty\rangle$

Funkcije f i g moramo gledati na sljedeći način:

$f : \langle 3, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$

$g : \langle -\infty, -2\rangle \cup \langle 1, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$

Zadatak 2

Dana su pravila pridruživanja funkcija f i g s

$$f(x) = \log_3 x - 2 \quad i \quad g(x) = \sqrt{1-x}.$$

a) *Pronađite inverzne funkcije od f i g te komentirajte na kojim su domenama i kodomenama funkcije f i g bijekcije.*

b) *Nacrtajte na istoj slici graf funkcije f i graf funkcije f^{-1}.*

c) *Nacrtajte na istoj slici graf funkcije g i graf funkcije g^{-1}.*

Rješenje

$\log_a x = b \rightsquigarrow x = a^b$

$y = f(x) \;\Leftrightarrow\; x = f^{-1}(y)$

a)

$$f(x) = \log_3 x - 2$$

$$\begin{aligned} y &= \log_3 x - 2 \\ -\log_3 x &= -y - 2 \,/\cdot(-1) \\ \log_3 x &= y + 2 \\ x &= 3^{y+2} \end{aligned}$$

$$f^{-1}(y) = 3^{y+2}$$

$$\boxed{f^{-1}(x) = 3^{x+2}}$$

$$f : \langle 0, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$$

$$f^{-1} : \mathbb{R} \to \langle 0, +\infty\rangle$$

$$g(x) = \sqrt{1-x}$$

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{1-x} \,/^2 \\ y^2 &= 1 - x \\ x &= 1 - y^2 \end{aligned}$$

uz uvjet $y \geqslant 0$

$$g^{-1}(y) = 1 - y^2$$

$$\boxed{g^{-1}(x) = 1 - x^2}$$

laž

$$-5 = 5 \,/^2$$

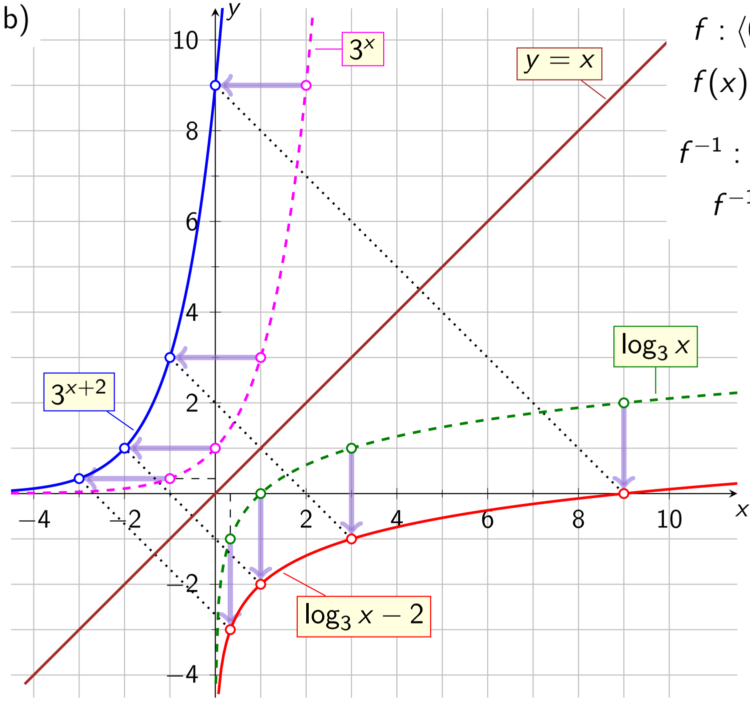
$$25 = 25$$

istina

$$g : \langle -\infty, 1] \to [0, +\infty\rangle$$

$$g^{-1} : [0, +\infty\rangle \to \langle -\infty, 1]$$

b)



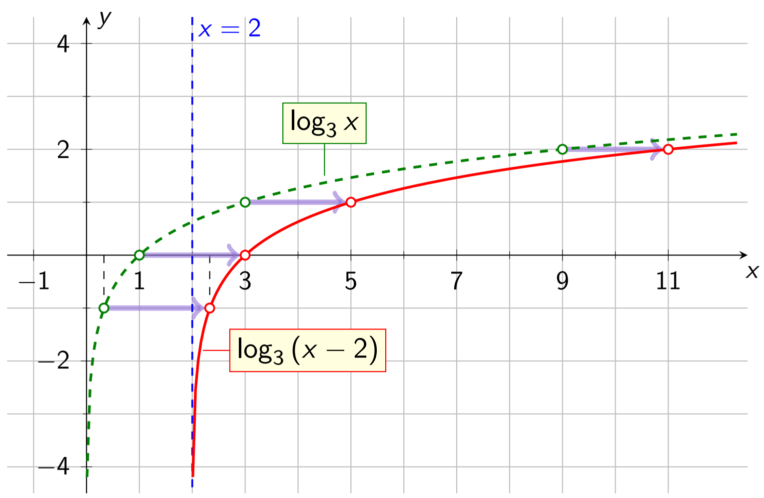
$$f : \langle 0, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$$

$$f(x) = \log_3 x - 2$$

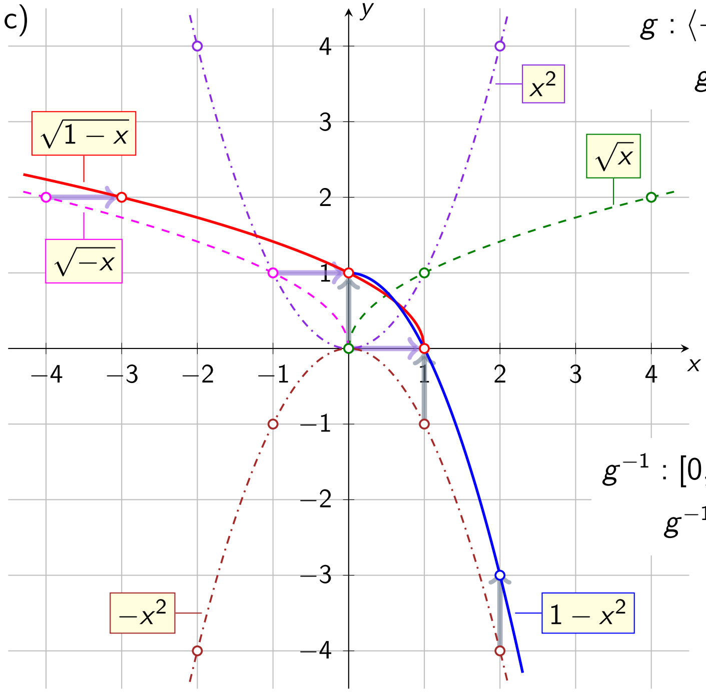
$$f^{-1} : \mathbb{R} \to \langle 0, +\infty\rangle$$

$$f^{-1}(x) = 3^{x+2}$$

Graf funkcije $h(x) = \log_3 (x - 2)$



c)



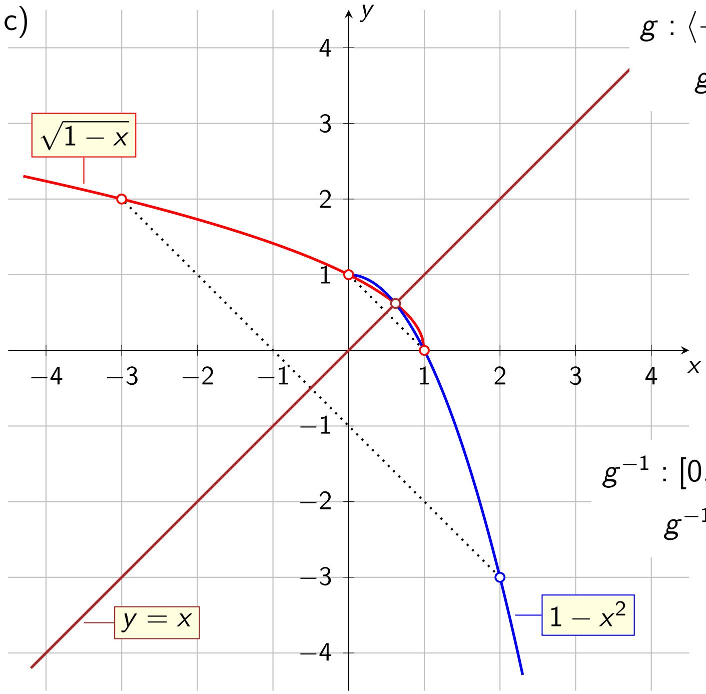
$g : \langle -\infty, 1] \to [0, +\infty\rangle$

$g(x) = \sqrt{1-x}$

$g^{-1} : [0, +\infty\rangle \to \langle -\infty, 1]$

$g^{-1}(x) = 1 - x^2$

c)



$g : \langle -\infty, 1] \to [0, +\infty\rangle$

$g(x) = \sqrt{1-x}$

$g^{-1} : [0, +\infty\rangle \to \langle -\infty, 1]$

$g^{-1}(x) = 1 - x^2$

Zadatak 3

Zadana je funkcija $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$.

a) *Dokažite da je funkcija* f *monotona na intervalu* $\langle 1, +\infty\rangle$.

b) *Dokažite da je funkcija* f *monotona na intervalu* $\langle -\infty, 1\rangle$.

c) *Dokažite da funkcija* f *nije monotona na svojoj prirodnoj domeni.*

Rješenje

Zbog lakšeg rješavanja a) i b) dijela zadatka, pravilo pridruživanja funkcije f napisat ćemo u drukčijem obliku.

$$f(x) = \frac{x+2}{x-1} = \frac{(x-1)+3}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} + \frac{3}{x-1} = 1 + \frac{3}{x-1}$$

$$f(x) = 1 + \frac{3}{x-1}$$

a) Neka su $x_1, x_2 \in \langle 1, +\infty\rangle$ takvi da je $x_1 < x_2$.

$$\boxed{x_1 < x_2} \implies$$

$$x_1 - 1 < x_2 - 1 \;/ : \underbrace{\overbrace{(x_1-1)}^{>0}\overbrace{(x_2-1)}^{>0}}_{>0} \implies$$

$$\frac{1}{x_2-1} < \frac{1}{x_1-1} \;/ \cdot 3 \implies$$

$$\frac{3}{x_2-1} < \frac{3}{x_1-1} \implies$$

$$1 + \frac{3}{x_2-1} < 1 + \frac{3}{x_1-1} \implies$$

$$f(x_2) < f(x_1) \implies$$

$$\boxed{f(x_1) > f(x_2)}$$

f strogo pada na $\langle 1, +\infty\rangle$

Ovdje je iznimno bitna pretpostavka da su oba broja x_1 i x_2 strogo veći od 1. Zbog toga su faktori $x_1 - 1$ i $x_2 - 1$ pozitivni pa je njihov produkt pozitivan. Stoga nejednadžbu dijelimo s pozitivnim brojem pa znak nejednakosti ostaje sačuvan.

Strogo padajuća funkcija

$(\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}_f)(x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) > f(x_2))$

b) Neka su $x_1, x_2 \in \langle -\infty, 1\rangle$ takvi da je $x_1 < x_2$.

$$f(x) = 1 + \frac{3}{x-1}$$

$$\boxed{x_1 < x_2} \Longrightarrow$$

$$x_1 - 1 < x_2 - 1 \;/ : \underbrace{\overbrace{(x_1-1)}^{<0}\overbrace{(x_2-1)}^{<0}}_{>0} \Longrightarrow$$

$$\frac{1}{x_2-1} < \frac{1}{x_1-1} \;/ \cdot 3 \Longrightarrow$$

$$\frac{3}{x_2-1} < \frac{3}{x_1-1} \Longrightarrow$$

$$1 + \frac{3}{x_2-1} < 1 + \frac{3}{x_1-1} \Longrightarrow$$

$$f(x_2) < f(x_1) \Longrightarrow$$

$$\boxed{f(x_1) > f(x_2)}$$

f strogo pada na $\langle -\infty, 1\rangle$

Ovdje je iznimno bitna pretpostavka da su oba broja x_1 i x_2 strogo manji od 1. Zbog toga su faktori $x_1 - 1$ i $x_2 - 1$ negativni pa je njihov produkt pozitivan. Stoga nejednadžbu dijelimo s pozitivnim brojem pa znak nejednakosti ostaje sačuvan.

Strogo padajuća funkcija

$$(\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}_f)(x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) > f(x_2))$$

c) Neka su $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ takvi da je $x_1 < x_2$.

$$f(x) = 1 + \frac{3}{x-1}$$

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow$$

$$x_1 - 1 < x_2 - 1 \;/ : (x_1-1)(x_2-1)$$

Kako su x_1 i x_2 bilo koji brojevi različiti od 1, faktori $x_1 - 1$ i $x_2 - 1$ mogu biti istog ili različitog predznaka. Stoga i njihov produkt može biti pozitivan ili negativan. Dakle, nakon dijeljenja nejednadžbe s $(x_1 - 1)(x_2 - 1)$ znak nejednakosti može, ali i ne mora ostati sačuvan.

Ako faktori $x_1 - 1$ i $x_2 - 1$ imaju iste predznake, tada znak nejednakosti ostaje sačuvan, a u protivnom se znak nejednakosti preokreće. To zapravo znači da funkcija f nije monotona na $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Monotone funkcije moraju stalno čuvati znak nejednakosti (rastuće funkcije) ili ga moraju stalno preokretati (padajuće funkcije) za bilo koji izbor dva elementa x_1 i x_2 iz domene.

c) Možemo direktno protuprimjerom pokazati da funkcija f nije monotona na $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

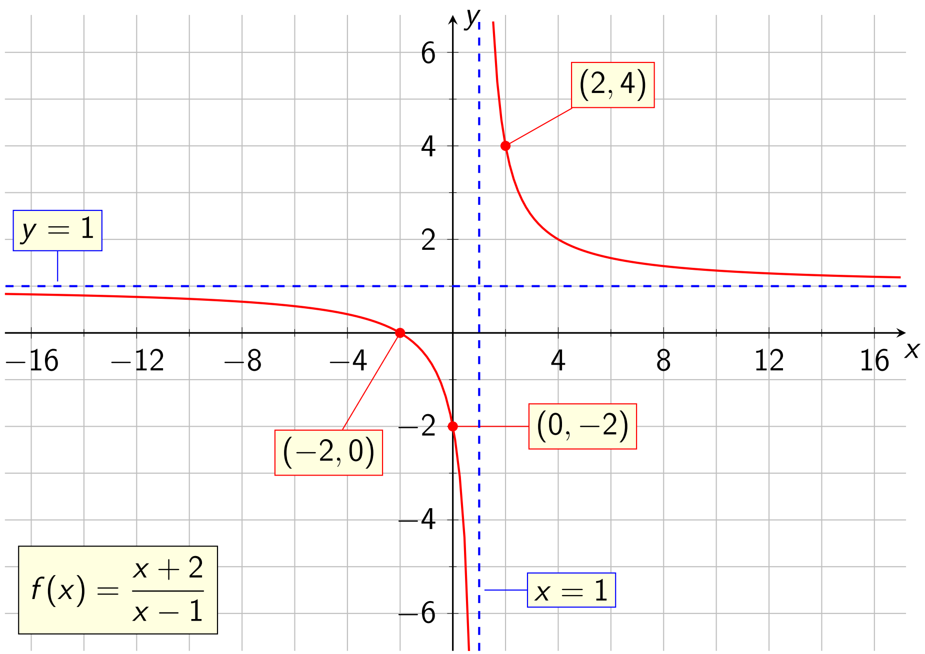
$$f(x) = \frac{x+2}{x-1}$$

$$f(-2) = \frac{-2+2}{-2-1} = 0, \quad f(0) = \frac{0+2}{0-1} = -2, \quad f(2) = \frac{2+2}{2-1} = 4$$

$$-2 < 0 \Longrightarrow \underset{0}{\underset{\parallel}{f(-2)}} > \underset{-2}{\underset{\parallel}{f(0)}} \rightsquigarrow$$ f nije rastuća na $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ jer nije sačuvan znak nejednakosti

$$0 < 2 \Longrightarrow \underset{-2}{\underset{\parallel}{f(0)}} < \underset{4}{\underset{\parallel}{f(2)}} \rightsquigarrow$$ f nije padajuća na $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ jer nije preokrenut znak nejednakosti

$$\mathbb{R} \setminus \{1\} = \langle -\infty, 1\rangle \cup \langle 1, +\infty\rangle$$



Zadatak 4

Zadana je funkcija $f:\mathbb{R}\to[0,+\infty\rangle$, $f(x)=\dfrac{3x^2}{1+x^2}$.

a) *Ispitajte je li funkcija* f *surjekcija.*

b) *Ispitajte je li funkcija* f *injekcija.*

c) *Neka je* $g:\langle-\infty,0]\to K$ *funkcija koja ima isto pravilo pridruživanja kao i funkcija* f. *Odredite* $K\subseteq\mathbb{R}$ *tako da* g *bude bijekcija i odredite pravilo pridruživanja njezine inverzne funkcije.*

Rješenje

$f:\mathbb{R}\to[0,+\infty\rangle,\ f(x)=\dfrac{3x^2}{1+x^2}$

a) Neka je $y\in[0,+\infty\rangle$ proizvoljan element iz kodomene. Tražimo barem jedan $x\in\mathbb{R}$ iz domene za koji vrijedi $f(x)=y$.

$$\frac{3x^2}{1+x^2}=y$$
$$3x^2=(1+x^2)y$$
$$3x^2-x^2y=y$$
$$x^2(3-y)=y$$
$$x^2=\frac{y}{3-y}$$

$$\boxed{x=\pm\sqrt{\frac{y}{3-y}}}$$

$$\frac{y}{3-y}\geqslant 0 \qquad y=0 \qquad 3-y=0 \qquad y=3$$

	$-\infty$ … 0	0 … 3	3 … $+\infty$
y	$-$	$+$	$+$
$3-y$	$+$	$+$	$-$
$\frac{y}{3-y}$	$-$	$+$	$-$

$$\boxed{\operatorname{Im} f=[0,3\rangle}$$

$\operatorname{Im} f\neq[0,+\infty\rangle$

f nije surjekcija

Definicija surjekcije

Funkcija $f:D\to K$ je surjekcija ako je $\operatorname{Im} f=K$, tj.

$$(\forall y\in K)(\exists x\in D)(f(x)=y).$$

b)

$f:\mathbb{R}\to[0,+\infty\rangle,\ f(x)=\dfrac{3x^2}{1+x^2}$

$$f(x_1)=f(x_2)$$
$$\frac{3x_1^2}{1+x_1^2}=\frac{3x_2^2}{1+x_2^2}$$
$$3x_1^2(1+x_2^2)=3x_2^2(1+x_1^2)$$
$$3x_1^2+3x_1^2x_2^2=3x_2^2+3x_1^2x_2^2$$
$$3x_1^2=3x_2^2$$
$$x_1^2=x_2^2$$
$$x_1=\pm x_2$$

f nije injekcija

Na ovaj zaključak utječe domena funkcije f koja je jednaka $\mathbb{R}$. U domeni se nalazi barem jedan par suprotnih brojeva pa onda iz $x_1^2=x_2^2$ ne mora nužno slijediti da je $x_1=x_2$, može biti i $x_1=-x_2$.

Kako je f parna funkcija, možemo u ovom slučaju protuprimjerom brže dokazati da nije injekcija. Na primjer: $-1\neq1$, ali $f(-1)=f(1)$. Različiti elementi domene ne preslikavaju se uvijek u različite elemente kodomene.

ovaj način prolazi jedino ako želimo dokazati da funkcija **nije injekcija**

Definicija injekcije

Funkcija $f:D\to K$ je injekcija ako

$$(\forall x_1,x_2\in D)\big(f(x_1)=f(x_2)\ \Rightarrow\ x_1=x_2\big).$$

c)

$f:\mathbb{R}\to[0,+\infty\rangle,\ f(x)=\dfrac{3x^2}{1+x^2}$

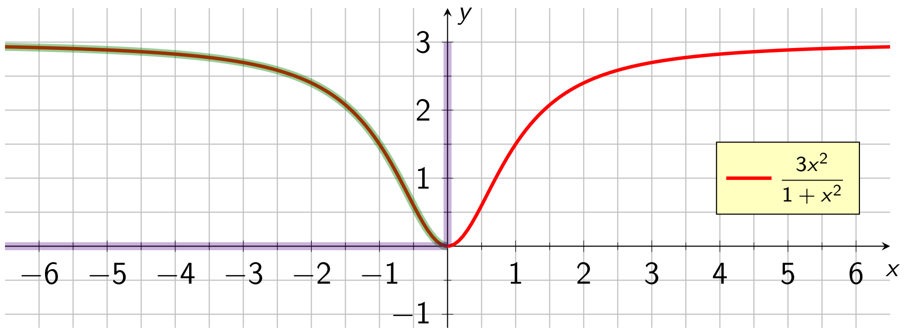
$$x=\pm\sqrt{\frac{y}{3-y}}$$
$$\operatorname{Im} f=[0,3\rangle$$

Funkcije f i g imaju isto pravilo pridruživanja. Kako su u domeni funkcije g samo brojevi manji ili jednaki od nule, za zadani $y\in K$ postoji najviše jedan $x\in\langle-\infty,0]$ takav da je $g(x)=y$ i pritom je $\boxed{x=-\sqrt{\frac{y}{3-y}}}$. Stoga je također $\operatorname{Im} g=[0,3\rangle$ pa mora biti $\boxed{K=[0,3\rangle}$ tako da g bude surjekcija. Funkcija g je injekcija jer u njezinoj domeni nema niti jednog para suprotnih brojeva koji su "kvarili" injektivnost kod funkcije f.

$$\boxed{g^{-1}(x)=-\sqrt{\frac{x}{3-x}}}$$

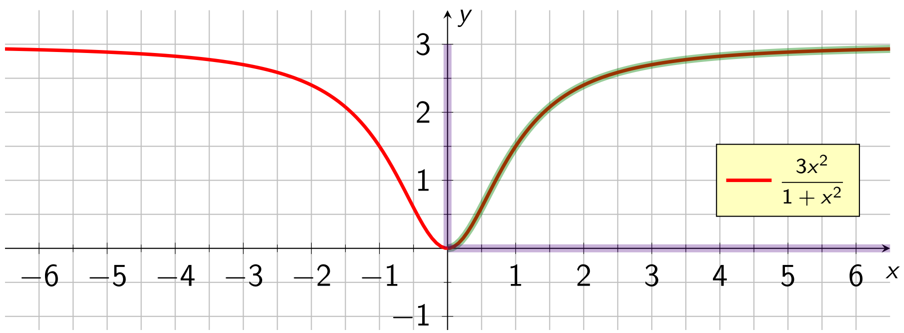
$g:\langle-\infty,0]\to K,\ g(x)=\dfrac{3x^2}{1+x^2}$

$$g^{-1}:[0,3\rangle\to\langle-\infty,0]$$



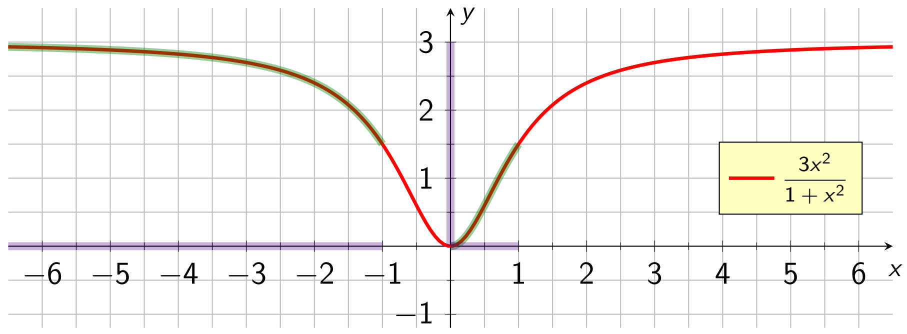
$$g : \langle -\infty, 0] \to [0, 3\rangle, \quad g(x) = \frac{3x^2}{1+x^2}$$

$$g^{-1} : [0, 3\rangle \to \langle -\infty, 0], \quad g^{-1}(x) = -\sqrt{\frac{x}{3-x}}$$



$$h : [0, +\infty\rangle \to [0, 3\rangle, \quad h(x) = \frac{3x^2}{1+x^2}$$

$$h^{-1} : [0, 3\rangle \to [0, +\infty\rangle, \quad h^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x}{3-x}}$$



$$k : \langle -\infty, -1] \cup [0, 1\rangle \to [0, 3\rangle, \quad k(x) = \frac{3x^2}{1+x^2}$$

$$k^{-1} : [0, 3\rangle \to \langle -\infty, -1] \cup [0, 1\rangle, \quad k^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{x}{3-x}}, & x \in [0, \frac{3}{2}\rangle \\ -\sqrt{\frac{x}{3-x}}, & x \in [\frac{3}{2}, 3\rangle \end{cases}$$

$$\boxed{f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)}$$

- $A \neq 0, \ \omega \neq 0$
- Funkcija f je periodična s temeljnim periodom $T = \frac{2\pi}{|\omega|}$.
- Graf funkcije f se dobiva na sljedeći način:
  - Najprije se graf sinusoide $y = \sin x$ "zgusne" ili "rastegne" tako da dobijemo graf funkcije $x \mapsto \sin(\omega x)$ koja ima temeljni period $T = \frac{2\pi}{|\omega|}$.
  - Nakon toga se dobiveni graf skalira duž y-osi tako da "titra" između pravaca $y = -|A|$ i $y = |A|$. Na taj način dobijemo graf funkcije $x \mapsto A \sin(\omega x)$.
  - Konačno, dobiveni graf se translatira za vektor $\left(-\frac{\varphi}{\omega}, 0\right)$.

$$\boxed{f(x) = A\cos(\omega x + \varphi)}$$

- $A \neq 0,\ \omega \neq 0$
- Funkcija f je periodična s temeljnim periodom $T = \frac{2\pi}{|\omega|}$.
- Graf funkcije f se dobiva na sljedeći način:
  - Najprije se graf sinusoide $y = \cos x$ "zgusne" ili "rastegne" tako da dobijemo graf funkcije $x \mapsto \cos(\omega x)$ koja ima temeljni period $T = \frac{2\pi}{|\omega|}$.
  - Nakon toga se dobiveni graf skalira duž y-osi tako da "titra" između pravaca $y = -|A|$ i $y = |A|$. Na taj način dobijemo graf funkcije $x \mapsto A\cos(\omega x)$.
  - Konačno, dobiveni graf se translatira za vektor $\left(-\frac{\varphi}{\omega}, 0\right)$.

Zadatak 5

Odredite inverzne funkcije sljedećih funkcija:

a) $f_1 : \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \to [-3, 3],\ f_1(x) = 3\sin 2x,$

b) $f_2 : \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \to [-3, 3],\ f_2(x) = -3\sin 2x,$

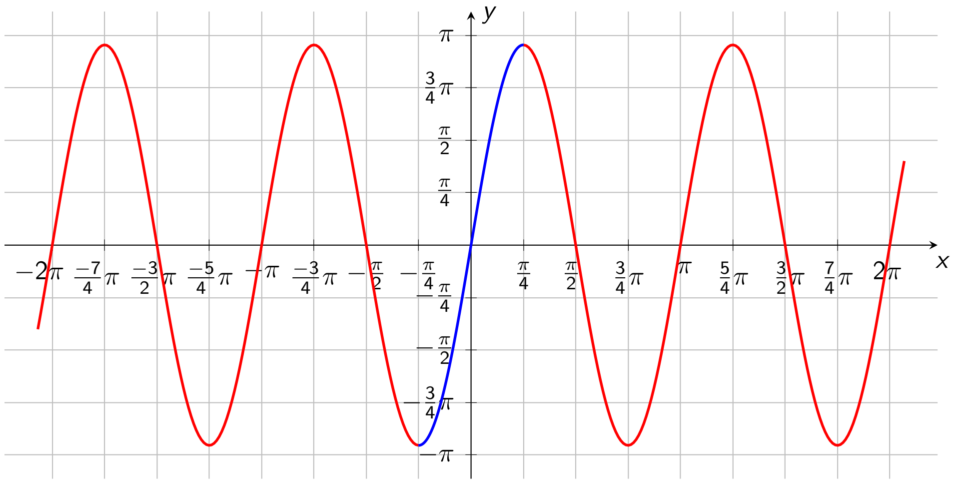
c) $f_3 : \left[-\frac{5}{4}\pi, -\frac{3}{4}\pi\right] \to [-3, 3],\ f_3(x) = 3\sin 2x,$

d) $f_4 : \left[\frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi\right] \to [-3, 3],\ f_4(x) = 3\sin 2x.$

Rješenje

$$T = \frac{2\pi}{|\omega|} = \frac{2\pi}{|2|} = \pi$$

a) $f_1 : \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \to [-3, 3],\ f_1(x) = 3\sin \overset{\substack{\omega \\ \downarrow}}{2}x$



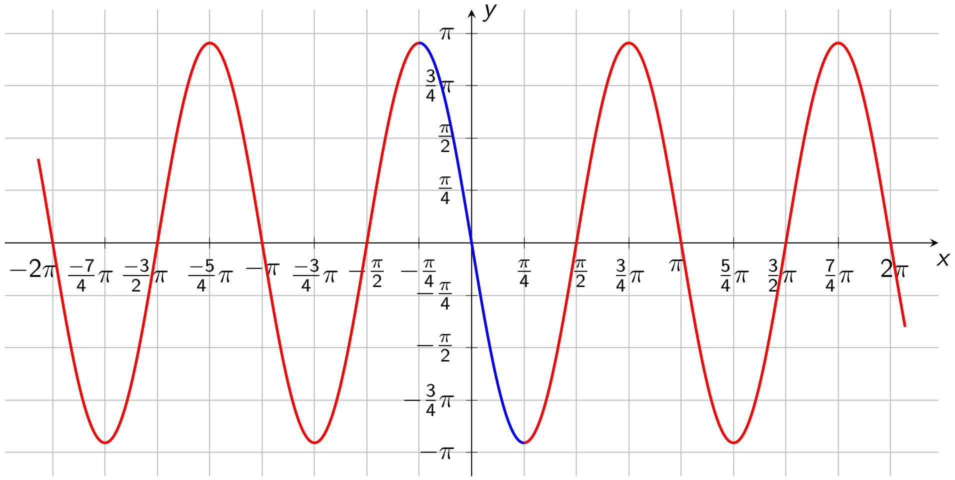
Rješenje

a) $f_1 : \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \to [-3, 3],\ f_1(x) = 3\sin 2x$

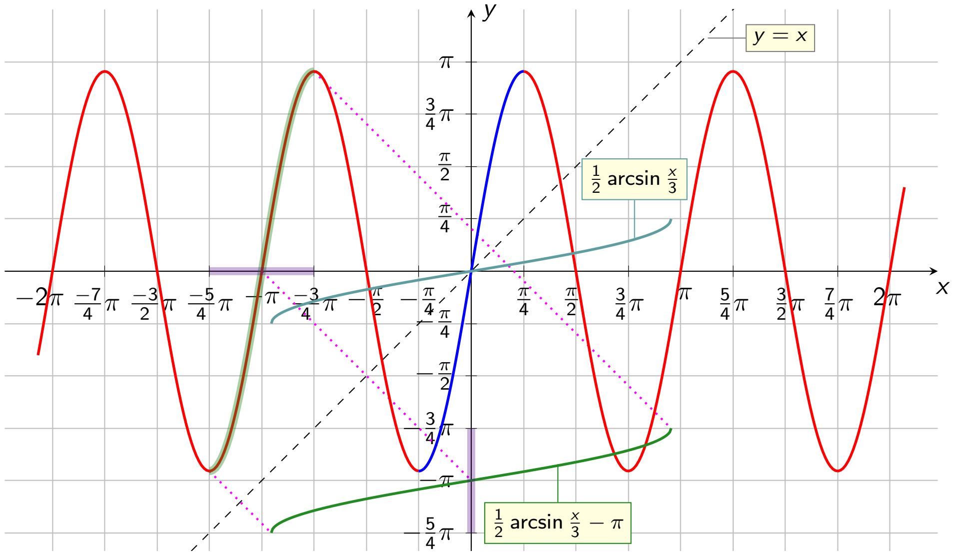
$$\begin{aligned}
y &= 3\sin 2x \\
3\sin 2x &= y \\
\sin 2x &= \frac{y}{3} \\
2x &= \arcsin\frac{y}{3}, \quad 2x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\
x &= \frac{1}{2}\arcsin\frac{y}{3}, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]
\end{aligned}$$

$$f_1^{-1} : [-3, 3] \to \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right],\ f_1^{-1}(x) = \frac{1}{2}\arcsin\frac{x}{3}$$

b) $f_2 : \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \to [-3,3],\ f_2(x) = -3\sin 2x$



c) $f_3 : \left[-\frac{5}{4}\pi, -\frac{3}{4}\pi\right] \to [-3,3],\ f_3(x) = 3\sin 2x$



$f_3^{-1} : [-3,3] \to \left[-\frac{5}{4}\pi, -\frac{3}{4}\pi\right],\ f_3^{-1}(x) = \frac{1}{2}\arcsin\frac{x}{3} - \pi$

b) $f_2 : \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \to [-3,3],\ f_2(x) = -3\sin 2x$

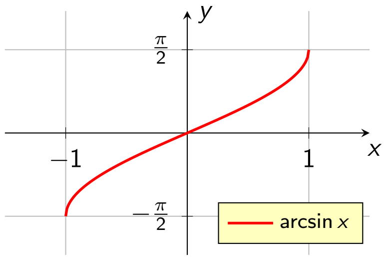
$$y = -3\sin 2x$$

$$-3\sin 2x = y$$

$$\sin 2x = -\frac{y}{3}$$

$$2x = \arcsin\left(-\frac{y}{3}\right), \quad 2x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$x = \frac{1}{2}\arcsin\left(-\frac{y}{3}\right), \quad x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$$



arcsin je neparna funkcija

$$\boxed{\arcsin(-x) = -\arcsin x}$$

$$f_2^{-1} : [-3,3] \to \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right],\ f_2^{-1}(x) = \frac{1}{2}\arcsin\left(-\frac{x}{3}\right)$$

$$f_2^{-1}(x) = -\frac{1}{2}\arcsin\frac{x}{3}$$

d) $f_4^{-1} : [-3,3] \to \left[\frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi\right]$ $\qquad f_4 : \left[\frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi\right] \to [-3,3]$

$f_4(x) = 3\sin 2x$

$f_4^{-1}(x) = -\frac{1}{2}\arcsin\frac{x}{3} + \frac{3}{2}\pi$