Limes funkcije i neprekidnost

Matematika 2

Damir Horvat

FOI, Varaždin

Zadatak 1

Izračunajte $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{4-x}$.

Rješenje

- Zadatak ćemo riješiti na tri različita načina.
- Uvrštavanjem $x=4$ u izraz $\frac{\sqrt{x}-2}{4-x}$ dobivamo neodređeni izraz $\frac{0}{0}$.
- Potrebno je skratiti zajedničku nultočku $x=4$ od brojnika i nazivnika.
- Sljedeća tri načina pokazuju različite ideje kako to možemo napraviti.

Prvi način

$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

- Faktorizacija nazivnika preko formule za razliku kvadrata

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{4-x}=\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{2^2-\sqrt{x}^2}=\lim_{x\to 4}\frac{-\left(2-\sqrt{x}\right)}{\left(2-\sqrt{x}\right)\left(2+\sqrt{x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{-1}{2+\sqrt{x}}\underset{\text{uvrstimo } x=4}{=}\frac{-1}{2+\sqrt{4}}=-\frac{1}{4}$$

- Znamo da za svaki $x\in\mathbb{R}$ vrijedi $\sqrt{x^2}=|x|$.
- Kako x teži u 4, slijedi da je $x>0$ pa je $|x|=x$.
- Stoga je u ovom slučaju $\sqrt{x^2}=x$.
- Isto tako, zbog $x>0$ je $\sqrt{x^2}=\sqrt{x}^2$.

Drugi način

$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

- Racionalizacija brojnika preko formule za razliku kvadrata

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{4-x}=\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{4-x}\cdot\overset{=1}{\boxed{\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}}}=\lim_{x\to 4}\frac{\overset{\sqrt{x}^2-2^2}{x-4}}{(4-x)\left(\sqrt{x}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{-(4-x)}{(4-x)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{-1}{\sqrt{x}+2}\underset{\text{uvrstimo } x=4}{=}\frac{-1}{\sqrt{4}+2}=-\frac{1}{4}$$

- Racionaliziramo brojnik koristeći formulu za razliku kvadrata.
- Popravimo što smo *pokvarili* tako da ispada da početni izraz množimo s 1.

Treći način

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

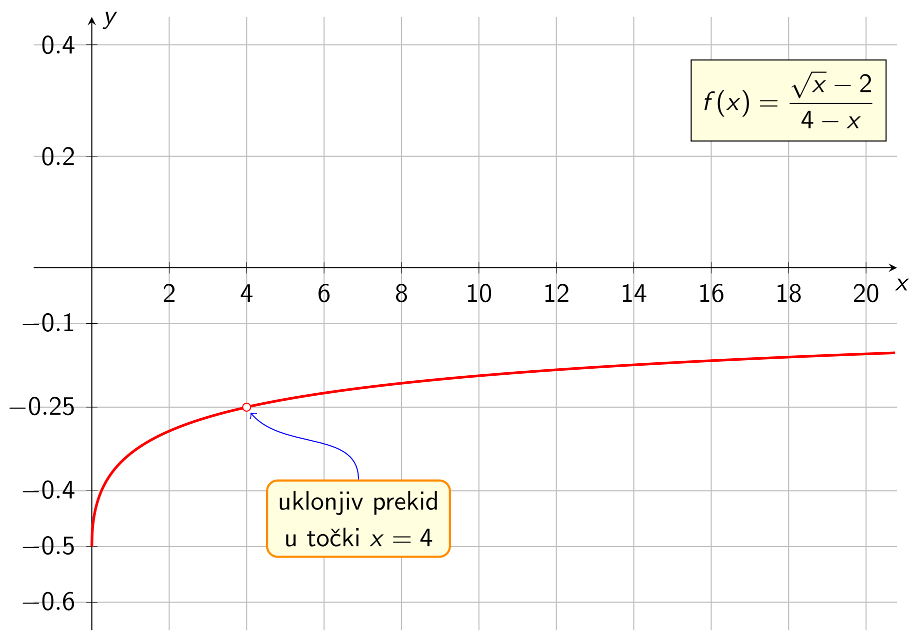
- Korištenje supstitucije i formule za razliku kvadrata

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{4-x} = \begin{bmatrix} \sqrt{x}=t, & x=t^2 \\ x\to 4, & t\to 2 \end{bmatrix} = \lim_{t\to 2} \frac{t-2}{4-t^2} =$$

$$= \lim_{t\to 2} \frac{-(2-t)}{(2-t)(2+t)} = \lim_{t\to 2} \frac{-1}{2+t} = \frac{-1}{2+2} = -\frac{1}{4}$$

uvrstimo $t = 2$

- Stavimo supstituciju $\sqrt{x} = t$.
- Kvadriranjem dobivamo $x = t^2$.
- Kada je x jako blizu 4, tada iz $t = \sqrt{x}$ slijedi da je t jako blizu $\sqrt{4} = 2$.
- Konačno, svodimo limes na novu varijablu t.



Zadatak 2

Izračunajte sljedeće limese:

a) $\lim_{x\to -1} \frac{x^3+1}{x^2-x-2}$

b) $\lim_{x\to 2-} \frac{x^3+1}{x^2-x-2}$

c) $\lim_{x\to 2+} \frac{x^3+1}{x^2-x-2}$

Rješenje

a)

za $x = -1$ dobivamo $\frac{0}{0}$

Treba faktorizirati brojnik i nazivnik tako da skratimo njihovu zajedničku nultočku.

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^3+1}{x^2-x-2} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)(x-2)} =$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{x^2-x+1}{x-2} = \frac{(-1)^2-(-1)+1}{-1-2} = \frac{3}{-3} = -1$$

uvrstimo $x = -1$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$x_1 = -1, \; x_2 = 2$$

$$ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2)$$

x_1 i x_2 su rješenja jednadžbe $ax^2 + bx + c = 0$

b)

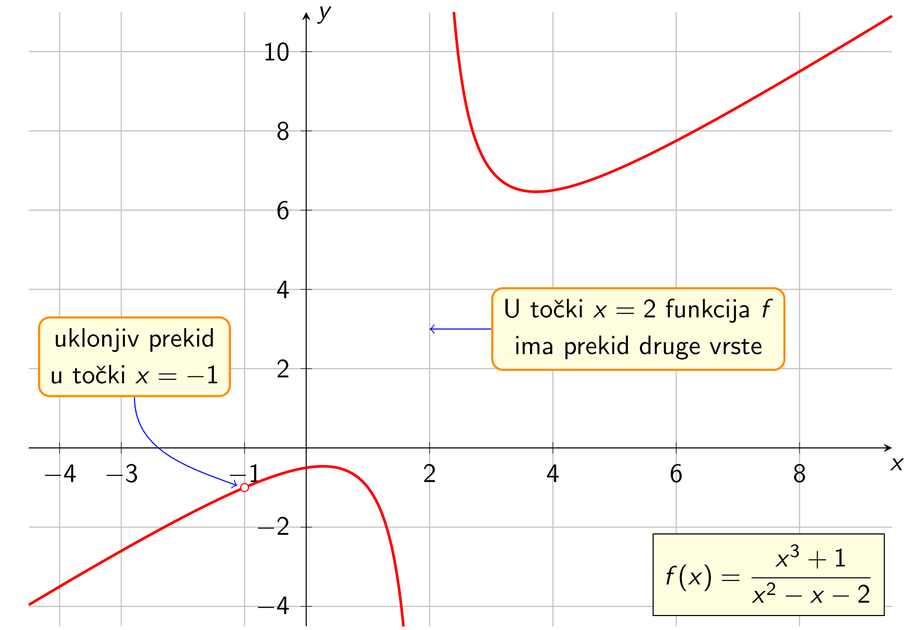
$$\lim_{x\to 2-} \frac{x^3+1}{x^2-x-2} = \frac{2^3+1}{2^2-2-2} = \frac{9}{0-} = -\infty$$

- Kako $x \to 2-$, tada je x jako blizu broja 2 s lijeve strane.
- Dakle, uvrstimo $x = 2$ u izraz i imamo na umu da je to broj koji je manji od 2 i jako blizu broja 2 (npr. 1.99).
- Stoga je $x^2 - x$ jako blizu broja 2 također s lijeve strane. Na primjer, $1.99^2 - 1.99$ je jako blizu 2 i manji je od broja 2.
- Zaključujemo da je $x^2 - x - 2$ jako blizu broja 0 također s lijeve (minus) strane. Na primjer, $1.99^2 - 1.99 - 2$ je jako blizu 0 i manji je od broja 0.
- Kada 9 podijelimo s jako malim negativnim brojem, dobivamo jako veliki negativni broj.

c)

$$\lim_{x\to 2+} \frac{x^3+1}{x^2-x-2} = \frac{2^3+1}{2^2-2-2} = \frac{9}{0+} = +\infty$$

- Kako $x \to 2+$, tada je x jako blizu broja 2 s desne strane.
- Dakle, uvrstimo $x = 2$ u izraz i imamo na umu da je to broj koji je veći od 2 i jako blizu broja 2 (npr. 2.01).
- Stoga je $x^2 - x$ jako blizu broja 2 također s desne strane. Na primjer, $2.01^2 - 2.01$ je jako blizu 2 i veći je od broja 2.
- Zaključujemo da je $x^2 - x - 2$ jako blizu broja 0 također s desne (plus) strane. Na primjer, $2.01^2 - 2.01 - 2$ je jako blizu 0 i veći je od broja 0.
- Kada 9 podijelimo s jako malim pozitivnim brojem, dobivamo jako veliki pozitivni broj.



Zadatak 3

Izračunajte sljedeće limese:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$

b) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$

Rješenje

a)

- Najveća potencija u brojniku je $\sqrt{x}$.
- Najveća potencija u nazivniku je $\sqrt{x}$.
- Dijelimo brojnik i nazivnik s $\sqrt{x}$.

$$\boxed{\frac{\infty}{\infty}} \rightsquigarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\sqrt{1+2x}}{\sqrt{x}} - \frac{3}{\sqrt{x}}}{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{\frac{1+2x}{x}} - \frac{3}{\sqrt{x}}}{1 - \frac{2}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{x}+2} - \frac{3}{\sqrt{x}}}{1 - \frac{2}{\sqrt{x}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{0+2}-0}{1-0} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{c}{x^p} = 0, \quad c, p \in \mathbb{R},\ p > 0$$

b) za $x = 4$ dobivamo $\frac{0}{0}$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2} = \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2} \cdot \frac{\sqrt{1+2x}+3}{\sqrt{x}+2} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{1+2x}+3} =$$

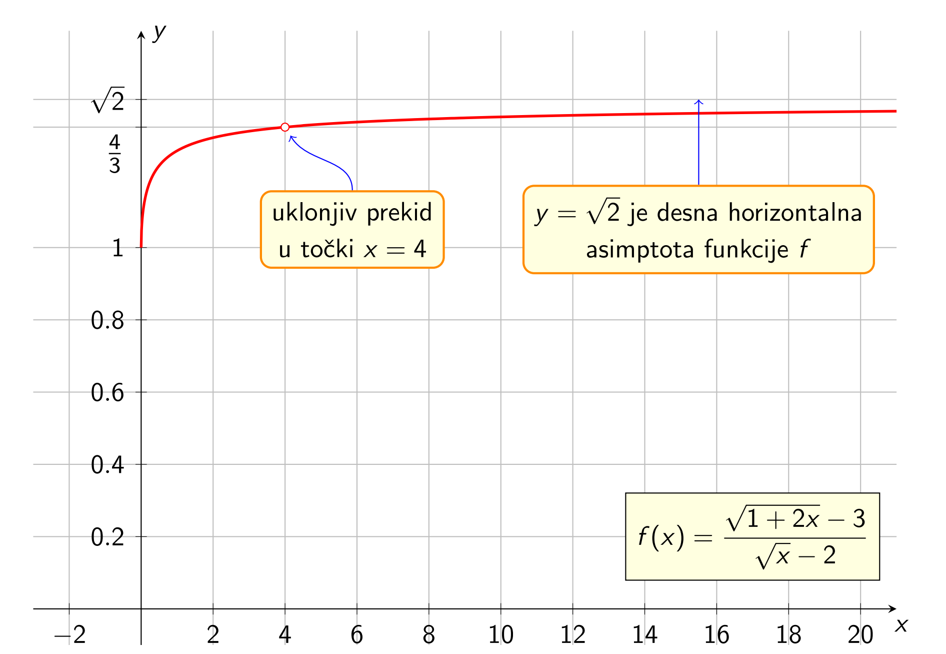
$$= \lim_{x\to 4} \frac{(1+2x)-9}{x-4} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{1+2x}+3} = \lim_{x\to 4} \frac{2x-8}{x-4} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{1+2x}+3} =$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{2\cdot(x-4)}{x-4} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{1+2x}+3} = \lim_{x\to 4} \frac{2\cdot(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{1+2x}+3} =$$

uvrstimo $x = 4$ $\rightsquigarrow$

$$= \frac{2\cdot(\sqrt{4}+2)}{\sqrt{1+2\cdot 4}+3} = \frac{8}{\sqrt{9}+3} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

- Racionaliziramo brojnik i nazivnik preko formule za razliku kvadrata.
- Racionaliziramo brojnik i popravimo što smo *pokvarili*.
- Racionaliziramo nazivnik i popravimo što smo *pokvarili*.



Zadatak 4

Izračunajte sljedeće limese:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log_7(1+5x)}{2x}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{3x}{\ln(1-2x)}$

Rješenje

Rješavanje navedenih limesa svodi se na tablični limes

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}.$$

Specijalno, za $a = e$ dobivamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

a)

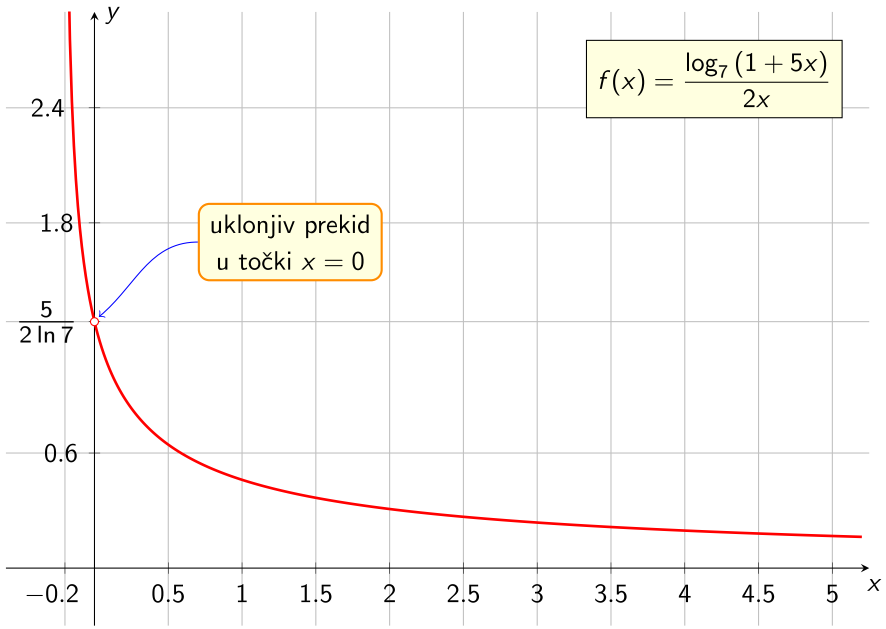
$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a}$$

za $x=0$ dobivamo $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_7(1+5x)}{2x}=\left[\begin{array}{ll} 5x=t, & x=\frac{t}{5} \\ x\to 0, & t\to 0\end{array}\right]=\lim_{t\to 0}\frac{\log_7(1+t)}{2\cdot\frac{t}{5}}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\log_7(1+t)}{\frac{2}{5}\cdot t}=\frac{1}{\frac{2}{5}}\lim_{t\to 0}\frac{\log_7(1+t)}{t}=\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{\ln 7}=\frac{5}{2\ln 7}$$

- Stavimo supstituciju $5x=t$.
- Dijeljenjem s 5 dobivamo $x=\frac{t}{5}$.
- Kada je x jako blizu 0, tada iz $t=5x$ slijedi da je t jako blizu $5\cdot 0=0$.
- Konačno, svodimo limes na novu varijablu t.



b)

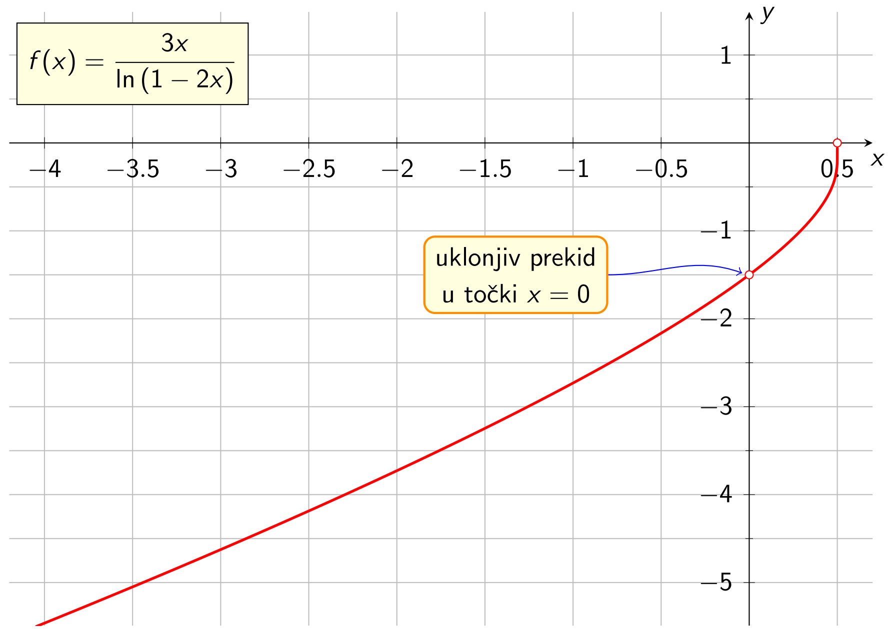
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

za $x=0$ dobivamo $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\ln(1-2x)}=\left[\begin{array}{ll} -2x=t, & x=-\frac{t}{2} \\ x\to 0, & t\to 0\end{array}\right]=\lim_{t\to 0}\frac{3\cdot\frac{-t}{2}}{\ln(1+t)}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{-\frac{3}{2}}{\frac{\ln(1+t)}{t}}=-\frac{3}{2}\lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{\ln(1+t)}{t}}=-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1}=-\frac{3}{2}$$

- Stavimo supstituciju $-2x=t$.
- Dijeljenjem s -2 dobivamo $x=-\frac{t}{2}$.
- Kada je x jako blizu 0, tada iz $t=-2x$ slijedi da je t jako blizu $-2\cdot 0=0$.
- Konačno, svodimo limes na novu varijablu t.



Napomena

- Funkcija $f(x) = \dfrac{3x}{\ln(1-2x)}$ ima također uklonjiv prekid u točki $x = \frac{1}{2}$. Kako je $D_f = \langle -\infty, \frac{1}{2} \rangle \setminus \{0\}$, dovoljno je samo izračunati limes s lijeve strane i vidjeti da je to konačni broj.

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}-} \frac{3x}{\ln(1-2x)} = \frac{3 \cdot \frac{1}{2}}{\ln\left(1 - 2 \cdot \frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{3}{2}}{\ln(0+)} = \frac{\frac{3}{2}}{-\infty} = 0$$

- Kada je x jako blizu broja $\frac{1}{2}$ s lijeve strane, tada je $2x$ jako blizu broja 1 s lijeve strane. Stoga je $1 - 2x$ jako blizu broja 0 s desne strane.

Zadatak 5

Izračunajte sljedeće limese:

a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{3^x - 5^x}{x}$ b) $\displaystyle\lim_{x \to 6} \frac{5^{x-4} - 25}{3x - 18}$

Rješenje

Rješavanje navedenih limesa svodi se na tablični limes

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a.$$

Specijalno, za $a = e$ dobivamo

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

a) **Prvi način**

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a}$$

za $x = 0$ dobivamo $\frac{0}{0}$

dodamo i oduzmemo 1

$$\lim_{x \to 0} \frac{3^x - 5^x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{3^x - 5^x + 1 - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{(3^x - 1) - (5^x - 1)}{x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{3^x - 1}{x} - \frac{5^x - 1}{x} \right) = \lim_{x \to 0} \frac{3^x - 1}{x} - \lim_{x \to 0} \frac{5^x - 1}{x} =$$

$$= \ln 3 - \ln 5 = \ln \frac{3}{5}$$

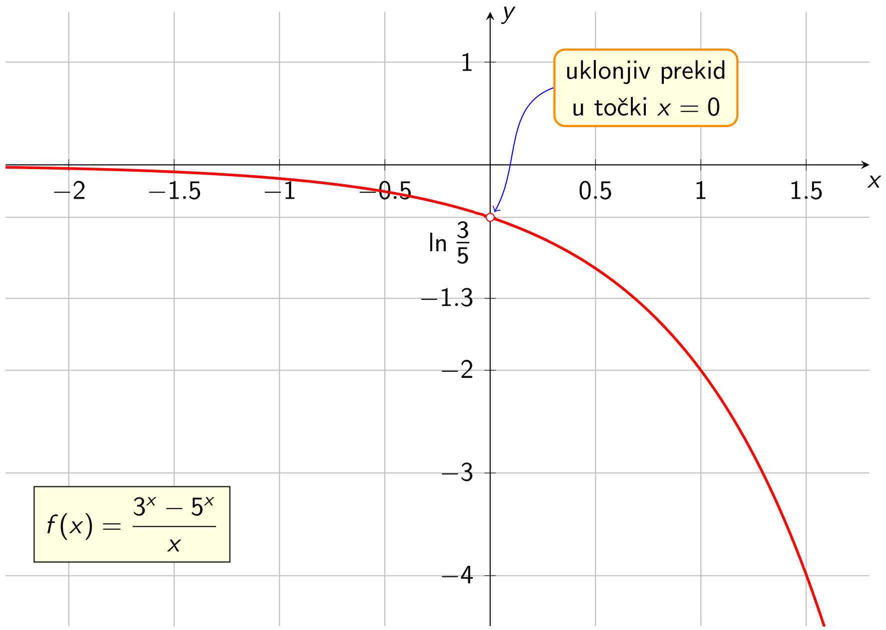
a) **Drugi način**

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a}$$

za $x = 0$ dobivamo $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{3^x - 5^x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{5^x \cdot \left(\frac{3^x}{5^x} - 1 \right)}{x} = \lim_{x \to 0} \left(5^x \cdot \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^x - 1}{x} \right) =$$

$$= \lim_{x \to 0} 5^x \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^x - 1}{x} = 5^0 \cdot \ln \frac{3}{5} = 1 \cdot \ln \frac{3}{5} = \ln \frac{3}{5}$$



b) **Prvi način**

za $x = 6$ dobivamo $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a$$

$$\lim_{x\to 6}\frac{5^{x-4}-25}{3x-18} = \lim_{x\to 6}\frac{5^{x-4}-25}{3(x-6)} = \begin{bmatrix} x-6=t, & x=t+6 \\ x\to 6, & t\to 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{5^{(t+6)-4}-25}{3t} = \lim_{t\to 0}\frac{5^{t+2}-25}{3t} = \lim_{t\to 0}\frac{5^t\cdot 5^2-25}{3t} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{25\cdot(5^t-1)}{3t} = \frac{25}{3}\lim_{t\to 0}\frac{5^t-1}{t} = \frac{25}{3}\ln 5$$

- Stavimo supstituciju $x - 6 = t$.
- Tada je $x = t + 6$.
- Kada je x jako blizu 6, tada iz $t = x - 6$ slijedi da je t jako blizu 0.
- Konačno, svodimo limes na novu varijablu t.

b) **Drugi način**

za $x = 6$ dobivamo $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a$$

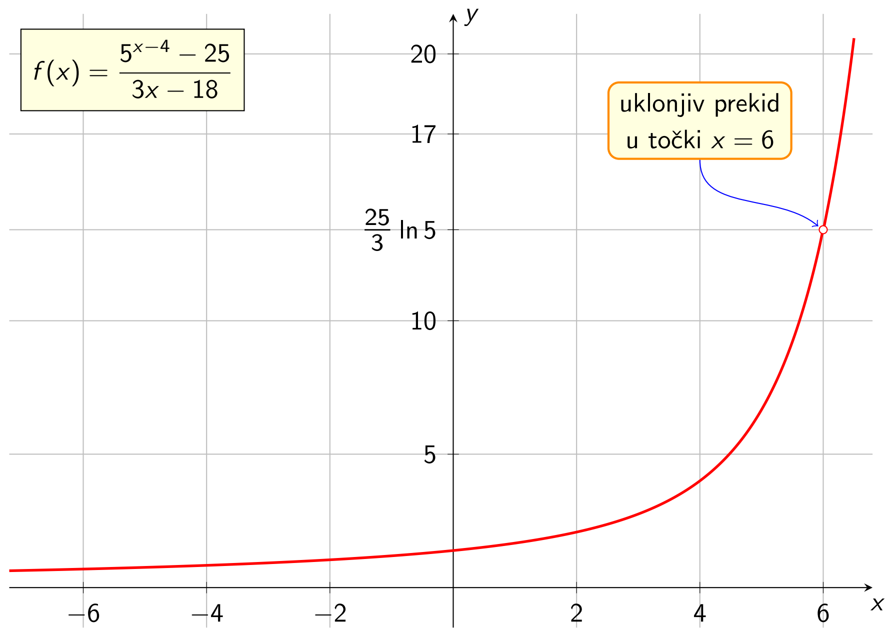
$$\lim_{x\to 6}\frac{5^{x-4}-25}{3x-18} = \begin{bmatrix} 3x-18=t, & x=\frac{1}{3}t+6 \\ x\to 6, & t\to 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{5^{\left(\frac{1}{3}t+6\right)-4}-25}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{5^{\frac{1}{3}t+2}-25}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{5^{\frac{1}{3}t}\cdot 5^2-25}{t} =$$

$\log_a x^k = k\log_a x$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{25\cdot\left(5^{\frac{1}{3}t}-1\right)}{t} = 25\lim_{t\to 0}\frac{\left(5^{\frac{1}{3}}\right)^t-1}{t} = 25\ln 5^{\frac{1}{3}} = \frac{25}{3}\ln 5$$

- Stavimo supstituciju $3x - 18 = t$.
- Tada je $3x = t + 18$ pa dijeljenjem s 3 dobivamo $x = \frac{1}{3}t + 6$.
- Kada je x jako blizu 6, tada iz $t = 3x - 18$ slijedi da je t jako blizu 0.
- Konačno, svodimo limes na novu varijablu t.



Zadatak 6

Izračunajte sljedeće limese:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin(2x-\pi)}{\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{\sin 5x}$

$\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1}$

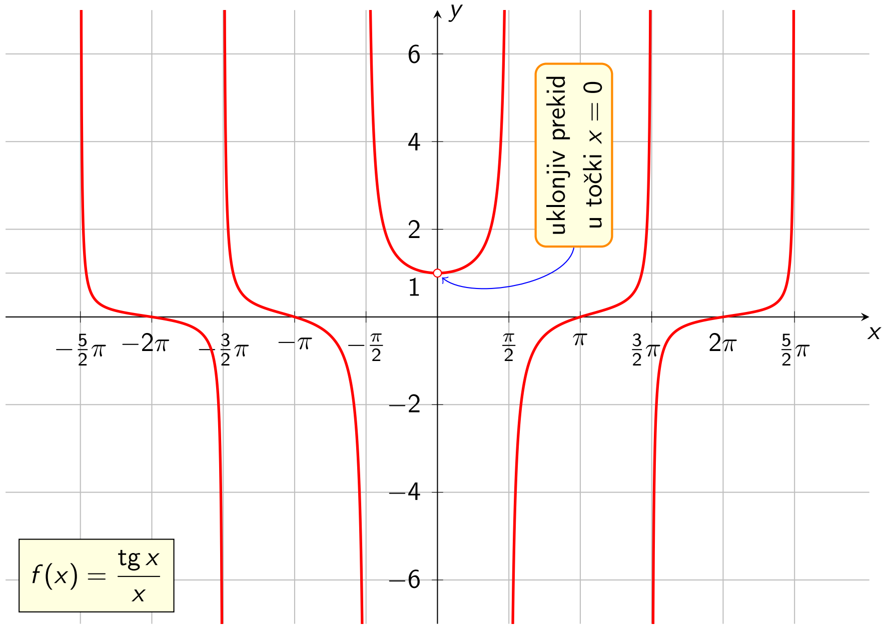
Rješenje

za $x = 0$ dobivamo $\frac{0}{0}$

a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x\cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = 1\cdot\frac{1}{\cos 0} = 1$$



$\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = 1}$ Neka je $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ proizvoljan. $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x} = \left[\begin{array}{ll} ax = t, & x = \frac{t}{a} \\ x\to 0, & t\to 0\end{array}\right] = \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{\frac{t}{a}} = \lim_{t\to 0}\frac{a\sin t}{t} =$$

$$= a\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = a\cdot 1 = a$$

$\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin ax}{x} = a}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} ax}{x} = \left[\begin{array}{ll} ax = t, & x = \frac{t}{a} \\ x\to 0, & t\to 0\end{array}\right] = \lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{tg} t}{\frac{t}{a}} = \lim_{t\to 0}\frac{a\operatorname{tg} t}{t} =$$

$$= a\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{tg} t}{t} = a\cdot 1 = a$$

$\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} ax}{x} = a}$

b) **Prvi način**

za $x = \frac{\pi}{2}$ dobivamo $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2x-\pi)}{\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)} = \left[\begin{array}{ll} x-\frac{\pi}{2} = t, & x = t+\frac{\pi}{2} \\ x\to\frac{\pi}{2}, & t\to 0\end{array}\right] =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{\sin\left(2\cdot\left(t+\frac{\pi}{2}\right)-\pi\right)}{\operatorname{tg} t} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin(2t+\pi-\pi)}{\operatorname{tg} t} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin 2t}{\operatorname{tg} t} =$$

podijelimo brojnik i nazivnik s t

$$= \lim_{t\to 0}\frac{\frac{\sin 2t}{t}}{\frac{\operatorname{tg} t}{t}} = \frac{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin 2t}{t}}{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\operatorname{tg} t}{t}} = \frac{2}{1} = 2$$

$\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin ax}{x} = a}$ $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} ax}{x} = a}$

b) **Drugi način**

za $x = \frac{\pi}{2}$ dobivamo $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2x-\pi)}{\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)} = \begin{bmatrix} 2x-\pi=t, & x=\frac{t+\pi}{2} \\ x\to\frac{\pi}{2}, & t\to 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{\operatorname{tg}\left(\frac{t+\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{\operatorname{tg}\frac{t}{2}} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}t} =$$

podijelimo brojnik i nazivnik s t

$$= \lim_{t\to 0}\frac{\frac{\sin t}{t}}{\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}t}{t}} = \frac{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}}{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}t}{t}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x} = a} \qquad \boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} ax}{x} = a}$$

b) **Treći način**

za $x = \frac{\pi}{2}$ dobivamo $\frac{0}{0}$

$$\boxed{\sin 2x = 2\sin x\cos x}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2x-\pi)}{\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(2\cdot\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right)}{\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cos^2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)} =$$

dvojni razlomak

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(2\cos^2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(2\sin^2 x\right) = 2\cdot\sin^2\frac{\pi}{2} = 2\cdot 1^2 = 2$$

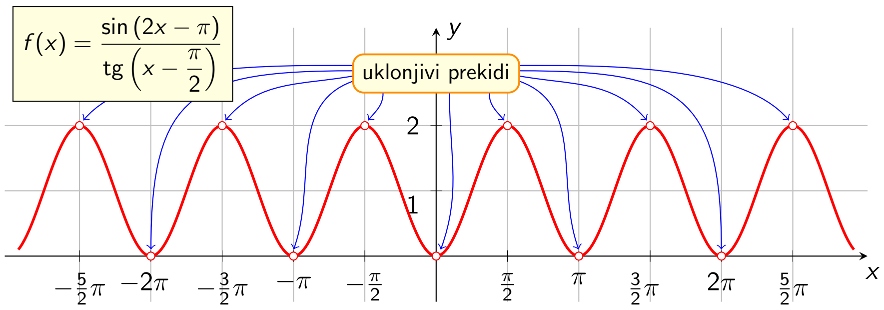
uvrstimo $x = \frac{\pi}{2}$

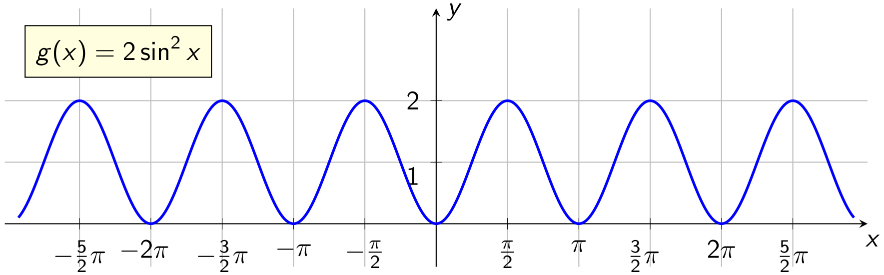
$$\boxed{\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = \sin x}$$

Napomena

- Domena funkcije $f(x) = \dfrac{\sin(2x-\pi)}{\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}$ je $D_f = \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{k}{2}\pi : k\in\mathbb{Z}\right\}$.
- Pravilo pridruživanja funkcije f na D_f se podudara s pravilom pridruživanja funkcije $g(x) = 2\sin^2 x$ čija je domena $D_g = \mathbb{R}$.
- Dakle, u svim točkama oblika $\frac{k}{2}\pi$ za $k\in\mathbb{Z}$ funkcija f ima uklonjive prekide, tj. može se dodefinirati u tim točkama tako da u njima bude neprekidna. To možemo napraviti na sljedeći način:

$$f\left(\frac{k}{2}\pi\right) = g\left(\frac{k}{2}\pi\right) = 2\sin^2\left(\frac{k}{2}\pi\right) = \begin{cases} 2\cdot(\pm 1)^2 = 2, & k \text{ neparan} \\ 2\cdot 0^2 = 0, & k \text{ paran} \end{cases}$$





c) za $x=0$ dobivamo $\frac{0}{0}$

$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sin 5x}\cdot\underbrace{\boxed{\frac{\sqrt{x+4}+2}{\sqrt{x+4}+2}}}_{=1}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x+4)-4}{\sin 5x\cdot\left(\sqrt{x+4}+2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin 5x\cdot\left(\sqrt{x+4}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin 5x}\cdot\frac{1}{\sqrt{x+4}+2}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\frac{\sin 5x}{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x+4}+2}\right)=$$

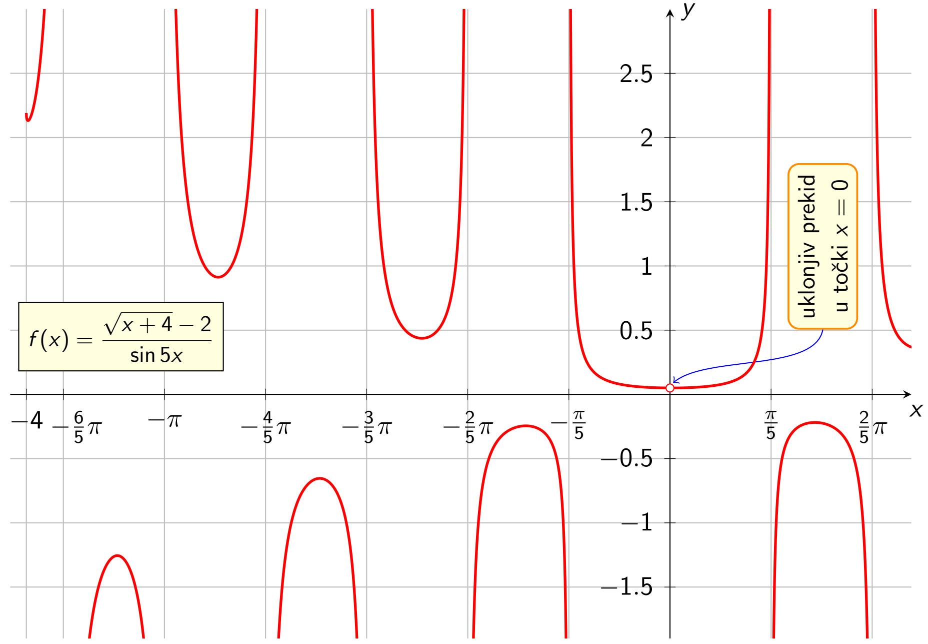
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin 5x}{x}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+4}+2}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{0+4}+2}=\frac{1}{20}$$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x}=a$

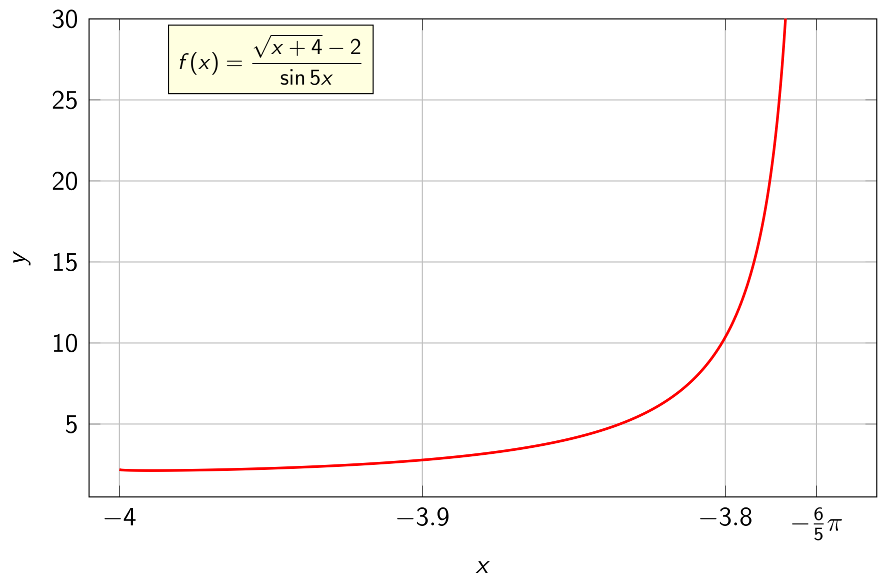
uvrstimo $x=0$

Napomena

- Domena funkcije $f(x)=\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sin 5x}$ je skup $[-4,+\infty\rangle$ iz kojeg su izbačene nultočke nazivnika, tj. nultočke funkcije $g(x)=\sin 5x$ koje su veće od -4. Dakle,
$$D_f=[-4,+\infty\rangle\setminus\left\{\tfrac{k}{5}\pi : k\in\mathbb{Z},\ k\geqslant -6\right\}.$$
- U točki $x=0$ funkcija f ima uklonjiv prekid. Ako funkciju f u točki 0 dodefiniramo tako da stavimo $f(0)=\frac{1}{20}$, tada je funkcija f neprekidna u točki $x=0$.
- U svim ostalim točkama oblika $\frac{k}{5}\pi$ $(k\in\mathbb{Z},\ k\geqslant -6,\ k\neq 0)$ funkcija f ima prekide druge vrste jer u tom slučaju je brojnik različit od 0 i nazivnik je jednak 0 pa su jednostrani limesi u tim točkama jednaki $\pm\infty$.



Zumiranje na dio domene $\left[-4,-\frac{6}{5}\pi\right\rangle$



Zadatak 7

Izračunajte sljedeće limese:

a) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x-3}{x-2}\right)^{2x}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{2\operatorname{ctg} x}$

Ako je $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = L$,

tada kratko pišemo $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L$.

Rješenje

a) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-3}{x-2}=1 \qquad \lim_{x\to\pm\infty}2x=\pm\infty \qquad \boxed{\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e}$

$\boxed{1^\infty}$

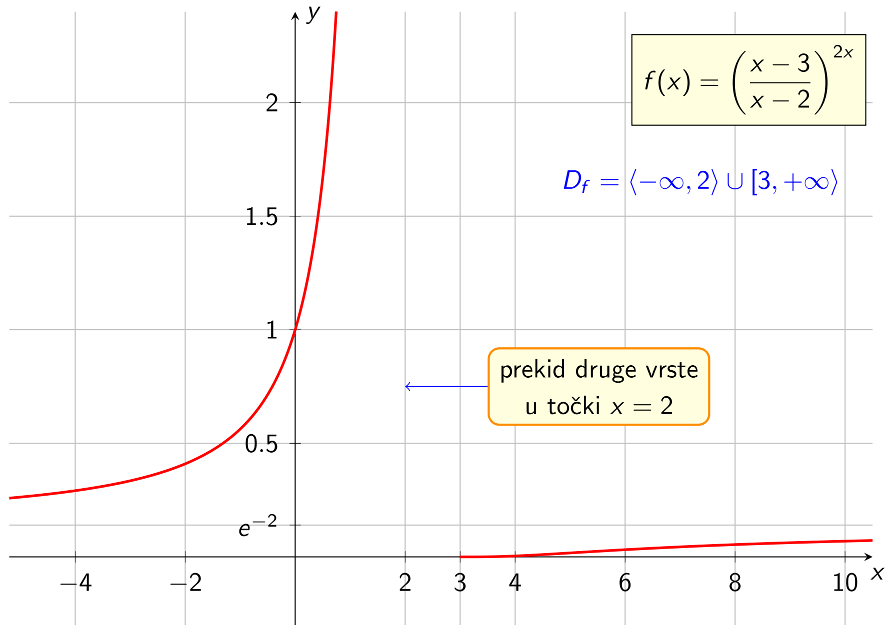
$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x-3}{x-2}\right)^{2x}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\underbrace{\frac{x-3}{x-2}-1}_{\substack{\text{svedemo na}\\ \text{zajednički nazivnik}}}\right)^{2x}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{-1}{x-2}\right)^{2x}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{-1}{x-2}\right)^{\frac{x-2}{-1}\cdot 2x\cdot\frac{-1}{x-2}}=$$

$\boxed{(a^n)^m=a^{nm}}$

$$=\left[\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{-1}{x-2}\right)^{\frac{x-2}{-1}}\right]^{\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{-2x}{x-2}}=e^{-2}$$

$(1+\text{jako mali broj})^{\text{recipročna vrijednost tog jako malog broja}}$ teži broju e



b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+\sin x)=1 \qquad \lim_{x\to 0}(2\operatorname{ctg} x)=\pm\infty \qquad \boxed{\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e}$

$\boxed{1^\infty}$

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{2\operatorname{ctg} x}=\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}\cdot 2\operatorname{ctg} x\cdot\sin x}=$$

$$=\left[\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\right]^{\lim\limits_{x\to 0}(2\operatorname{ctg} x\cdot\sin x)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(2\cdot\frac{\cos x}{\sin x}\cdot\sin x\right)}=$$

$\boxed{(a^n)^m=a^{nm}}$

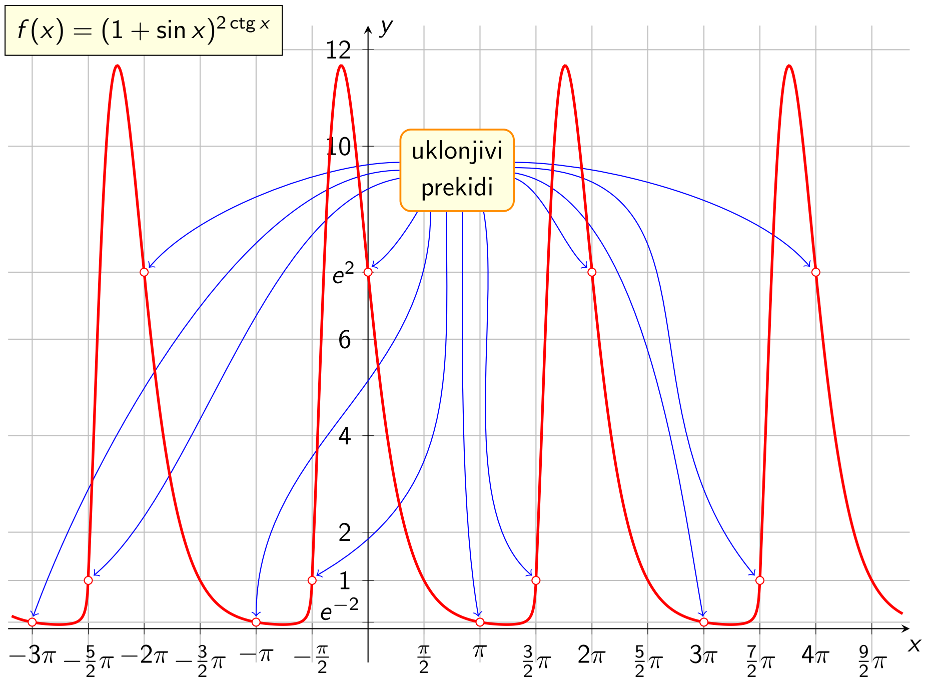
$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}(2\cos x)}=e^{2\cos 0}=e^{2\cdot 1}=e^2$$

- Kada je x jako mali broj, tada je $\sin x$ jako mali broj.
- $\frac{1}{\sin x}$ je recipročna vrijednost broja $\sin x$.

$(1+\text{jako mali broj})^{\text{recipročna vrijednost tog jako malog broja}}$ teži broju e

Napomena

- Funkcija $f(x) = (1+\sin x)^{2\operatorname{ctg} x}$ u svim točkama u kojima nije definirana ima uklonjive prekide, tj. može se u njima dodefinirati tako da bude neprekidna.
- U svim točkama oblika $x = 2k\pi$ za $k \in \mathbb{Z}$ imamo neodređeni oblik 1^∞ koji je u ovom slučaju uvijek jednak e^2.
- U svim točkama oblika $x = (2k+1)\pi$ za $k \in \mathbb{Z}$ imamo neodređeni oblik 1^∞ koji je u ovom slučaju uvijek jednak e^{-2}.
- U svim točkama oblika $x = \frac{4k+3}{2}\pi$ za $k \in \mathbb{Z}$ (točke u kojima je $1+\sin x = 0$) imamo neodređeni oblik 0^0 koji je u ovom slučaju uvijek jednak 1. Računanje takvog limesa pokazat ćemo kasnije pomoću L'Hospitalovog pravila.



Napomena

$$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e}$$

$$\boxed{(a^n)^m = a^{nm}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^x =$$

$$= \left[\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^{\lim\limits_{x\to+\infty} x} = e^{+\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2} = \lim_{x\to-\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^x =$$

$$= \left[\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^{\lim\limits_{x\to-\infty} x} = e^{-\infty} = 0$$

Zadatak 8

Ispitajte neprekidnost funkcije $f(x) = \dfrac{x^2-4x+3}{x^2-1}$.

Rješenje

- Prirodna domena funkcije f je $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.
- U brojniku i nazivniku se nalaze polinomi, a polinomi su neprekidne funkcije na svojoj prirodnoj domeni.
- Kvocijent neprekidnih funkcija je neprekidna funkcija pa slijedi da je f neprekidna funkcija na $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.
- U točkama -1 i 1 funkcija f nije definirana pa nema smisla raspravljati o neprekidnosti funkcije f u tim točkama.
- Međutim, pitamo se možemo li funkciju f dodefinirati u tim točkama tako da ona bude u njima neprekidna.

- Računamo jednostrane limese u točki $x = -1$. Kako čak niti jedan od tih limesa nije realni broj, zaključujemo da funkcija f ima prekid druge vrste u točki $x = -1$. Drugim riječima, kako god da dodefiniramo funkciju f u točki $x = -1$, ona će u toj točki uvijek imati prekid druge vrste.

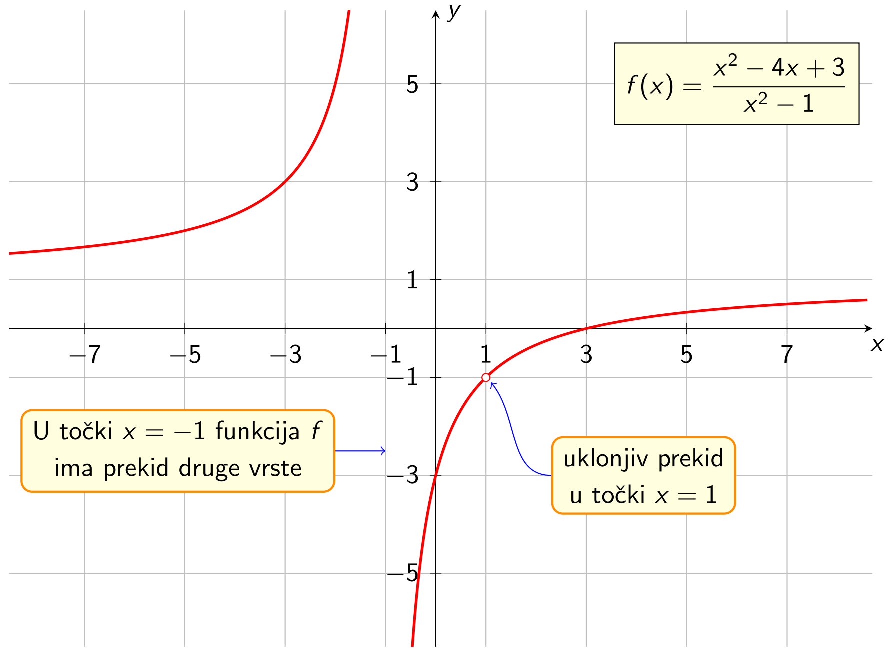
$$\lim_{x\to -1-} f(x) = \lim_{x\to -1-} \frac{x^2-4x+3}{x^2-1} = \frac{(-1)^2-4\cdot(-1)+3}{(-1)^2-1} = \frac{8}{0+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to -1+} f(x) = \lim_{x\to -1+} \frac{x^2-4x+3}{x^2-1} = \frac{(-1)^2-4\cdot(-1)+3}{(-1)^2-1} = \frac{8}{0-} = -\infty$$

- Računamo jednostrane limese u točki $x = 1$. Zapravo ćemo odmah izračunati obostrani limes u toj točki.

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-4x+3}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x-3}{x+1} = \frac{1-3}{1+1} = \frac{-2}{2} = -1$$

- Tada za jednostrane limese također vrijedi $\lim\limits_{x\to 1+} f(x) = -1$ i $\lim\limits_{x\to 1-} f(x) = -1$.
- Stoga funkcija f u točki $x = 1$ ima uklonjiv prekid. Drugim riječima, ako funkciju f u točki $x = 1$ dodefiniramo tako da stavimo $f(1) = -1$, tada je funkcija f neprekidna u toj točki.



Zadatak 9

Ispitajte neprekidnost funkcije $g(x) = \dfrac{x-1}{|x-1|}$.

Rješenje

- Prirodna domena funkcije g je $D_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- U brojniku i nazivniku se nalaze neprekidne funkcije.
- Kvocijent neprekidnih funkcija je neprekidna funkcija pa slijedi da je g neprekidna funkcija na $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- U točki 1 funkcija g nije definirana pa nema smisla raspravljati o neprekidnosti funkcije g u toj točki.
- Međutim, pitamo se možemo li funkciju g dodefinirati u toj točki tako da ona bude u njoj neprekidna.

- Računamo jednostrane limese u točki $x = 1$. Riješimo se najprije apsolutne vrijednosti kako bismo brže odredili jednostrane limese.

$$g(x) = \frac{x-1}{|x-1|} = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x-1}, & x-1>0 \\ \dfrac{x-1}{-(x-1)}, & x-1<0 \end{cases} = \begin{cases} 1, & x>1 \\ -1, & x<1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 1-} g(x) \underset{\boxed{x \text{ je blizu } 1 \text{ i } x<1}}{=} \lim_{x \to 1-} (-1) = -1 \qquad \lim_{x \to 1+} g(x) \underset{\boxed{x \text{ je blizu } 1 \text{ i } x>1}}{=} \lim_{x \to 1+} 1 = 1$$

- Oba jednostrana limesa postoje, ali su međusobno različiti. Stoga funkcija g ima prekid prve vrste u točki $x = 1$. Drugim riječima, kako god da dodefiniramo funkciju g u točki $x = 1$, ona će u toj točki uvijek imati prekid prve vrste (nikada neće biti neprekidna u toj točki).