Nizovi realnih brojeva

Matematika 2

Damir Horvat

FOI, Varaždin

Zadatak 1

Na nekom natjecanju je podijeljeno ukupno 15 nagrada. Uz prvu nagradu dodjeljuje se i novčani iznos od 5000 kn, a uz svaku sljedeću novčani iznos za 250 kn manji nego uz prethodnu nagradu.

a) *Koliki se novčani iznos dodjeljuje uz petnaestu nagradu?*

b) *Koliki je ukupni novčani fond za nagrade?*

c) *Koliko je ukupno novaca podijeljeno od devete do četrnaeste nagrade?*

Rješenje

- Neka je a_n iznos u kunama koji se dodjeljuje za n-tu nagradu.
- Tada je (a_n) aritmetički niz u kojemu je $a_1 = 5000$ i $d = -250$.

$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d}$

a) Za petnaestu nagradu dodjeljuje se 1500 kn.

$$a_{15} = a_1 + 14d = 5000 + 14 \cdot (-250) = 1500$$

b) $\boxed{S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)}$

$\boxed{a_1 = 5000}$ $\boxed{d = -250}$

$$S_{15} = \frac{15}{2}(a_1 + a_{15})$$

$$S_{15} = \frac{15}{2}(5000 + 1500)$$

$$S_{15} = \frac{15}{2} \cdot 6500$$

$$S_{15} = 48\,750$$

Ukupni novčani fond za nagrade iznosi 48 750 kn.

$\boxed{a_1 = 5000}$ $\boxed{d = -250}$

c) $\boxed{S_n = \frac{n}{2}\left(2a_1 + (n-1)d\right)}$

$$S_{14} = \frac{14}{2}\left(2 \cdot 5000 + 13 \cdot (-250)\right) \qquad S_8 = \frac{8}{2}\left(2 \cdot 5000 + 7 \cdot (-250)\right)$$

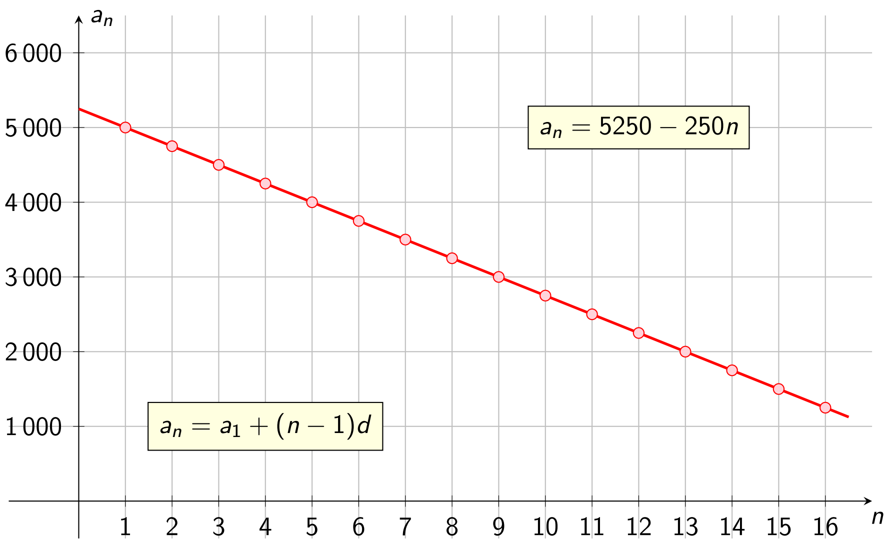
$$S_{14} = \frac{14}{2} \cdot 6750 \qquad S_8 = \frac{8}{2} \cdot 8250$$

$$S_{14} = 47\,250 \qquad S_8 = 33\,000$$

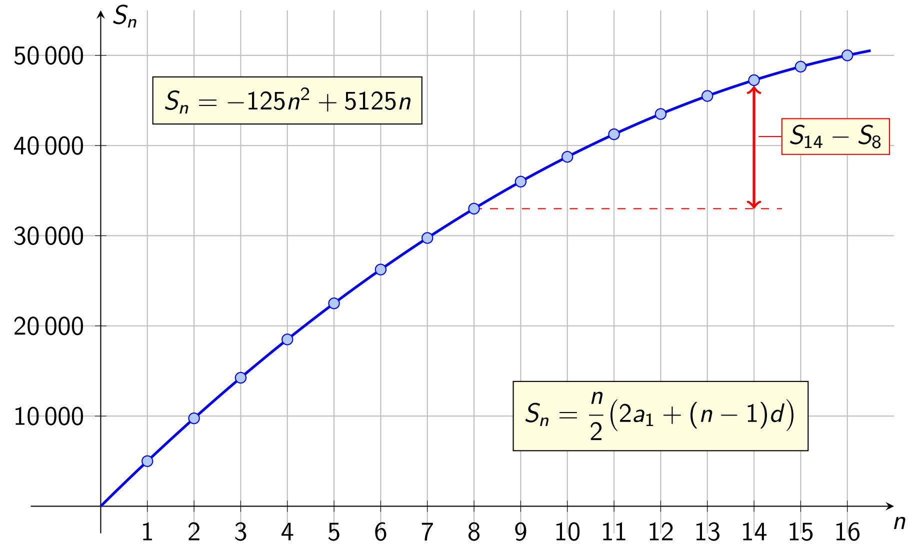
$$S_{14} - S_8 = 47\,250 - 33\,000 = 14\,250$$

Od devete do četrnaeste nagrade podijeljeno je ukupno 14 250 kn.

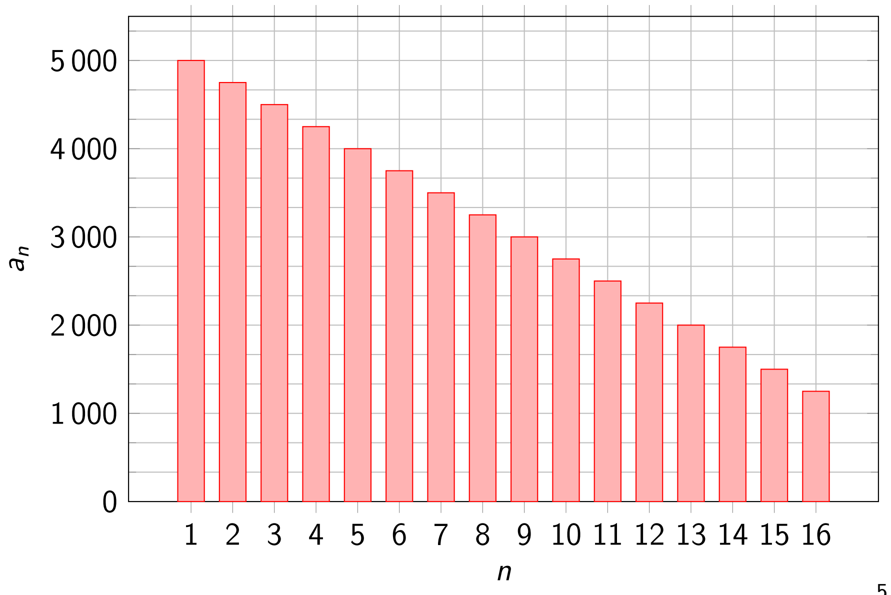
Niz (a_n) – dijagram točkama



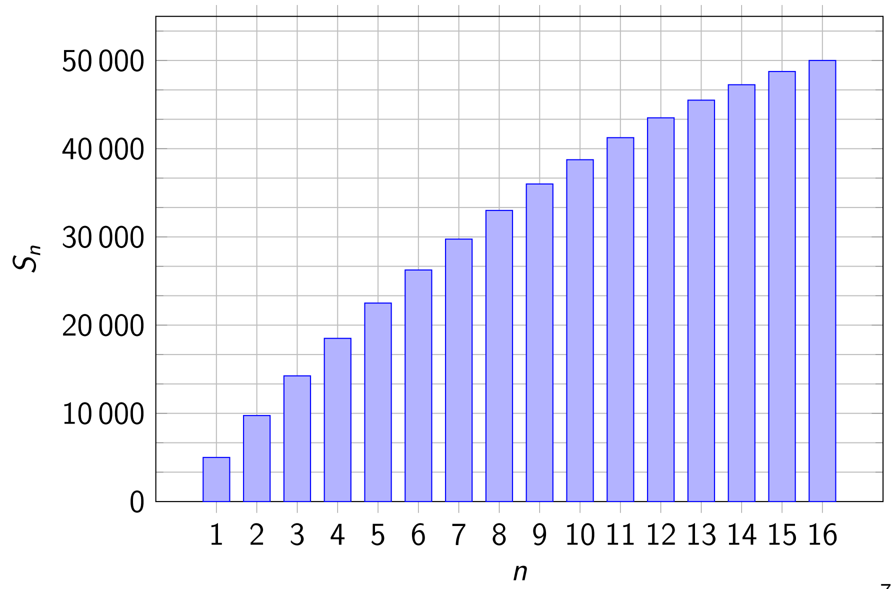
Niz (S_n) – dijagram točkama



Niz (a_n) – uspravni stupci



Niz (S_n) – uspravni stupci



Zadatak 2

Petar zarađuje godišnje 40 000 kn. Ako mu se svake godine godišnja zarada poveća za 2% u odnosu na prethodnu godinu, koliko će Petar ukupno zaraditi nakon 10 godina? Koliko će Petar zaraditi u desetoj godini?

Rješenje

- Neka je a_n Petrova zarada u n-toj godini.
- Iz uvjeta zadatka imamo

$$a_n = a_{n-1} + \frac{2}{100} a_{n-1} = 1.02 a_{n-1}$$

pa je $\dfrac{a_n}{a_{n-1}} = 1.02.$

- Stoga je (a_n) geometrijski niz u kojemu je $a_1 = 40\,000$ i $q = 1.02$.

$\boxed{n = 10}$ $\boxed{a_1 = 40\,000}$ $\boxed{q = 1.02}$

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$S_{10} = 40\,000 \cdot \frac{1.02^{10} - 1}{1.02 - 1}$$

$$S_{10} = 437\,988.84$$

Nakon 10 godina Petar će zaraditi ukupno 437 988.84 kn.

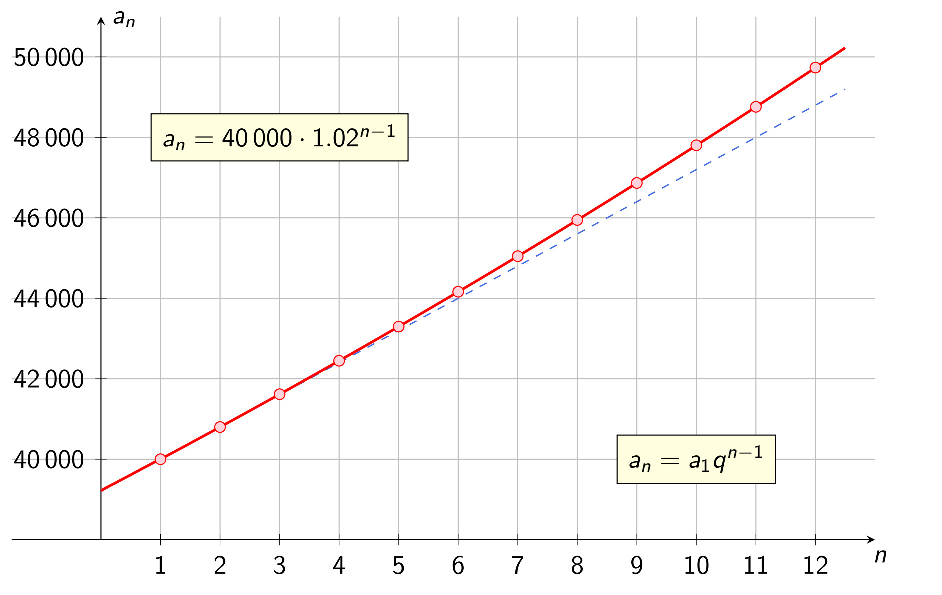
$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$a_{10} = 40\,000 \cdot 1.02^9$$

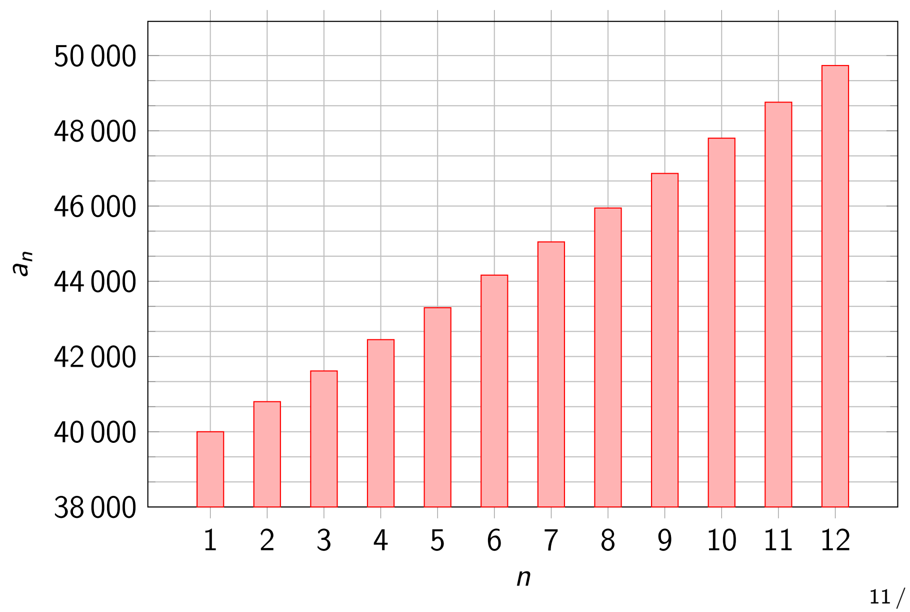
$$a_{10} = 47\,803.70$$

U desetoj godini Petar će zaraditi 47 803.70 kn.

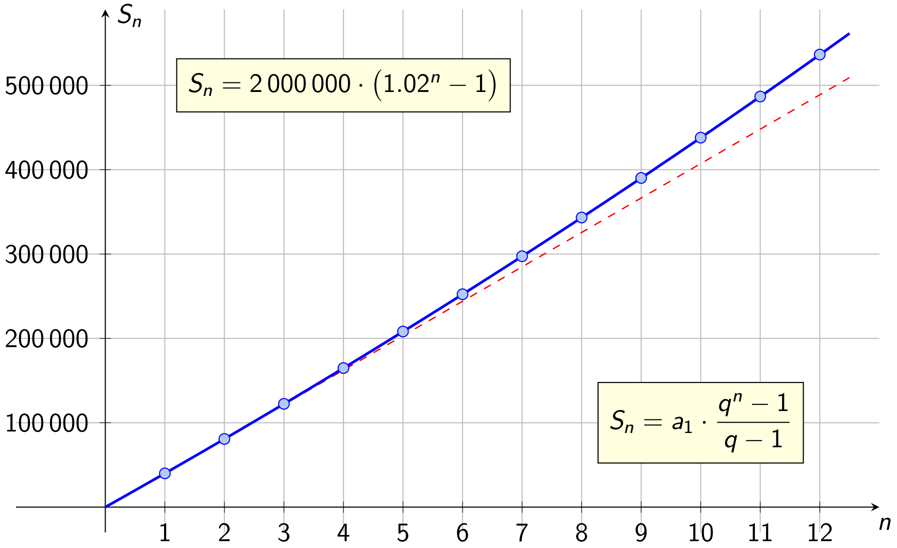
Niz (a_n) – dijagram točkama



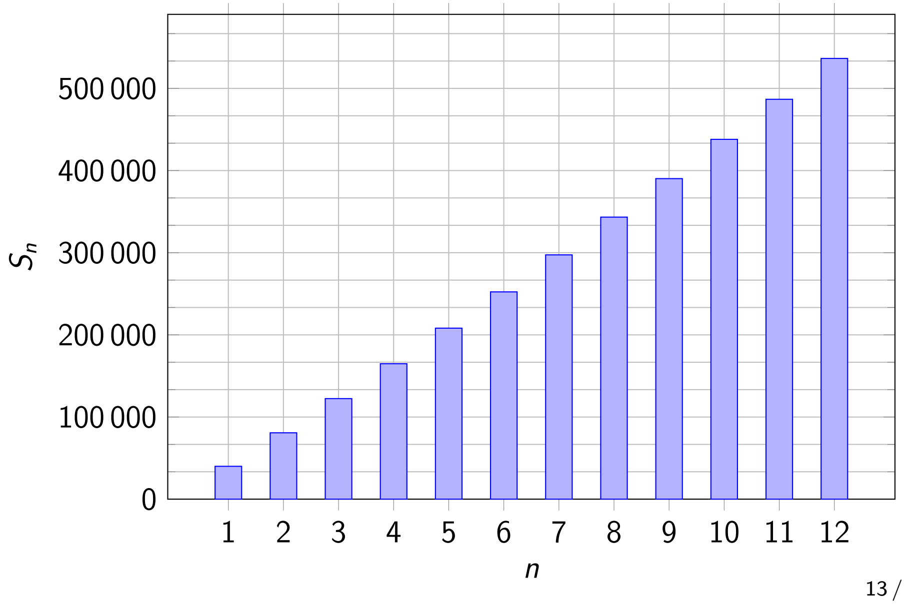
Niz (a_n) – uspravni stupci



Niz (S_n) – dijagram točkama



Niz (S_n) – uspravni stupci



Zadatak 3

Riješite jednadžbu

$$1 - 5 - 11 - \cdots - x = -207$$

uz pretpostavku da brojevi na lijevoj strani čine aritmetički niz.

Rješenje

Zadanu jednadžbu možemo zapisati u obliku

$$\overset{\boxed{a_1}}{1} + \overset{\boxed{a_2}}{(-5)} + \overset{\boxed{a_3}}{(-11)} + \cdots + \overset{\boxed{a_n}}{(-x)} = -207$$

iz čega dobivamo

$$a_1 = 1, \quad d = a_2 - a_1 = -5 - 1 = -6, \quad a_n = -x.$$

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2}\big(2a_1 + (n-1)d\big)}$$

$$\boxed{a_1 = 1} \quad \boxed{d = -6} \quad \boxed{a_n = -x}$$

$$\begin{aligned}
1 + (-5) + (-11) + \cdots + (-x) &= -207 \\
\frac{n}{2}\Big(2 \cdot 1 + (n-1) \cdot (-6)\Big) &= -207 \\
\frac{n}{2}(2 - 6n + 6) &= -207 \\
\frac{n}{2}(8 - 6n) &= -207 \\
4n - 3n^2 &= -207 \\
-3n^2 + 4n + 207 &= 0
\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{gathered} ax^2 + bx + c = 0 \\ x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{gathered}}$$

$$n_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 207}}{2 \cdot (-3)}$$

$$n_{1,2} = \frac{-4 \pm 50}{-6}$$

$$n_1 = -\frac{23}{3}, \quad n_2 = 9$$

$$\begin{aligned}
n &= 9 \\
x &= -a_9 \\
x &= -(a_1 + 8d) \\
x &= -\big(1 + 8 \cdot (-6)\big) \\
x &= -(-47) \\
x &= 47
\end{aligned}$$

Zadatak 4

Odredite opći član niza (a_n) koji je definiran rekurzivnom formulom

$$a_n = a_{n-1} + n, \quad a_1 = 1.$$

Rješenje

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = a_1 + 2 = \boxed{1} + 2 = 3$$

$$a_3 = a_2 + 3 = \boxed{1+2} + 3 = 6$$

$$a_4 = a_3 + 4 = \boxed{1+2+3} + 4 = 10$$

$$\vdots$$

$$a_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

tvrdimo da vrijedi

poznata jednakost

Želimo dokazati da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$a_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Dokaz provodimo matematičkom indukcijom po $n \in \mathbb{N}$.

- Baza indukcije: $n = 1$

$$a_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$n = 1$

$$a_1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2} = 1$$

želimo dokazati

- Korak indukcije

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$, tj. da vrijedi

$$a_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Želimo dokazati da tvrdnja vrijedi za sljedeći prirodni broj $n+1$.

pretpostavka indukcije

$$a_{n+1} = \boxed{a_n} + (n+1) = \boxed{\frac{n(n+1)}{2}} + n + 1 =$$

$$= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

umjesto n uvrstimo $n+1$

$a_n = a_{n-1} + n, \quad a_1 = 1$ ⟵ zadano u zadatku

Zadatak 5

Ispitajte monotonost i omeđenost sljedećih nizova:

a) $a_n = \dfrac{3n}{3n+1}$

b) $b_n = \dfrac{(-1)^n \cdot 6}{n}$

c) $c_n = \dfrac{2^{3n}}{n!}$

d) $d_n = \log_{\frac{1}{2}} \dfrac{n}{n+2}$

Rješenje

$$a_n = \frac{3n}{3n+1}$$

a) monotonost

$$a_1 = \frac{3 \cdot 1}{3 \cdot 1 + 1} = \frac{3}{4} = 0.75 \qquad a_2 = \frac{3 \cdot 2}{3 \cdot 2 + 1} = \frac{6}{7} \approx 0.857$$

$$a_3 = \frac{3 \cdot 3}{3 \cdot 3 + 1} = \frac{9}{10} = 0.9 \qquad a_4 = \frac{3 \cdot 4}{3 \cdot 4 + 1} = \frac{12}{13} \approx 0.923$$

- Uočavamo da vrijedi $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$.
- Tvrdimo da je (a_n) strogo rastući niz, tj. da vrijedi

$$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < \cdots < a_{k-1} < a_k < a_{k+1} < \cdots .$$

- Moramo dokazati (ili opovrgnuti) da je $a_n < a_{n+1}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.

$a_n = \frac{3n}{3n+1}$

- Pretpostavimo da niz (a_n) strogo raste.

$$a_n < a_{n+1} \iff$$

$$\frac{3n}{3n+1} < \frac{3(n+1)}{3(n+1)+1} \iff$$

$n \in \mathbb{N}$

$$\frac{3n}{3n+1} < \frac{3n+3}{3n+4} \Big/ \cdot \underbrace{\overbrace{(3n+1)}^{>0}\overbrace{(3n+4)}^{>0}}_{>0} \iff$$

$$3n(3n+4) < (3n+3)(3n+1) \iff$$

$$9n^2 + 12n < 9n^2 + 3n + 9n + 3 \iff$$

$$0 < 3$$

- Kako nejednakost $0 < 3$ vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$, zaključujemo da i početna pretpostavka $a_n < a_{n+1}$ vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$.
- Dakle, niz (a_n) zaista strogo raste.

omeđenost

$a_n = \frac{3n}{3n+1}$

- Tražimo (ukoliko postoje) $m, M \in \mathbb{R}$ takvi da je $m \leqslant a_n \leqslant M$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.

$$a_n = \frac{\overbrace{3n}^{>0}}{\underbrace{3n+1}_{>0}} \geqslant 0$$

$$a_n \leqslant 1 \iff$$

$$\frac{3n}{3n+1} \leqslant 1 \Big/ \cdot \overbrace{(3n+1)}^{>0} \iff$$

$$3n \leqslant 3n+1 \iff$$

$$0 \leqslant 1$$

- $m = 0$ je jedna donja međa niza (a_n).

Nejednakost $0 \leqslant 1$ vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$. Stoga početna pretpostavka $a_n \leqslant 1$ vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$.

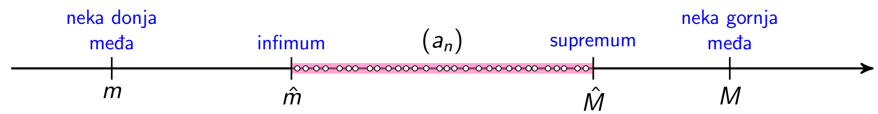
- $M = 1$ je jedna gornja međa niza (a_n).
- Niz (a_n) je omeđen jer je omeđen odozdo i odozgo.

Napomena

- Svaki odozdo omeđeni niz realnih brojeva (a_n) ima beskonačno mnogo donjih međi.
- Skup svih donjih međi odozdo omeđenog niza (a_n) ima najveći element koji zovemo **najveća donja međa** ili **infimum** niza (a_n).
- Svaki odozgo omeđeni niz realnih brojeva (a_n) ima beskonačno mnogo gornjih međi.
- Skup svih gornjih međi odozgo omeđenog niza (a_n) ima najmanji element koji zovemo **najmanja gornja međa** ili **supremum** niza (a_n).

Napomena

- $\hat{m} \in \mathbb{R}$ je infimum niza (a_n) ako vrijedi:
  - $\hat{m}$ je donja međa niza (a_n): $(\forall n \in \mathbb{N})(a_n \geqslant \hat{m})$
  - za svaki $\varepsilon > 0$ interval $[\hat{m}, \hat{m} + \varepsilon\rangle$ sadrži barem jednog člana niza (a_n)
- $\hat{M} \in \mathbb{R}$ je supremum niza (a_n) ako vrijedi:
  - $\hat{M}$ je gornja međa niza (a_n): $(\forall n \in \mathbb{N})(a_n \leqslant \hat{M})$
  - za svaki $\varepsilon > 0$ interval $\langle \hat{M} - \varepsilon, \hat{M}]$ sadrži barem jednog člana niza (a_n)



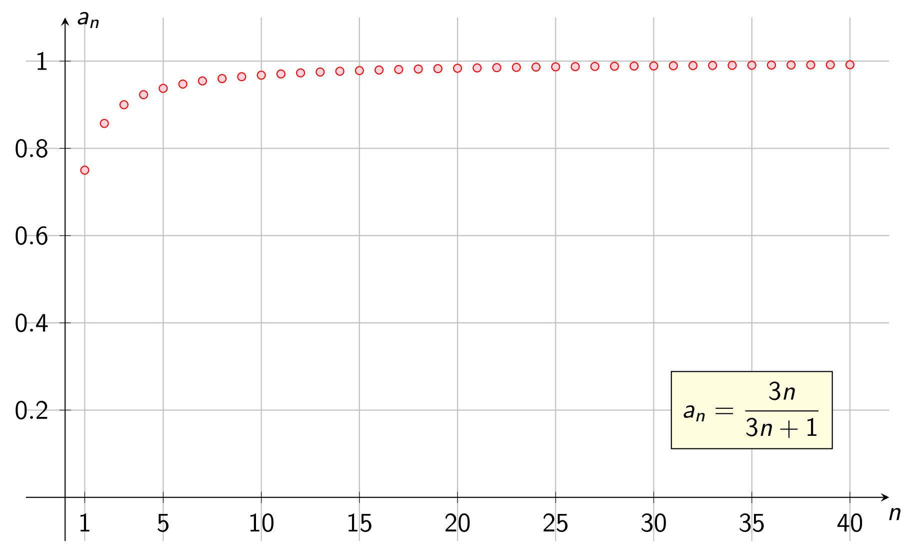
$$a_n = \frac{3n}{3n+1}$$

- $m = 0$ je donja međa niza (a_n), ali nije njegova najveća donja međa.
- Niz (a_n) strogo raste pa je njegova najveća donja međa jednaka prvom članu tog niza, tj. $\hat{m} = a_1 = \frac{3}{4}$.
- $M = 1$ je gornja međa niza (a_n), ali ujedno i njegova najmanja gornja međa, tj. $\hat{M} = 1$.
- Niz (a_n) je odozgo omeđeni i monotoni niz pa je konvergentan. Stoga se njegova najmanja gornja međa podudara s limesom toga niza.

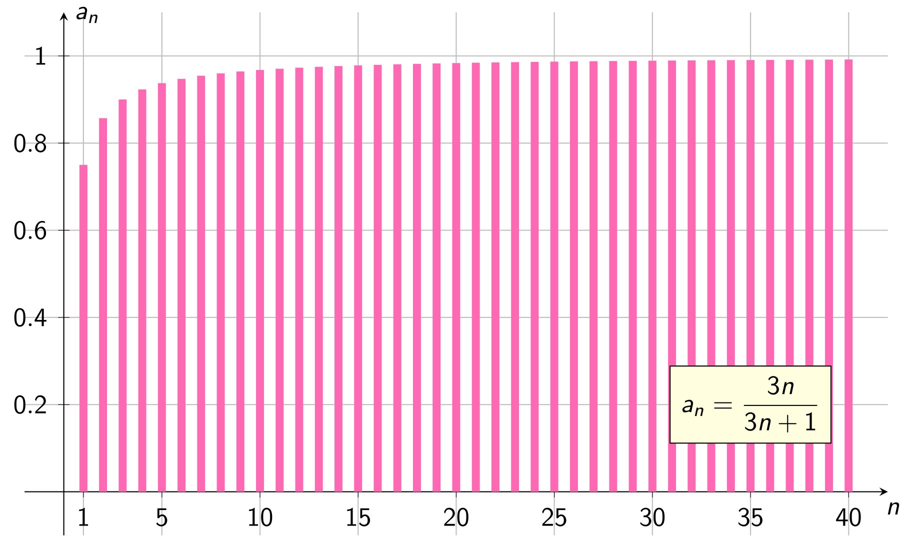
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3n}{3n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(3n+1)-1}{3n+1} = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{3n+1}\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{+\infty} = 1 - 0 = 1$$

Niz (a_n) – dijagram točkama



Niz (a_n) – uspravni stupci



- Generiranje prvih 70 članova niza (a_n) u `python` programskom jeziku (članovi niza su zaokruženi na 5 decimala)

```
[round(3*n/(3*n+1),5) for n in range(1,71)]
```

```
[0.75,    0.85714, 0.9,     0.92308, 0.9375,  0.94737, 0.95455,
 0.96,    0.96429, 0.96774, 0.97059, 0.97297, 0.975,   0.97674,
 0.97826, 0.97959, 0.98077, 0.98182, 0.98276, 0.98361, 0.98438,
 0.98507, 0.98571, 0.9863,  0.98684, 0.98734, 0.9878,  0.98824,
 0.98864, 0.98901, 0.98936, 0.98969, 0.99,    0.99029, 0.99057,
 0.99083, 0.99107, 0.9913,  0.99153, 0.99174, 0.99194, 0.99213,
 0.99231, 0.99248, 0.99265, 0.99281, 0.99296, 0.9931,  0.99324,
 0.99338, 0.99351, 0.99363, 0.99375, 0.99387, 0.99398, 0.99408,
 0.99419, 0.99429, 0.99438, 0.99448, 0.99457, 0.99465, 0.99474,
 0.99482, 0.9949,  0.99497, 0.99505, 0.99512, 0.99519, 0.99526]
```

$$b_n = \frac{(-1)^n \cdot 6}{n}$$

b) monotonost

$$b_1 = \frac{(-1)^1 \cdot 6}{1} = -6 \qquad b_2 = \frac{(-1)^2 \cdot 6}{2} = 3$$

$$b_3 = \frac{(-1)^3 \cdot 6}{3} = -2 \qquad b_4 = \frac{(-1)^4 \cdot 6}{4} = \frac{3}{2} = 1.5$$

$$b_5 = \frac{(-1)^5 \cdot 6}{5} = -\frac{6}{5} = -1.2 \qquad b_6 = \frac{(-1)^6 \cdot 6}{6} = 1$$

$$-6,\ 3,\ -2,\ 1.5,\ -1.2,\ 1, \ldots$$

- $b_1 < b_2 \longrightarrow (b_n)$ nije padajući niz
- $b_2 > b_3 \longrightarrow (b_n)$ nije rastući niz
- Dakle, (b_n) nije monoton niz.

$$b_n = \frac{(-1)^n \cdot 6}{n}$$

omeđenost

$$(-1)^1 = (-1)^3 = (-1)^5 = \cdots = -1$$

$$(-1)^2 = (-1)^4 = (-1)^6 = \cdots = 1$$

- Tražimo (ukoliko postoje) $m, M \in \mathbb{R}$ takvi da je $m \leqslant b_n \leqslant M$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.

$$b_n = \frac{(-1)^n \cdot 6}{n} = \begin{cases} -\dfrac{6}{n}, & \text{ako je } n \text{ neparan} \\ \dfrac{6}{n}, & \text{ako je } n \text{ paran} \end{cases}$$

- Dakle, $|b_n| = \dfrac{6}{n}$.
- Tvrdimo da je $|b_n| \leqslant 6$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.

$$|b_n| \leqslant 6 \iff \frac{6}{n} \leqslant 6 \,/\cdot \underbrace{n}_{>0} \iff 6 \leqslant 6n \,/:6 \iff 1 \leqslant n$$

Nejednakost $1 \leqslant n$ vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$. Stoga početna pretpostavka $|b_n| \leqslant 6$ vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$.

$$b_n = \frac{(-1)^n \cdot 6}{n}$$

- Iz $|b_n| \leqslant 6$ slijedi da je $-6 \leqslant b_n \leqslant 6$.
- $m = -6$ je jedna donja međa niza (b_n).
- $M = 6$ je jedna gornja međa niza (b_n).
- Niz (b_n) je omeđen jer je omeđen odozdo i odozgo.

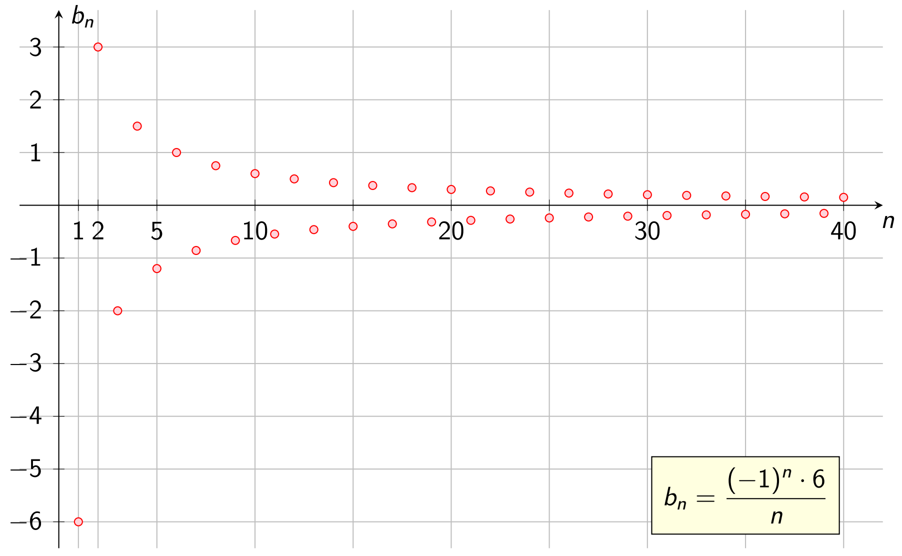
- niz (b_n): $-6,\ 3,\ -2,\ 1.5,\ -1.2,\ 1, \ldots$
- podniz od (b_n) s neparnim indeksima: $-6,\ -2,\ -1.2, \ldots$ ⟵ rastući niz
- podniz od (b_n) s parnim indeksima: $3,\ 1.5,\ 1, \ldots$ ⟵ padajući niz

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n \cdot 6}{n} = \lim_{n\to\infty} \Big(\underbrace{(-1)^n}_{=\pm 1} \cdot \boxed{\frac{6}{n}} \Big) = 0$$

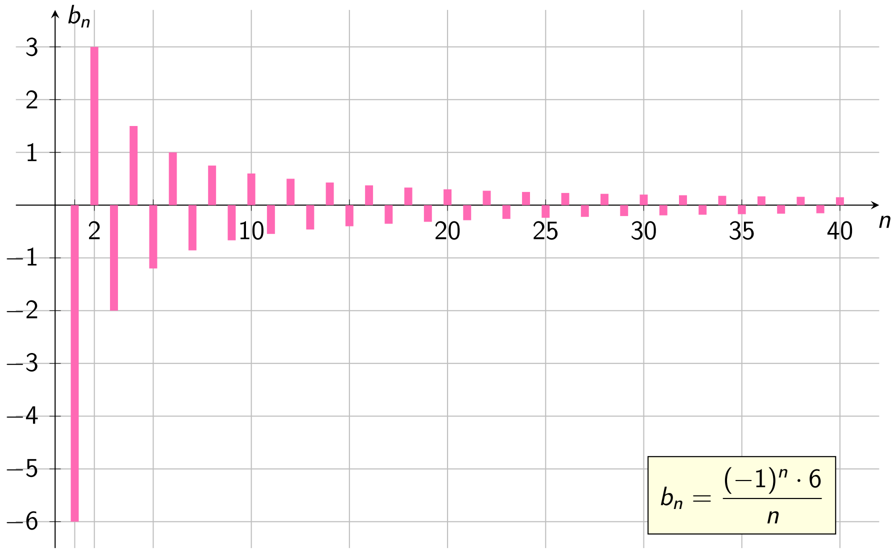
teži prema nuli

- $\hat{m} = b_1 = -6$ je najveća donja međa niza (b_n).
- $\hat{M} = b_2 = 3$ je najmanja gornja međa niza (b_n).

Niz (b_n) – dijagram točkama



Niz (b_n) – uspravni stupci



- Generiranje prvih 70 članova niza (b_n) u python programskom jeziku (članovi niza su zaokruženi na 5 decimala)

```
[round((-1)**n*6/n,5) for n in range(1,71)]
```

```
[-6.0,      3.0,      -2.0,      1.5,      -1.2,      1.0,
 -0.85714,  0.75,     -0.66667,  0.6,      -0.54545,  0.5,
 -0.46154,  0.42857,  -0.4,      0.375,    -0.35294,  0.33333,
 -0.31579,  0.3,      -0.28571,  0.27273,  -0.26087,  0.25,
 -0.24,     0.23077,  -0.22222,  0.21429,  -0.2069,   0.2,
 -0.19355,  0.1875,   -0.18182,  0.17647,  -0.17143,  0.16667,
 -0.16216,  0.15789,  -0.15385,  0.15,     -0.14634,  0.14286,
 -0.13953,  0.13636,  -0.13333,  0.13043,  -0.12766,  0.125,
 -0.12245,  0.12,     -0.11765,  0.11538,  -0.11321,  0.11111,
 -0.10909,  0.10714,  -0.10526,  0.10345,  -0.10169,  0.1,
 -0.09836,  0.09677,  -0.09524,  0.09375,  -0.09231,  0.09091,
 -0.08955,  0.08824,  -0.08696,  0.08571]
```


$n! = 1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n$ $\qquad$ $\boxed{c_n = \dfrac{2^{3n}}{n!}}$

c) monotonost

$$c_1 = \frac{2^{3\cdot 1}}{1!} = \frac{8}{1} = 8 \qquad c_2 = \frac{2^{3\cdot 2}}{2!} = \frac{64}{2} = 32$$

$$c_3 = \frac{2^{3\cdot 3}}{3!} = \frac{512}{6} \approx 85.33 \qquad c_4 = \frac{2^{3\cdot 4}}{4!} = \frac{4096}{24} \approx 170.67$$

- Uočavamo da vrijedi $c_1 < c_2 < c_3 < c_4$.
- Tvrdimo da je (c_n) strogo rastući niz, tj. da vrijedi

$$c_1 < c_2 < c_3 < c_4 < \cdots < c_{k-1} < c_k < c_{k+1} < \cdots .$$

- Moramo dokazati (ili opovrgnuti) da je $c_n < c_{n+1}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{c_n = \dfrac{2^{3n}}{n!}}$

- Pretpostavimo da niz (c_n) strogo raste.

$(n+1)! = n! \cdot (n+1)$

$$c_n < c_{n+1} \iff$$

$$\frac{2^{3n}}{n!} < \frac{2^{3(n+1)}}{(n+1)!} \iff$$

$$\frac{2^{3n}}{n!} < \frac{2^{3n+3}}{(n+1)!} \iff$$

$$\frac{2^{3n}}{n!} < \frac{2^{3n} \cdot 2^3}{n! \cdot (n+1)} \Big/ \cdot \boxed{\frac{n! \cdot (n+1)}{2^{3n}}} > 0 \iff$$

jer je $n \in \mathbb{N}$

$$n + 1 < 2^3 \iff$$

$$n < 7$$

Nejednakost $n < 7$ ne vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$. Stoga niti početna pretpostavka $c_n < c_{n+1}$ ne vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$.

✏ Dakle, (c_n) nije monoton niz.

✏ (c_n) strogo raste samo do 7. člana.
✏ (c_n) raste samo do 8. člana.
✏ Dakle, (c_n) nije rastući niz.

$c_7 = c_8$

$$\overbrace{\underbrace{c_1 < c_2 < \cdots < c_6 < c_7 \leqslant c_8}_{c_n \leqslant c_{n+1} \text{ za } n \leqslant 7}}^{c_n < c_{n+1} \text{ za } n < 7}$$

$$\overbrace{\underbrace{c_7 \geqslant c_8 > c_9 > c_{10} > \cdots}_{c_n \geqslant c_{n+1} \text{ za } n \geqslant 7}}^{c_n > c_{n+1} \text{ za } n > 7}$$

✏ (c_n) strogo pada tek od 8. člana.
✏ (c_n) pada tek od 7. člana.
✏ Dakle, (c_n) nije padajući niz.

omeđenost

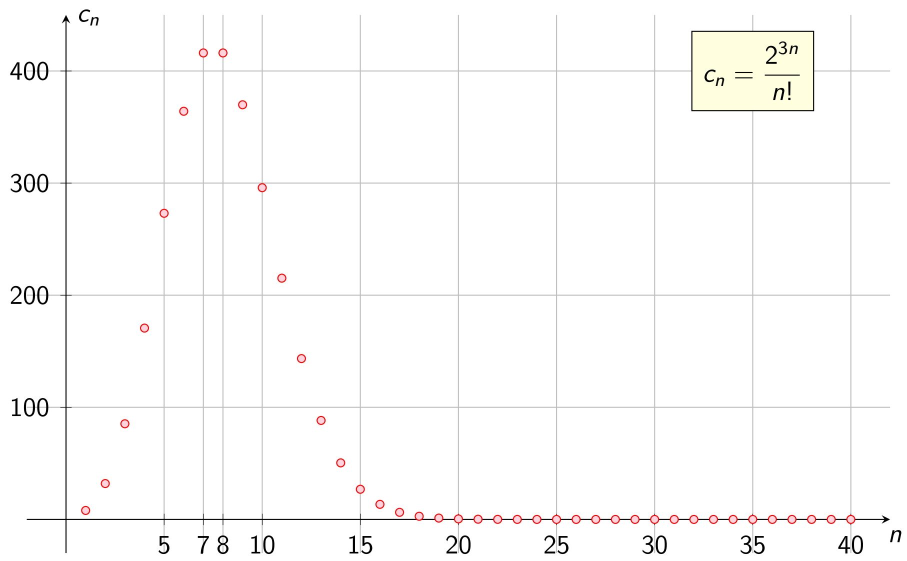
$$c_n = \frac{2^{3n}}{n!}$$

- Tražimo (ukoliko postoje) $m, M \in \mathbb{R}$ takvi da je $m \leqslant c_n \leqslant M$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.
- Očito je $2^{3n} > 0$ i $n! > 0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ pa je $c_n \geqslant 0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Stoga je $m = 0$ jedna donja međa niza (c_n).
- Dokazali smo da niz (c_n) raste do osmog člana, a nakon toga počinje padati i još vrijedi $c_7 = c_8$.

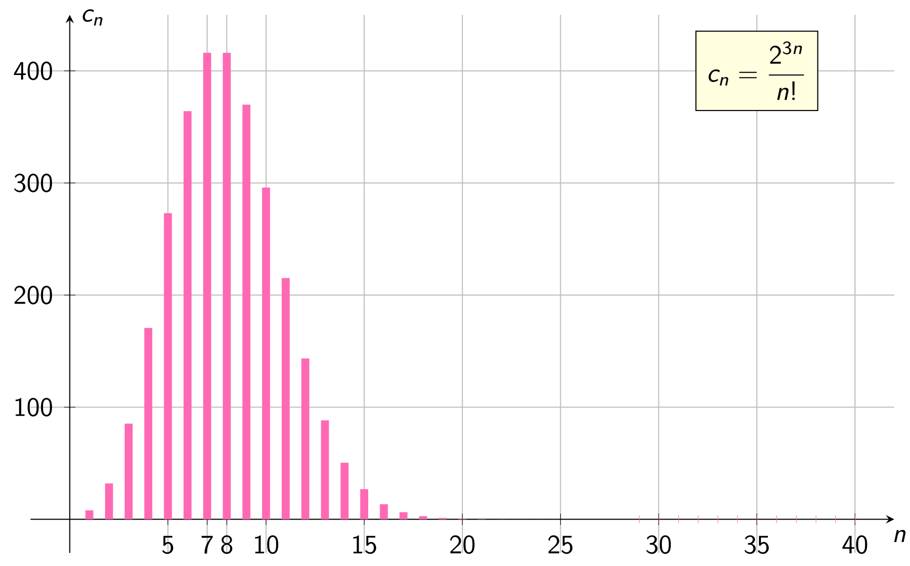
$$c_7 = \frac{2^{3\cdot 7}}{7!} = \frac{2^{21}}{7!} = \frac{2^{21}}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7} = \frac{2^{21}}{2^4\cdot3^2\cdot5\cdot7} = \frac{2^{17}}{315} = \frac{131072}{315}$$

- Stoga je $c_n \leqslant c_7$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ pa je $\hat{M} = c_7$ zapravo najmanja gornja međa niza (c_n).
- Kako je $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 0$ (faktorijel puno brže raste od eksponencijalne funkcije), zaključujemo da je $\hat{m} = 0$ najveća donja međa niza (c_n).
- Dakle, niz (c_n) je omeđen jer je omeđen odozdo i odozgo.

Niz (c_n) – dijagram točkama



Niz (c_n) – uspravni stupci



- Generiranje prvih 70 članova niza (c_n) u python programskom jeziku. Članovi niza su ispisani preko mantise i eksponenta pri čemu je mantisa zaokružena na 5 decimala tako da je moguće vidjeti koliko su jako blizu nule članovi niza već za male n-ove.

```
import math
niz = [2**(3*n)/math.factorial(n) for n in range(1,71)]
list(map(lambda x: format(x,".5e"), niz))
```

```
['8.00000e+00', '3.20000e+01', '8.53333e+01', '1.70667e+02', '2.73067e+02', '3.64089e+02',
 '4.16102e+02', '4.16102e+02', '3.69868e+02', '2.95894e+02', '2.15196e+02', '1.43464e+02',
 '8.82855e+01', '5.04489e+01', '2.69061e+01', '1.34530e+01', '6.33084e+00', '2.81371e+00',
 '1.18472e+00', '4.73887e-01', '1.80529e-01', '6.56467e-02', '2.28336e-02', '7.61122e-03',
 '2.43559e-03', '7.49412e-04', '2.22048e-04', '6.34423e-05', '1.75013e-05', '4.66702e-06',
 '1.20439e-06', '3.01098e-07', '7.29934e-08', '1.71749e-08', '3.92570e-09', '8.72377e-10',
 '1.88622e-10', '3.97099e-11', '8.14563e-12', '1.62913e-12', '3.17878e-13', '6.05482e-14',
 '1.12648e-14', '2.04814e-15', '3.64114e-16', '6.33242e-17', '1.07786e-17', '1.79643e-18',
 '2.93295e-19', '4.69272e-20', '7.36113e-21', '1.13248e-21', '1.70941e-22', '2.53245e-23',
 '3.68357e-24', '5.26224e-25', '7.38560e-26', '1.01870e-26', '1.38129e-27', '1.84172e-28',
 '2.41537e-29', '3.11661e-30', '3.95760e-31', '4.94700e-32', '6.08862e-33', '7.38015e-34',
 '8.81211e-35', '1.03672e-35', '1.20199e-36', '1.37371e-37']
```

- Na primjer, zadnji element u listi je $c_{70} \approx 1.37371 \cdot 10^{-37}$.

$$d_n = \log_{\frac{1}{2}} \frac{n}{n+2}$$

d) monotonost

$$d_1 = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+2} = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} \approx 1.585 \qquad d_2 = \log_{\frac{1}{2}} \frac{2}{2+2} = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = 1$$

$$d_3 = \log_{\frac{1}{2}} \frac{3}{3+2} = \log_{\frac{1}{2}} \frac{3}{5} \approx 0.737 \qquad d_4 = \log_{\frac{1}{2}} \frac{4}{4+2} = \log_{\frac{1}{2}} \frac{2}{3} \approx 0.585$$

- Uočavamo da vrijedi $d_1 > d_2 > d_3 > d_4$.
- Tvrdimo da je (d_n) strogo padajući niz, tj. da vrijedi

$$d_1 > d_2 > d_3 > d_4 > \cdots > d_{k-1} > d_k > d_{k+1} > \cdots.$$

- Moramo dokazati (ili opovrgnuti) da je $d_n > d_{n+1}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.

$$d_n = \log_{\frac{1}{2}} \frac{n}{n+2}$$

- Pretpostavimo da niz (d_n) strogo pada.

$$d_n > d_{n+1} \iff$$

$$\log_{\frac{1}{2}} \frac{n}{n+2} > \log_{\frac{1}{2}} \frac{n+1}{(n+1)+2} \iff$$

$$\log_{\frac{1}{2}} \frac{n}{n+2} > \log_{\frac{1}{2}} \frac{n+1}{n+3} \iff$$

Ako je $0 < a < 1$

$\log_a x > \log_a y \;\Leftrightarrow\; x < y$

$$\frac{n}{n+2} < \frac{n+1}{n+3} \;\Big/ \cdot \underbrace{\overbrace{(n+2)}^{>0}\overbrace{(n+3)}^{>0}}_{>0} \iff$$

$n \in \mathbb{N}$

$$n(n+3) < (n+1)(n+2) \iff$$

$$n^2 + 3n < n^2 + 2n + n + 2 \iff$$

$$0 < 2$$

✏ Dakle, niz (d_n) zaista strogo pada.

- Kako nejednakost $0 < 2$ vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$, zaključujemo da i početna pretpostavka $d_n > d_{n+1}$ vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$.

$$d_n = \log_{\frac{1}{2}} \frac{n}{n+2}$$

- Tražimo (ukoliko postoje) $m, M \in \mathbb{R}$ takvi da je $m \leqslant d_n \leqslant M$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.

$\log_a a^x = x$

$$d_n \geqslant 0 \iff$$

$$\log_{\frac{1}{2}} \frac{n}{n+2} \geqslant \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \iff$$

Ako je $0 < a < 1$

$\log_a x \geqslant \log_a y \;\Leftrightarrow\; x \leqslant y$

$$\frac{n}{n+2} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^0 \iff$$

$$\frac{n}{n+2} \leqslant 1 \;\Big/ \cdot \overbrace{(n+2)}^{>0} \iff$$

$n \in \mathbb{N}$

$$n \leqslant n+2 \iff$$

$$0 \leqslant 2$$

Nejednakost $0 \leqslant 2$ vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$. Stoga početna pretpostavka $d_n \geqslant 0$ vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$.

✏ Dakle, $m = 0$ je jedna donja međa niza (d_n).

$$d_n = \log_{\frac{1}{2}} \frac{n}{n+2}$$

- Kako niz (d_n) strogo pada, slijedi da je $\hat{M} = d_1 = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}$ najmanja gornja međa niza (d_n).

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+2)-2}{n+2} = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{2}{n+2}\right) =$$

$$= 1 - \frac{2}{+\infty} = 1 - 0 = 1$$

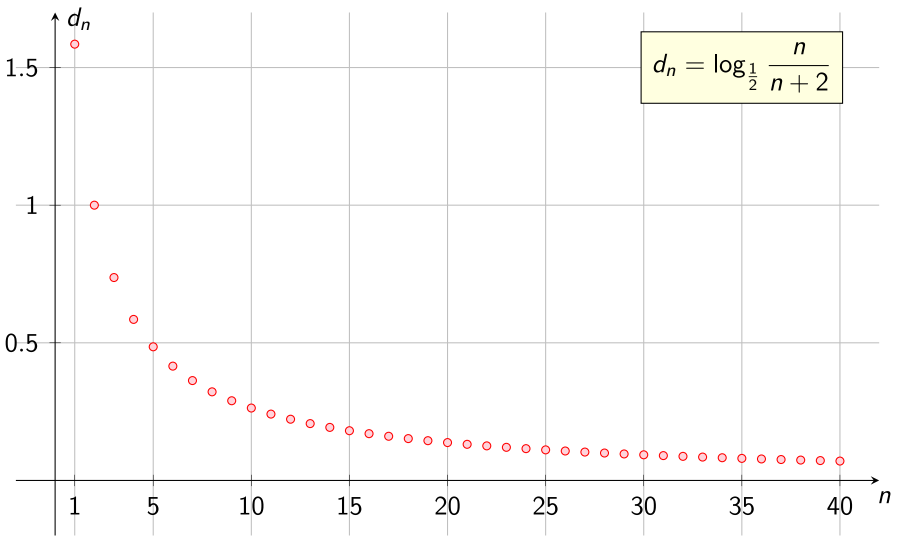
$$\lim_{n\to+\infty} d_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\log_{\frac{1}{2}} \frac{n}{n+2}\right) = \log_{\frac{1}{2}} \left(\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+2}\right) = \log_{\frac{1}{2}} 1 = 0$$

limes i neprekidna funkcija komutiraju

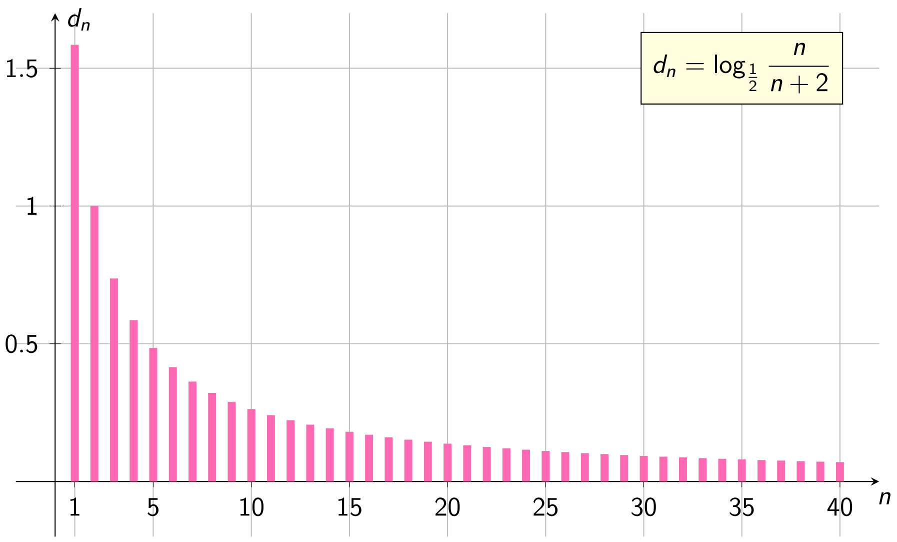
✏ Dakle, (d_n) je omeđeni niz.

- Kako niz (d_n) strogo pada i $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = 0$, slijedi da je $\hat{m} = 0$ najveća donja međa niza (d_n).

Niz (d_n) – dijagram točkama



Niz (d_n) – uspravni stupci



- Generiranje prvih 70 članova niza (d_n) u `python` programskom jeziku (članovi niza su zaokruženi na 5 decimala)

```
import math
[round(math.log(n/(n+2),1/2),5) for n in range(1,71)]
```

```
[1.58496, 1.0,     0.73697, 0.58496, 0.48543, 0.41504, 0.36257,
 0.32193, 0.28951, 0.26303, 0.24101, 0.22239, 0.20645, 0.19265,
 0.18057, 0.16993, 0.16046, 0.152,   0.14439, 0.1375,  0.13124,
 0.12553, 0.12029, 0.11548, 0.11103, 0.10692, 0.10309, 0.09954,
 0.09622, 0.09311, 0.0902,  0.08746, 0.08489, 0.08246, 0.08017,
 0.078,   0.07595, 0.074,   0.07215, 0.07039, 0.06871, 0.06711,
 0.06559, 0.06413, 0.06274, 0.0614,  0.06012, 0.05889, 0.05772,
 0.05658, 0.0555,  0.05445, 0.05344, 0.05247, 0.05153, 0.05063,
 0.04975, 0.04891, 0.04809, 0.04731, 0.04654, 0.0458,  0.04509,
 0.04439, 0.04372, 0.04307, 0.04244, 0.04182, 0.04122, 0.04064]
```