Gomilište i limes niza realnih brojeva

Matematika 2

Damir Horvat

FOI, Varaždin

Zadatak 1

Odredite gomilišta sljedećih nizova:

a) $a_n = (-1)^n \cdot 2 + \dfrac{1}{n}$

b) $b_n = 1 + \sin\dfrac{n\pi}{2}$

c) $c_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & \text{ako je } n \text{ paran} \\ \sqrt{n}, & \text{ako je } n \text{ neparan} \end{cases}$

d) $d_n = \begin{cases} p + \dfrac{1}{p^k}, & \text{ako je } n = p^k \text{ za neki prosti broj } p \text{ i neki } k \in \mathbb{N} \\ n, & \text{inače} \end{cases}$

Jesu li zadani nizovi konvergentni?

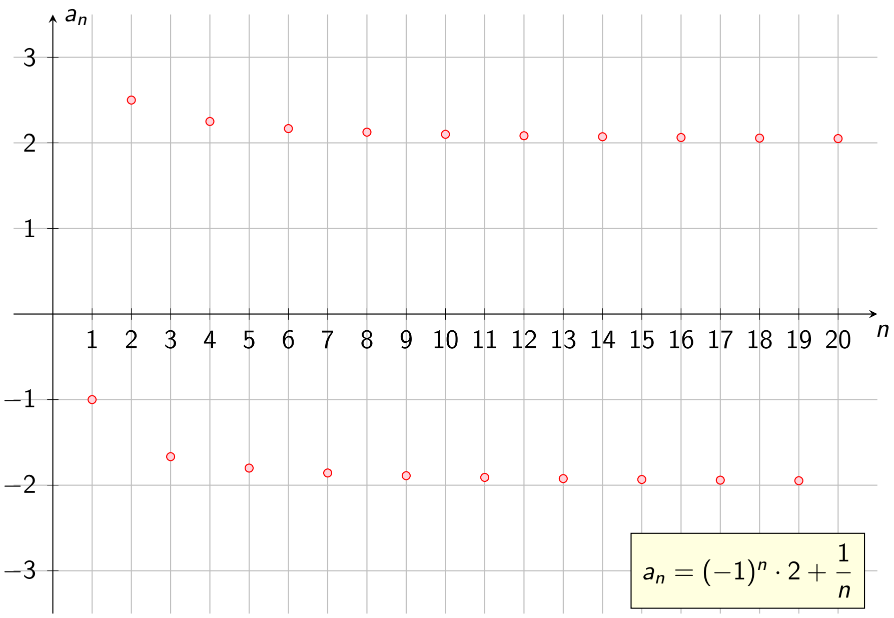
Rješenje

$\boxed{a_n = (-1)^n \cdot 2 + \dfrac{1}{n}}$

a)
$$a_n = \begin{cases} 2 + \dfrac{1}{n}, & \text{ako je } n \text{ paran} \\ -2 + \dfrac{1}{n}, & \text{ako je } n \text{ neparan} \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(2 + \frac{1}{n}\right) = 2, \qquad \lim_{n\to\infty}\left(-2 + \frac{1}{n}\right) = -2$$

- Broj 2 je gomilište niza (a_n) jer svaka okolina tog broja sadrži beskonačno mnogo članova tog niza koji se nalaze na parnim pozicijama, tj. podniz $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergira broju 2.
- Broj -2 je gomilište niza (a_n) jer svaka okolina tog broja sadrži beskonačno mnogo članova tog niza koji se nalaze na neparnim pozicijama, tj. podniz $(a_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergira broju -2.
- Niz (a_n) nije konvergentan jer ima više od jednog gomilišta.



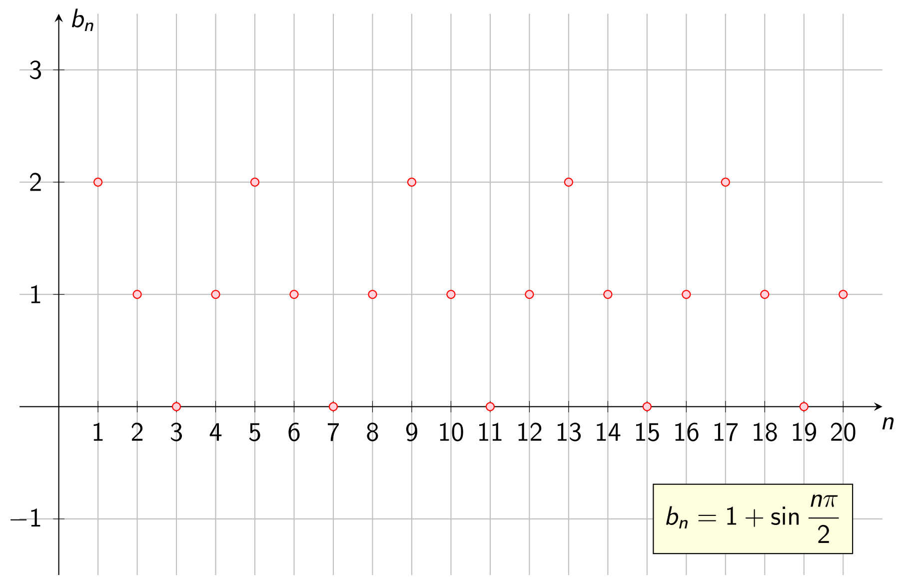
b)

$$b_n = 1 + \sin\frac{n\pi}{2}$$

$$\sin\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & \text{ako je } n = 2k \text{ za neki } k \in \mathbb{N} \\ 1, & \text{ako je } n = 4k-3 \text{ za neki } k \in \mathbb{N} \\ -1, & \text{ako je } n = 4k-1 \text{ za neki } k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$b_n = \begin{cases} 1, & \text{ako je } n = 2k \text{ za neki } k \in \mathbb{N} \\ 2, & \text{ako je } n = 4k-3 \text{ za neki } k \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{ako je } n = 4k-1 \text{ za neki } k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$\boxed{(b_n)} \rightsquigarrow 2,\ 1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 1,\ 0,\ 1, \ldots$



$2,\ 1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 1,\ 0,\ 1, \ldots$

$$b_n = 1 + \sin\frac{n\pi}{2}$$

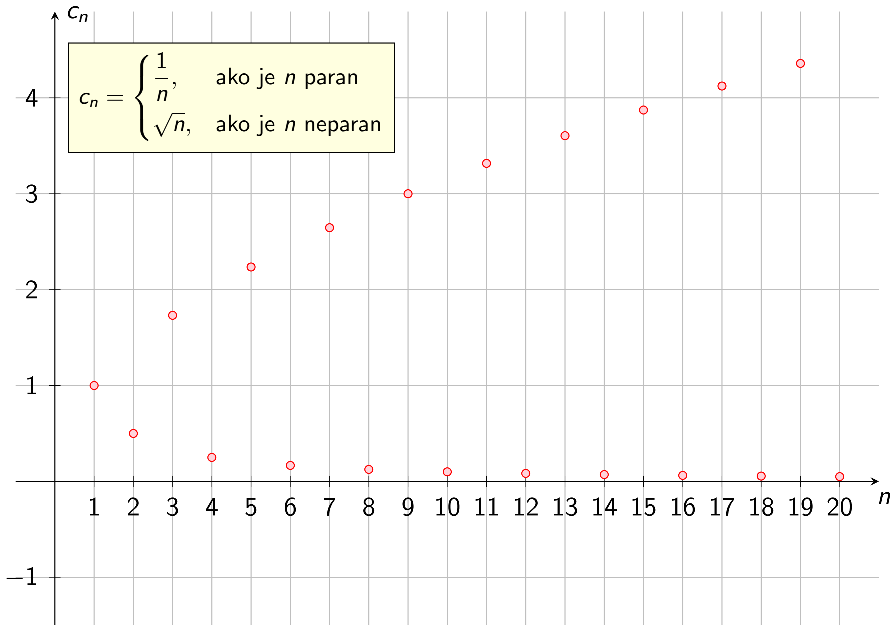
- Broj 2 je gomilište niza (b_n) jer svaka okolina tog broja sadrži beskonačno mnogo članova tog niza koji se nalaze na pozicijama s indeksima oblika $4k-3$ za $k \in \mathbb{N}$, tj. podniz $(b_{4k-3})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergira broju 2.
- Broj 1 je gomilište niza (b_n) jer svaka okolina tog broja sadrži beskonačno mnogo članova tog niza koji se nalaze na parnim pozicijama, tj. podniz $(b_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergira broju 1.
- Broj 0 je gomilište niza (b_n) jer svaka okolina tog broja sadrži beskonačno mnogo članova tog niza koji se nalaze na pozicijama s indeksima oblika $4k-1$ za $k \in \mathbb{N}$, tj. podniz $(b_{4k-1})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergira broju 0.
- Niz (b_n) nije konvergentan jer ima više od jednog gomilišta.

c)

$1,\ \frac{1}{2},\ \sqrt{3},\ \frac{1}{4},\ \sqrt{5},\ \frac{1}{6},\ \sqrt{7},\ \frac{1}{8},\ 3,\ \frac{1}{10}, \ldots$

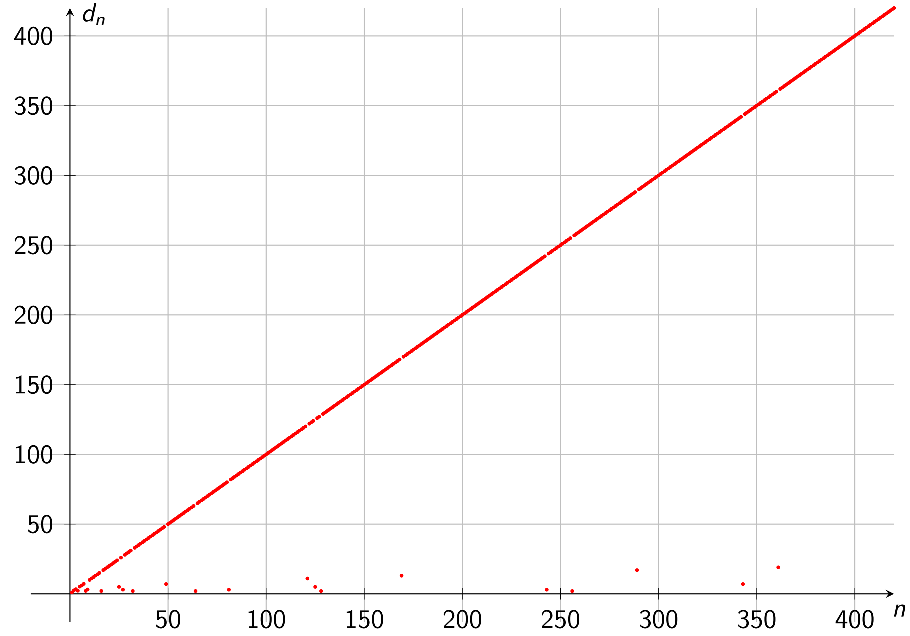
$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{ako je } n \text{ paran} \\ \sqrt{n}, & \text{ako je } n \text{ neparan} \end{cases}$$

- Broj 0 je gomilište niza (c_n) jer svaka okolina tog broja sadrži beskonačno mnogo članova tog niza koji se nalaze na parnim pozicijama, tj. podniz $(c_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergira broju 0.
- Niz (c_n) ima samo jedno gomilište, ali ipak nije konvergentan.
- U svakoj okolini broja 0 se nalazi beskonačno mnogo članova niza (c_n) koji se nalaze na parnim pozicijama (jer je 0 gomilište).
- Međutim, izvan svake dovoljno male okoline broja 0 se nalazi također beskonačno mnogo članova niza (c_n) koji se nalaze na neparnim pozicijama pa 0 ne može biti limes niza (c_n).
- Naime, podniz $(c_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}$ divergira u $+\infty$.



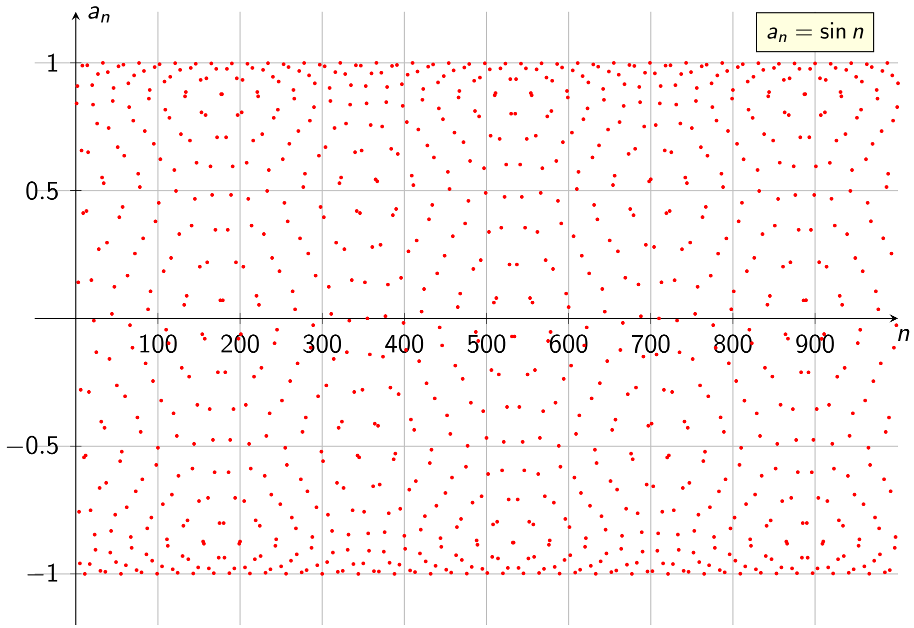
d)
$$d_n = \begin{cases} p + \frac{1}{p^k}, & \text{ako je } n = p^k \text{ za neki prosti broj } p \text{ i neki } k \in \mathbb{N} \\ n, & \text{inače} \end{cases}$$

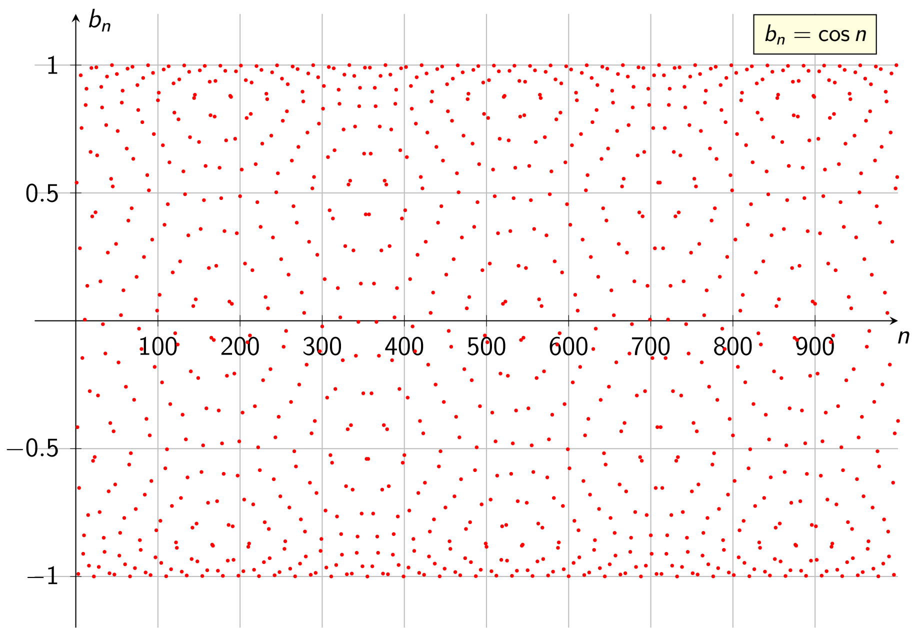
- Za svaki prosti broj p, podniz $(d_{p^k})_{k\in\mathbb{N}}$ je oblika
$$p + \frac{1}{p},\ p + \frac{1}{p^2},\ p + \frac{1}{p^3},\ p + \frac{1}{p^4}, \ldots$$
i konvergira broju p.
- Dakle, svaki prosti broj p je gomilište niza (d_n). Stoga niz (d_n) ima prebrojivo beskonačno mnogo gomilišta.
- Također, podniz niza (d_n) čiji članovi se nalaze na pozicijama koje nisu potencije prostog broja divergira u $+\infty$.
- Niz (d_n) nije konvergentan jer ima više od jednog gomilišta i još k tome sadrži podniz koji divergira u $+\infty$.



Napomena

- Niz $a_n = \sin n$ ima neprebrojivo beskonačno mnogo gomilišta i skup svih njegovih gomilišta jednak je segmentu $[-1, 1]$.
- Članovi niza (a_n) su gusto raspoređeni unutar segmenta $[-1, 1]$, tj. u svakoj okolini bilo kojeg broja iz segmenta $[-1, 1]$ se nalazi beskonačno mnogo članova niza (a_n).
- Niz $b_n = \cos n$ ima neprebrojivo beskonačno mnogo gomilišta i skup svih njegovih gomilišta jednak je segmentu $[-1, 1]$.
- Članovi niza (b_n) su gusto raspoređeni unutar segmenta $[-1, 1]$, tj. u svakoj okolini bilo kojeg broja iz segmenta $[-1, 1]$ se nalazi beskonačno mnogo članova niza (b_n).





Napomena

- Ako je $\omega \in \mathbb{R}$ takav da je $\frac{\omega}{\pi} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, tada su članovi nizova

$$c_n = \sin(\omega n) \quad \text{i} \quad d_n = \cos(\omega n)$$

gusto raspoređeni unutar segmenta $[-1, 1]$, tj. skup njihovih gomilišta jednak je segmentu $[-1, 1]$.

- Članovi nizova

$$u_n = \operatorname{tg} n \quad \text{i} \quad v_n = \operatorname{ctg} n$$

gusto su raspoređeni na skupu $\mathbb{R}$, tj. svaki realni broj je gomilište tih nizova.

Zadatak 2

Izračunajte sljedeće limese:

a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{5n^2 - n - 7}{6n^3 - 5n^2 + 1}$

b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{5n^3 + 2n + 9}{6n^2 - 5n + 8}$

c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(n-1)^8}{3n^3(5+n)^5}$

Rješenje

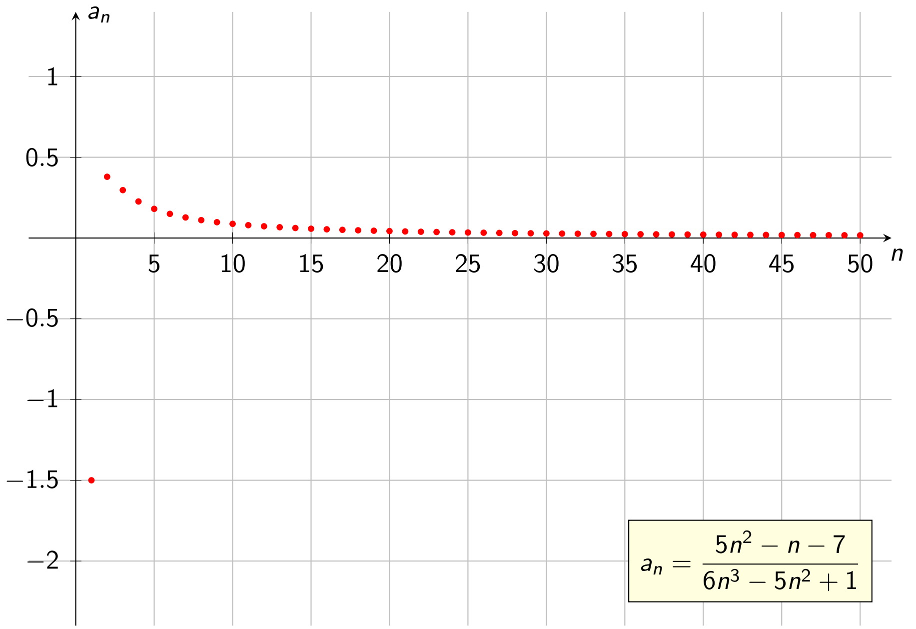
a)

- Najveća potencija u brojniku je n^2.
- Najveća potencija u nazivniku je n^3.
- Dijelimo brojnik i nazivnik s n^3.

$$\boxed{\frac{\infty}{\infty}} \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{5n^2-n-7}{6n^3-5n^2+1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\dfrac{5n^2-n-7}{n^3}}{\dfrac{6n^3-5n^2+1}{n^3}}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{\dfrac{5}{n}-\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{7}{n^3}}{6-\dfrac{5}{n}+\dfrac{1}{n^3}}=\frac{0-0-0}{6-0+0}=\frac{0}{6}=0$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{c}{n^p}=0,\quad c,p\in\mathbb{R},\ p>0}$$



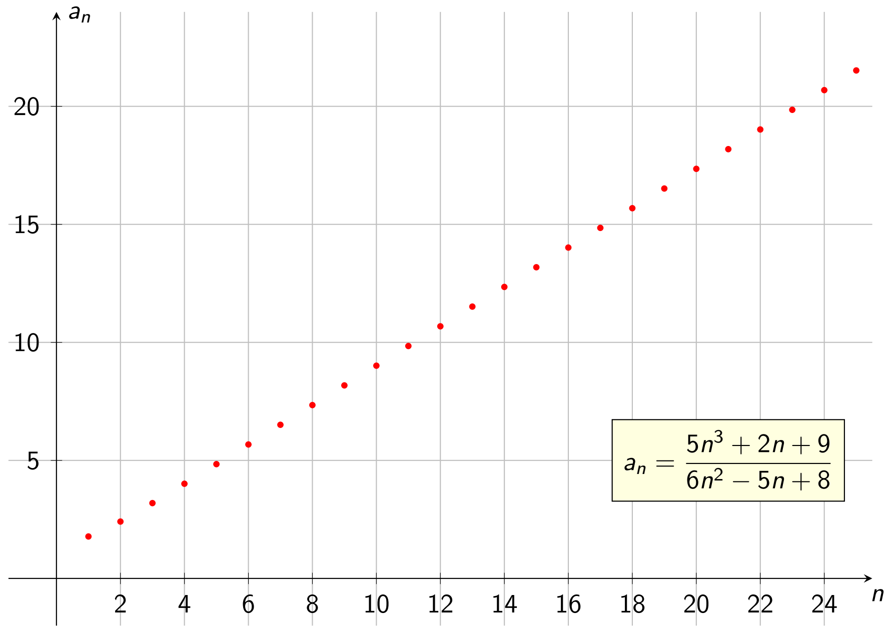
b)

- Najveća potencija u brojniku je n^3.
- Najveća potencija u nazivniku je n^2.
- Dijelimo brojnik i nazivnik s n^3.

$$\boxed{\frac{\infty}{\infty}} \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{5n^3+2n+9}{6n^2-5n+8}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\dfrac{5n^3+2n+9}{n^3}}{\dfrac{6n^2-5n+8}{n^3}}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{5+\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{9}{n^3}}{\dfrac{6}{n}-\dfrac{5}{n^2}+\dfrac{8}{n^3}}=\frac{5+0+0}{0-0+0}=\frac{5}{0+}=+\infty$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{c}{n^p}=0,\quad c,p\in\mathbb{R},\ p>0}$$



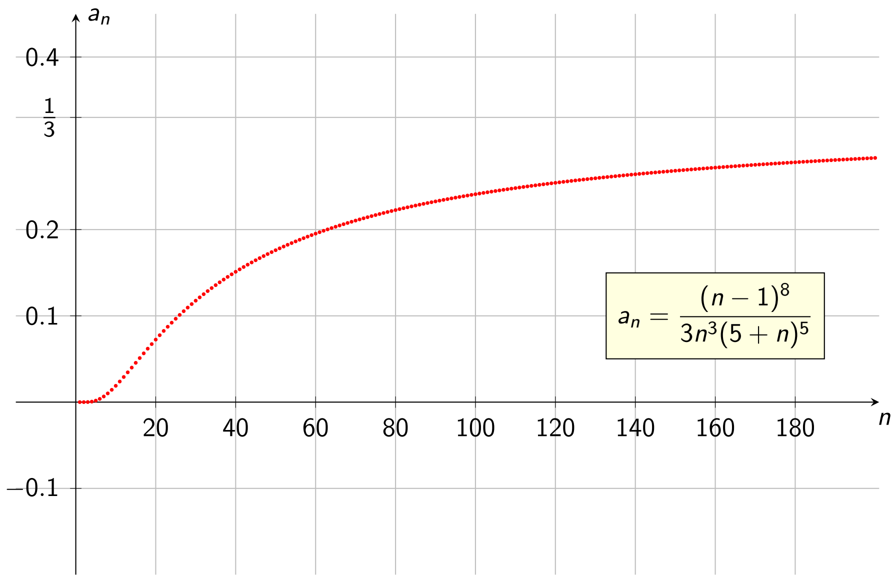
c)

- Najveća potencija u brojniku je n^8.
- Najveća potencija u nazivniku je n^8.
- Dijelimo brojnik i nazivnik s n^8.

$$\boxed{\frac{\infty}{\infty}} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{(n-1)^8}{3n^3(5+n)^5} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(n-1)^8}{n^8}}{\frac{3n^3(5+n)^5}{n^8}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\frac{n-1}{n}\right)^8}{\frac{3n^3}{n^3}\cdot\left(\frac{5+n}{n}\right)^5} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^8}{3\cdot\left(\frac{5}{n}+1\right)^5} = \frac{(1-0)^8}{3\cdot(0+1)^5} = \frac{1}{3}$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{c}{n^p} = 0, \quad c, p \in \mathbb{R},\ p > 0}$$



Zadatak 3

Izračunajte sljedeće limese:

a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{2n^3+1}}{\sqrt{2n^2-1}}$

b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}$

c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{3n^3-2n}+n}{n^2+n}$

Rješenje

a)

- Najveća potencija u brojniku je $\sqrt[3]{n^3} = n$.
- Najveća potencija u nazivniku je $\sqrt{n^2} = n$.
- Dijelimo brojnik i nazivnik s n.

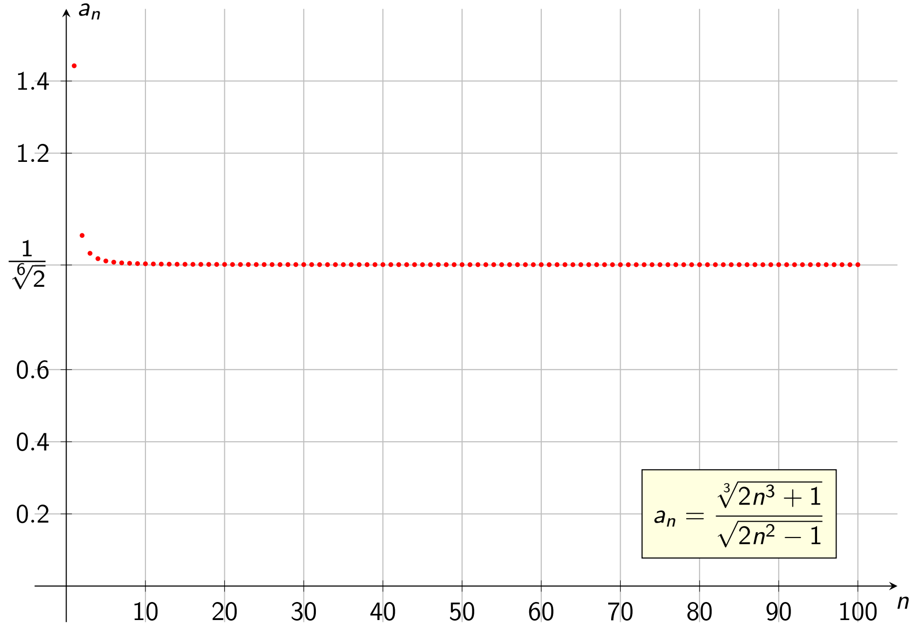
$$\boxed{\sqrt[n\cdot k]{a^{m\cdot k}} = \sqrt[n]{a^m}}$$

$$\boxed{\frac{\infty}{\infty}} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{2n^3+1}}{\sqrt{2n^2-1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{\sqrt[3]{2n^3+1}}{n}}{\frac{\sqrt{2n^2-1}}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{\sqrt[3]{2n^3+1}}{\sqrt[3]{n^3}}}{\frac{\sqrt{2n^2-1}}{\sqrt{n^2}}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{\frac{2n^3+1}{n^3}}}{\sqrt{\frac{2n^2-1}{n^2}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{2+\frac{1}{n^3}}}{\sqrt{2-\frac{1}{n^2}}} = \frac{\sqrt[3]{2+0}}{\sqrt{2-0}} =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt[6]{2^2}}{\sqrt[6]{2^3}} = \sqrt[6]{\frac{2^2}{2^3}} = \sqrt[6]{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt[6]{2}}$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{c}{n^p} = 0, \quad c, p \in \mathbb{R},\ p > 0}$$



b)

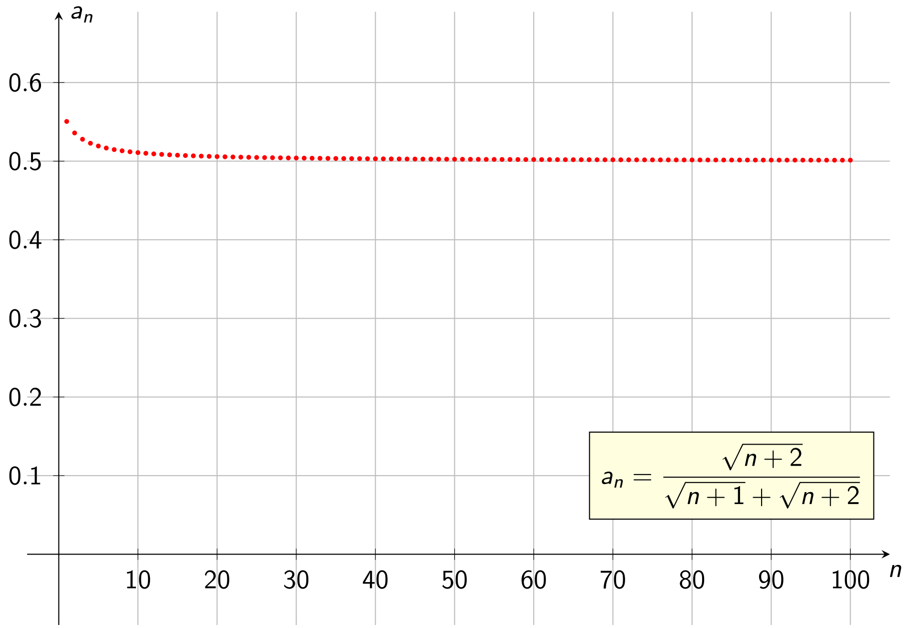
- Najveća potencija u brojniku je $\sqrt{n}$.
- Najveća potencija u nazivniku je $\sqrt{n}$.
- Dijelimo brojnik i nazivnik s $\sqrt{n}$.

$$\boxed{\frac{\infty}{\infty}} \rightsquigarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n}}}{\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}+\frac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n}}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{\frac{n+2}{n}}}{\sqrt{\frac{n+1}{n}}+\sqrt{\frac{n+2}{n}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{1+0}}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1+0}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{c}{n^p} = 0, \quad c, p \in \mathbb{R},\ p > 0}$$



c)

- Najveća potencija u brojniku je $\sqrt{n^3} = n^{\frac{3}{2}}$.
- Najveća potencija u nazivniku je n^2.
- Dijelimo brojnik i nazivnik s n^2.

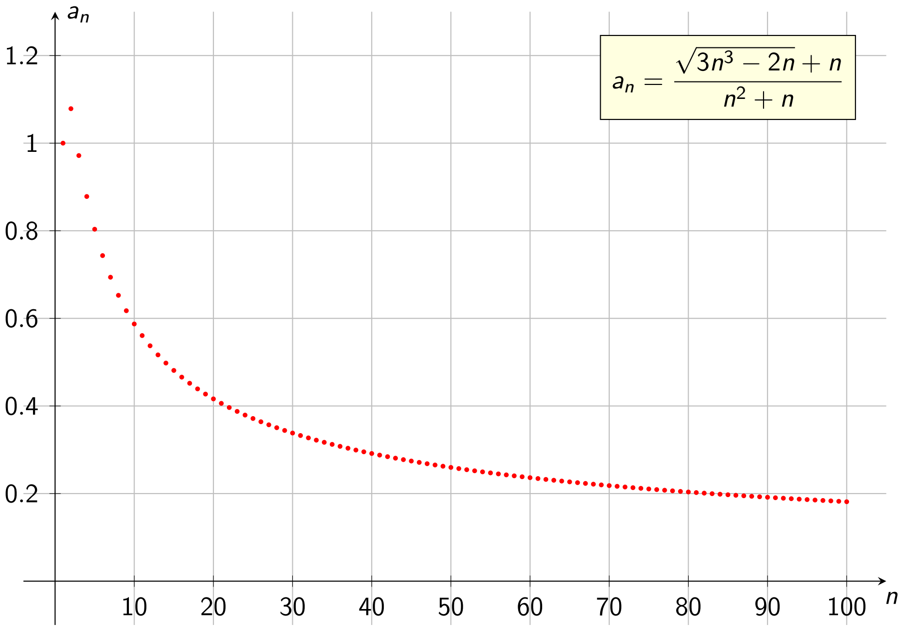
$$\boxed{\frac{\infty}{\infty}} \rightsquigarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{3n^3-2n}+n}{n^2+n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{\sqrt{3n^3-2n}}{n^2}+\frac{n}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}+\frac{n}{n^2}} =$$

$n^2 = \sqrt{n^4}$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{\frac{3n^3-2n}{n^4}}+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{\frac{3}{n}-\frac{2}{n^3}}+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} =$$

$$= \frac{\sqrt{0-0}+0}{1+0} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{c}{n^p} = 0, \quad c, p \in \mathbb{R},\ p > 0}$$



Zadatak 4

Izračunajte sljedeće limese:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n^2+5n+1} - \sqrt{n^2-n}\right)$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{6n-5} - \sqrt{n+2}\right)$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3 - 4\cdot 5^n}{5\cdot 3^{n+1} + 6\cdot 5^{n-1}}$

Rješenje

a)

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n^2+5n+1} - \sqrt{n^2-n}\right) = \quad \boxed{\infty - \infty}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n^2+5n+1} - \sqrt{n^2-n}\right) \cdot \frac{\sqrt{n^2+5n+1} + \sqrt{n^2-n}}{\sqrt{n^2+5n+1} + \sqrt{n^2-n}} =$$

$\boxed{a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)}$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n^2+5n+1) - (n^2-n)}{\sqrt{n^2+5n+1} + \sqrt{n^2-n}} =$$

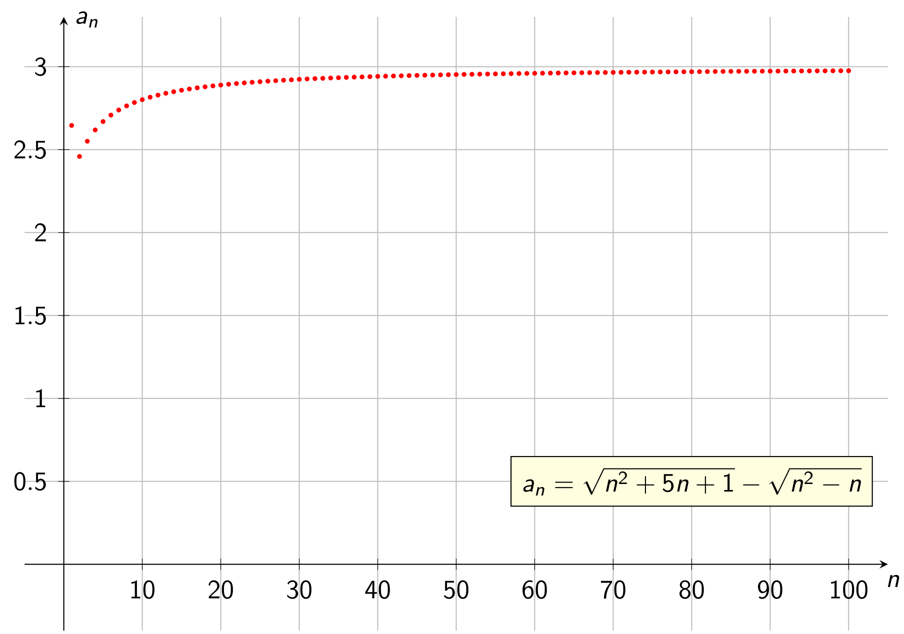
$\boxed{\dfrac{\infty}{\infty}}$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{6n+1 \ \ /:n}{\sqrt{n^2+5n+1} + \sqrt{n^2-n} \ \ /:n} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{6n+1}{n}}{\dfrac{\sqrt{n^2+5n+1}}{\sqrt{n^2}} + \dfrac{\sqrt{n^2-n}}{\sqrt{n^2}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{6n+1}{n}}{\sqrt{\dfrac{n^2+5n+1}{n^2}} + \sqrt{\dfrac{n^2-n}{n^2}}}$$

$n = \sqrt{n^2}$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{6 + \dfrac{1}{n}}{\sqrt{1 + \dfrac{5}{n} + \dfrac{1}{n^2}} + \sqrt{1 - \dfrac{1}{n}}} = \frac{6+0}{\sqrt{1+0+0} + \sqrt{1-0}} = 3$$



b)

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{6n-5}-\sqrt{n+2}\right)= \quad \boxed{\infty-\infty} \quad \boxed{a^2-b^2=(a-b)(a+b)}$$

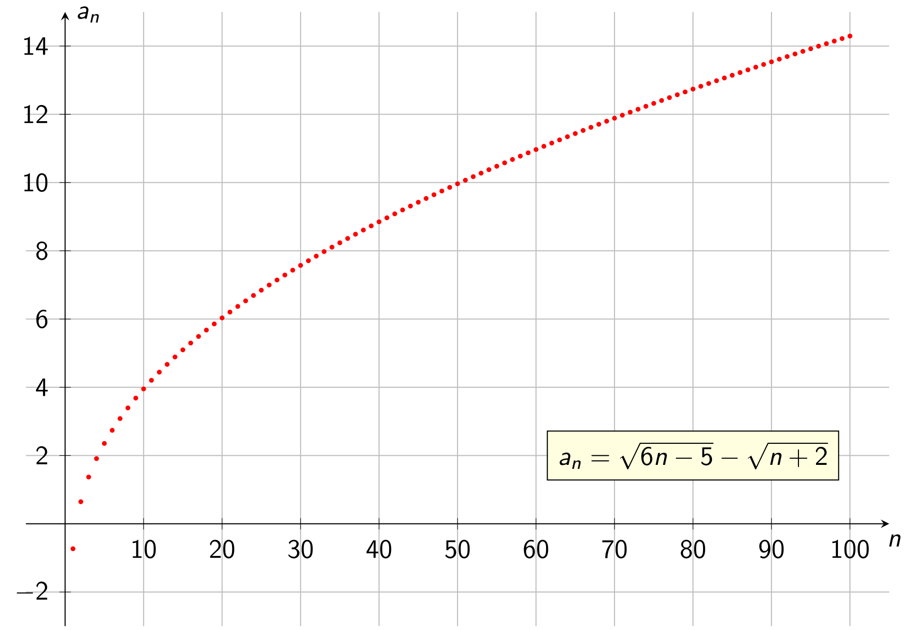
$$=\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{6n-5}-\sqrt{n+2}\right)\cdot\frac{\sqrt{6n-5}+\sqrt{n+2}}{\sqrt{6n-5}+\sqrt{n+2}}= \quad \boxed{\frac{\infty}{\infty}}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{(6n-5)-(n+2)}{\sqrt{6n-5}+\sqrt{n+2}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{5n-7\ /:n}{\sqrt{6n-5}+\sqrt{n+2}\ /:n}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{5n-7}{n}}{\frac{\sqrt{6n-5}}{\sqrt{n^2}}+\frac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n^2}}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{5n-7}{n}}{\sqrt{\frac{6n-5}{n^2}}+\sqrt{\frac{n+2}{n^2}}}=$$

$n=\sqrt{n^2}$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{5-\frac{7}{n}}{\sqrt{\frac{6}{n}-\frac{5}{n^2}}+\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}}=\frac{5-0}{\sqrt{0-0}+\sqrt{0+0}}=\frac{5}{0+}=+\infty$$



c)

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{3-4\cdot 5^n}{5\cdot 3^{n+1}+6\cdot 5^{n-1}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{3-4\cdot 5^n}{5\cdot 3^n\cdot 3+6\cdot 5^n\cdot 5^{-1}}=$$

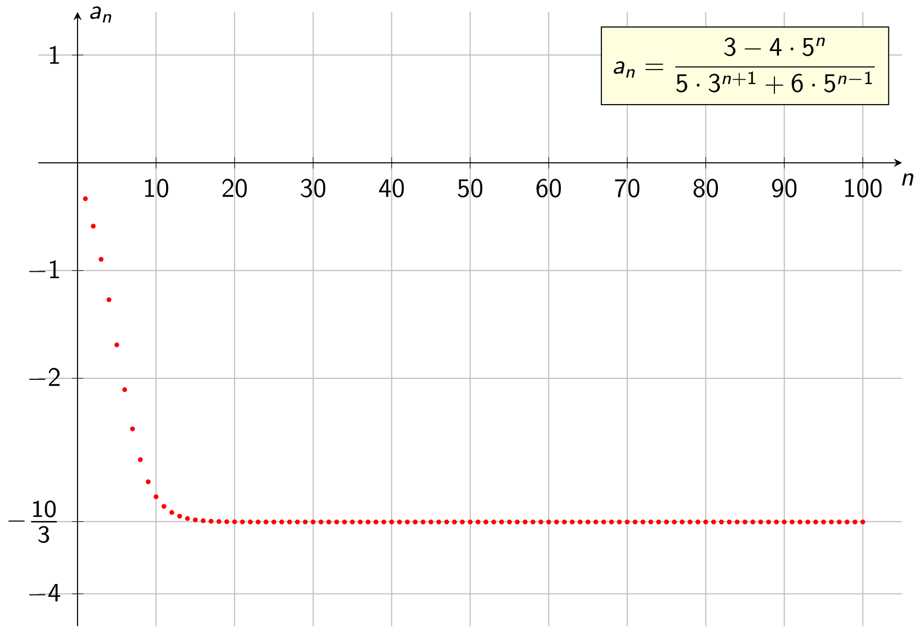
$$\boxed{\frac{\infty}{\infty}}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{3-4\cdot 5^n}{15\cdot 3^n+\frac{6}{5}\cdot 5^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{3-4\cdot 5^n}{5^n}}{\frac{15\cdot 3^n+\frac{6}{5}\cdot 5^n}{5^n}}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{3}{5^n}-4}{15\cdot\frac{3^n}{5^n}+\frac{6}{5}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{3\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^n-4}{15\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^n+\frac{6}{5}}=$$

$$=\frac{3\cdot 0-4}{15\cdot 0+\frac{6}{5}}=\frac{-4}{\frac{6}{5}}=\frac{-4\cdot 5}{6}=-\frac{10}{3}$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}q^n=0,\quad |q|<1}$$



9

Zadatak 5

Izračunajte sljedeće limese:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n+2}{n}\right)^{3n}$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n^2+2}{n^2+1}\right)^{\frac{1}{3}n^2}$

Rješenje

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n+2}{n}=1 \qquad \lim\limits_{n\to+\infty}3n=+\infty \qquad \boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}=e}$

$\boxed{1^\infty}$

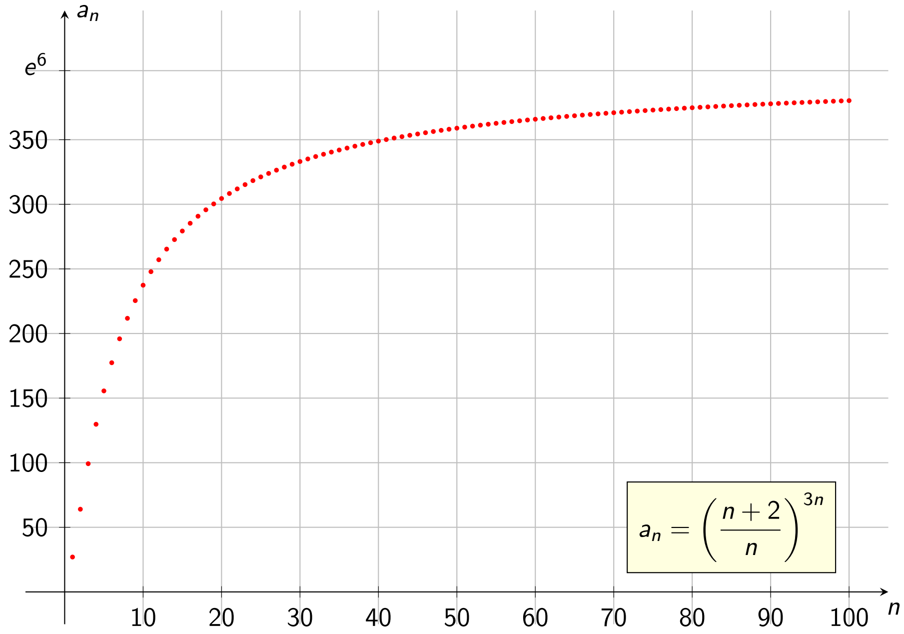
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+2}{n}\right)^{3n}=\lim_{n\to+\infty}\Bigg(1+\underbrace{\frac{n+2}{n}-1}_{\text{svedemo na zajednički nazivnik}}\Bigg)^{3n}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{3n}=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}\cdot 3n\cdot\frac{2}{n}}=\lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\right]^{6}=$$

$$=\left[\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\right]^{6}=e^6$$

$\boxed{(a^n)^m=a^{nm}}$

(1 + jako mali broj)$^{\text{recipročna vrijednost tog jako malog broja}}$ teži broju e



b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2+2}{n^2+1}=1 \qquad \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{3}n^2=+\infty \qquad \boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}=e}$

$\boxed{1^\infty}$

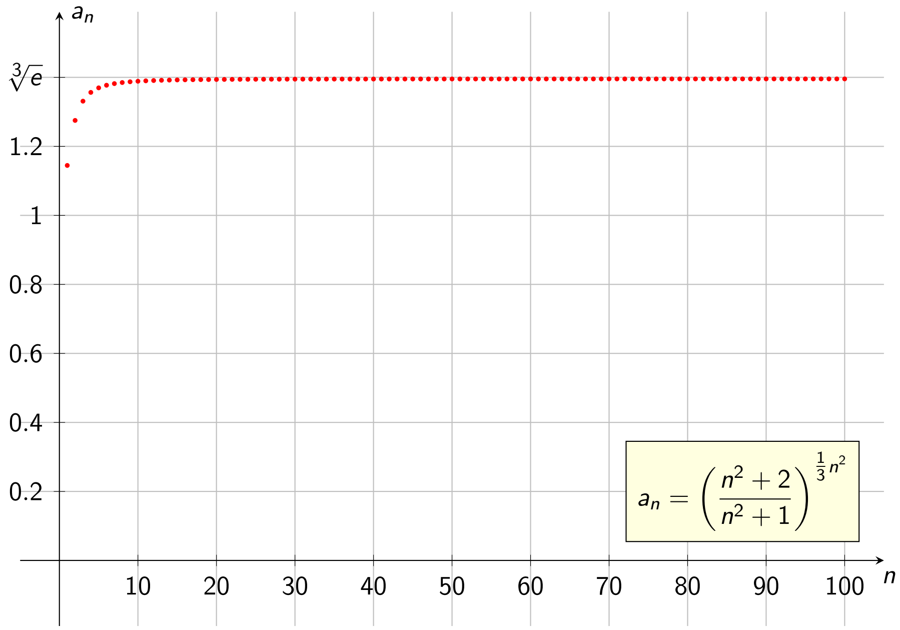
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2+2}{n^2+1}\right)^{\frac{1}{3}n^2}=\lim_{n\to+\infty}\Bigg(1+\underbrace{\frac{n^2+2}{n^2+1}-1}_{\text{svedemo na zajednički nazivnik}}\Bigg)^{\frac{1}{3}n^2}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n^2+1}\right)^{\frac{1}{3}n^2}=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n^2+1}\right)^{(n^2+1)\cdot\frac{1}{3}n^2\cdot\frac{1}{n^2+1}}=$$

$\boxed{(a^n)^m=a^{nm}}$

$$=\left[\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n^2+1}\right)^{n^2+1}\right]^{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2}{3n^2+3}}=e^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{e}$$

(1 + jako mali broj)$^{\text{recipročna vrijednost tog jako malog broja}}$ teži broju e



Zadatak 6

Zapišite periodički decimalni broj $0.\dot{4}\dot{3}$ u obliku razlomka.

Rješenje

$$0.\dot{4}\dot{3} = 0.43434343\cdots = 0.43 + 0.0043 + 0.000043 + \cdots =$$

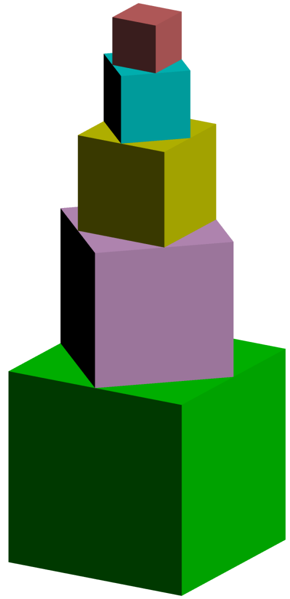
$$= \frac{43}{10^2} + \frac{43}{10^4} + \frac{43}{10^6} + \cdots = \frac{43}{100}\cdot\underbrace{\left(1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{100^2} + \cdots\right)}_{\text{suma geometrijskog reda}} =$$

$$a_1 = 1,\ q = \frac{1}{100}$$

$$= \frac{43}{100}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{100}} = \frac{43}{100}\cdot\frac{1}{\frac{99}{100}} =$$

$$= \frac{43}{100}\cdot\frac{100}{99} = \frac{43}{99}$$

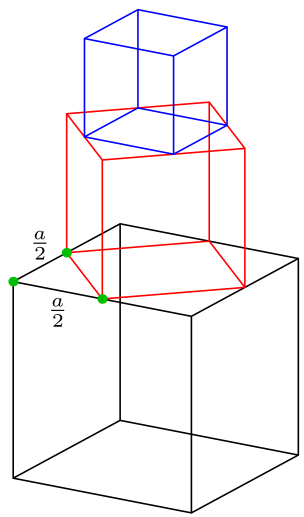
$$\boxed{a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \cdots = \frac{a_1}{1-q}, \quad |q| < 1}$$

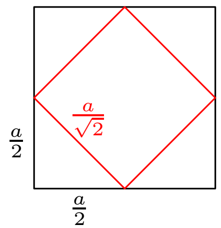


Zadatak 7

Na kocku duljine brida a postavi se nova kocka kojoj vrhovi donje osnovice leže u polovištima bridova gornje osnovice prve kocke. Na isti način se na drugu kocku postavi treća kocka, na treću kocku četvrta kocka itd. Odredite zbroj volumena svih ovih kocaka.

Rješenje





$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} = \frac{a_1}{1-q}}$$

$$a_1 = a^3,\quad q = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$|q| < 1$$

✏ Duljine bridova kocki su redom

$$a,\ \frac{a}{\sqrt{2}},\ \frac{a}{2},\ \frac{a}{2\sqrt{2}},\ \frac{a}{4},\ldots$$

✏ Volumeni kocki su redom

$$a^3,\ \frac{a^3}{2\sqrt{2}},\ \frac{a^3}{8},\ \frac{a^3}{16\sqrt{2}},\ \frac{a^3}{64},\ldots$$

$$a^3 + \frac{a^3}{2\sqrt{2}} + \frac{a^3}{8} + \frac{a^3}{16\sqrt{2}} + \frac{a^3}{64} + \cdots = \frac{a^3}{1-\frac{1}{2\sqrt{2}}} = \frac{4a^3}{4-\sqrt{2}}$$