Neke primjene derivacija

Matematika 2

Damir Horvat

FOI, Varaždin

Zadatak 1

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}, \quad y = f(x)$$

Odredite derivaciju arkus sinus funkcije pomoću formule za derivaciju inverzne funkcije.

$$\boxed{(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

Rješenje

$$f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1], \quad \overbrace{f(x)}^{=y} = \sin x$$

$$\boxed{f'(x) = \cos x} \qquad \boxed{y = \sin x}$$

$$f^{-1} : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad f^{-1}(x) = \arcsin x$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$
$$\cos x = \pm\sqrt{1 - \sin^2 x}$$
$$\boxed{\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}}$$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

$$(\arcsin y)' = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

$x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ pa je $\cos x \geqslant 0$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}, \quad y = f(x)$$

Zadatak 2

Neka je $f(x) = (-8x+1)^3$ i neka je g inverzna funkcija od funkcije f. Odredite $g'(1)$ bez direktnog određivanja pravila pridruživanja od funkcije g.

$$\boxed{g'(1) = -\frac{1}{24}}$$

Rješenje

- $f(x) = (-8x+1)^3, \quad g = f^{-1}, \quad f(\overset{x}{\overset{\downarrow}{0}}) = \overset{y}{\overset{\downarrow}{1}}$
- $g'(1) = (f^{-1})'(1) = \dfrac{1}{f'(0)} = \dfrac{1}{-24} = -\dfrac{1}{24}$

$$(-8x+1)^3 = 1 \quad / \sqrt[3]{\ }$$
$$-8x + 1 = 1$$
$$-8x = 0$$
$$x = 0$$

$$f'(x) = 3 \cdot (-8x+1)^2 \cdot (-8x+1)' = 3 \cdot (-8x+1)^2 \cdot (-8)$$

$$\boxed{f'(x) = -24 \cdot (-8x+1)^2} \qquad f'(0) = -24 \cdot (-8 \cdot 0 + 1)^2$$

$$\boxed{f'(0) = -24}$$

Zadatak 3

Izračunajte sljedeće limese:

a) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{\ln(8 + e^x)}{2x}$

b) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(8 + e^x)}{2x}$

Rješenje

a)

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\ln(8 + e^x)}{2x} = \frac{\ln(8 + e^{-\infty})}{2 \cdot (-\infty)} = \frac{\ln(8 + 0)}{2 \cdot (-\infty)} = \frac{\ln 8}{-\infty} = 0$$

b)

$$\boxed{\left(\ln(\text{nešto})\right)' = \frac{1}{\text{nešto}}\cdot(\text{nešto})'} \qquad \boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}}$$

$$\overset{\boxed{\frac{\infty}{\infty}}}{\lim_{x\to+\infty}} \frac{\ln(8+e^x)}{2x} \overset{\boxed{\text{L'Hospitalovo pravilo}}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\ln(8+e^x)\right)'}{(2x)'} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{8+e^x}\cdot(8+e^x)'}{2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{e^x}{8+e^x}}{2} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2\cdot(8+e^x)} = \frac{1}{2}\overset{\boxed{\frac{\infty}{\infty}}}{\lim_{x\to+\infty}} \frac{e^x}{8+e^x} \overset{\boxed{\text{L'Hospitalovo pravilo}}}{=} \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty} \frac{(e^x)'}{(8+e^x)'} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty} 1 = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}$$

Napomena

- Ako je $\lim\limits_{x\to c}\left(f(x)\cdot g(x)\right)$ oblika $0\cdot\infty$, tada na njega ne možemo direktno primijeniti L'Hospitalovo pravilo.
- Ako želimo na neodređeni oblik $0\cdot\infty$ primijeniti L'Hospitalovo pravilo, moramo ga prije primjene tog pravila svesti na neki od neodređenih oblika $\frac{0}{0}$ ili $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\overset{\boxed{0\cdot\infty}}{\lim_{x\to c}}\left(f(x)\cdot g(x)\right) = \overset{\boxed{\frac{0}{0}}}{\lim_{x\to c}} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \overset{\boxed{\frac{\infty}{\infty}}}{\lim_{x\to c}} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

Zadatak 4

Pomoću L'Hospitalovog pravila izračunajte limes

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(3x^2e^{-x^2}\right).$$

Rješenje

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(3x^2) = 3\cdot(\pm\infty)^2 = 3\cdot(+\infty) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{-x^2} = e^{-(\pm\infty)^2} = e^{-\infty} = 0$
- Radi se o neodređenom obliku $0\cdot\infty$ pa ćemo ga prije primjene L'Hospitalovog pravila svesti na neodređeni oblik $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\boxed{\left(e^{\text{nešto}}\right)' = e^{\text{nešto}}\cdot(\text{nešto})'} \qquad \boxed{(e^x)' = e^x}$$

$$e^{-x^2} = \frac{1}{e^{x^2}}$$

$$\overset{\boxed{0\cdot\infty}}{\lim_{x\to\pm\infty}}\left(3x^2e^{-x^2}\right) = \overset{\boxed{\frac{\infty}{\infty}}}{\lim_{x\to\pm\infty}} \frac{3x^2}{e^{x^2}} \overset{\boxed{\text{L'Hospitalovo pravilo}}}{=} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(3x^2)'}{(e^{x^2})'} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{6x}{e^{x^2}\cdot(x^2)'} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{6x}{2xe^{x^2}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3}{e^{x^2}} = \frac{3}{+\infty} = 0$$

$$e^{(\pm\infty)^2} = e^{+\infty} = +\infty$$

Napomena

- Ako je $\lim\limits_{x\to c} f(x)^{g(x)}$ nekog od oblika $1^\infty, \infty^0$ ili 0^0, tada na njega ne možemo direktno primijeniti L'Hospitalovo pravilo.
- Najprije treba logaritmirati izraz $f(x)^{g(x)}$ i izračunati limes logaritmiranog izraza koji je oblika $0\cdot\infty$. Ranije je već objašnjeno kako se primijenjuje L'Hospitalovo pravilo na neodređeni izraz oblika $0\cdot\infty$.

$\boxed{\log_a x^k = k\cdot\log_a x}$

$$\underbrace{\lim_{x\to c} f(x)^{g(x)}}_{1^\infty,\,\infty^0,\,0^0} \qquad \lim_{x\to c}\left(\ln f(x)^{g(x)}\right) = \underbrace{\lim_{x\to c}\left(g(x)\cdot\ln f(x)\right)}_{0\cdot\infty}$$

Napomena

- Pretpostavimo da je limes logaritmiranog izraza jednak A, tj.

$$\lim_{x\to c}\left(\ln f(x)^{g(x)}\right) = A.$$

- Kako limes i neprekidna funkcija komutiraju, dalje dobivamo

$$\ln\left(\lim_{x\to c} f(x)^{g(x)}\right) = A,$$

odnosno

$$\lim_{x\to c} f(x)^{g(x)} = e^A.$$

Zadatak 5

Pomoću L'Hospitalovog pravila izračunajte limes

$$\lim_{x\to\frac{3}{2}\pi}(1+\sin x)^{2\operatorname{ctg} x}.$$

Rješenje

- $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}\pi}(1+\sin x) = 1+\sin\frac{3}{2}\pi = 1+(-1) = 0$
- $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}\pi}(2\operatorname{ctg} x) = 2\operatorname{ctg}\frac{3}{2}\pi = 2\cdot 0 = 0$
- Radi se o neodređenom obliku 0^0 pa ćemo najprije izračunati limes logaritmiranog izraza $\ln(1+\sin x)^{2\operatorname{ctg} x}$.

$\operatorname{ctg} x = \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$

$\boxed{(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}}$

$$\lim_{x\to\frac{3}{2}\pi}\left(\ln(1+\sin x)^{2\operatorname{ctg} x}\right) = \underbrace{\lim_{x\to\frac{3}{2}\pi}\left(2\operatorname{ctg} x\cdot\ln(1+\sin x)\right)}_{0\cdot\infty} =$$

$$= \underbrace{\lim_{x\to\frac{3}{2}\pi}\frac{2\ln(1+\sin x)}{\operatorname{tg} x}}_{\frac{\infty}{\infty}} \overset{\text{L'Hospitalovo pravilo}}{=} \lim_{x\to\frac{3}{2}\pi}\frac{\left(2\ln(1+\sin x)\right)'}{(\operatorname{tg} x)'} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{3}{2}\pi}\frac{\frac{2}{1+\sin x}\cdot(1+\sin x)'}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \lim_{x\to\frac{3}{2}\pi}\frac{\frac{2\cos x}{1+\sin x}}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \underbrace{\lim_{x\to\frac{3}{2}\pi}\frac{2\cos^3 x}{1+\sin x}}_{\frac{0}{0}} =$$

$\boxed{\left(\ln(\text{nešto})\right)' = \dfrac{1}{\text{nešto}}\cdot(\text{nešto})'}$ $\boxed{(\ln x)' = \dfrac{1}{x}}$ $\boxed{(\sin x)' = \cos x}$

$\cos^3 x = (\cos x)^3$

$\frac{0}{0}$ L'Hospitalovo pravilo

$$= \lim_{x\to\frac{3}{2}\pi} \frac{2\cos^3 x}{1+\sin x} = \lim_{x\to\frac{3}{2}\pi} \frac{(2\cos^3 x)'}{(1+\sin x)'} = \lim_{x\to\frac{3}{2}\pi} \frac{2\cdot 3\cos^2 x\cdot(\cos x)'}{\cos x} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{3}{2}\pi} \frac{6\cos^2 x\cdot(-\sin x)}{\cos x} = \lim_{x\to\frac{3}{2}\pi} \left(-6\sin x\cos x\right) =$$

$$= -6\cdot\sin\frac{3}{2}\pi\cdot\cos\frac{3}{2}\pi = -6\cdot(-1)\cdot 0 = 0$$

$\left((\text{nešto})^n\right)' = n(\text{nešto})^{n-1}\cdot(\text{nešto})'$ $\quad (x^n)' = nx^{n-1}$

- Dakle, dobili smo

$$\lim_{x\to\frac{3}{2}\pi} \left(\ln{(1+\sin x)}^{2\operatorname{ctg} x}\right) = 0.$$

- Limes i neprekidna funkcija komutiraju pa slijedi

$$\ln\left(\lim_{x\to\frac{3}{2}\pi} (1+\sin x)^{2\operatorname{ctg} x}\right) = 0.$$

- Stoga je konačno

$$\lim_{x\to\frac{3}{2}\pi} (1+\sin x)^{2\operatorname{ctg} x} = e^0 = 1.$$

Zadatak 6

Neka je $a > 0$ proizvoljni realni broj. Izračunajte limes

$$\lim_{x\to 0+} x^{\frac{\ln a}{\ln x}}.$$

Rješenje

- $\lim_{x\to 0+} x = 0$
- $\lim_{x\to 0+} \frac{\ln a}{\ln x} = \frac{\ln a}{-\infty} = 0$
- Radi se o neodređenom obliku 0^0. Međutim, njega ćemo lako riješiti elementarnim transformacijama bez upotrebe L'Hospitalovog pravila.

$\log_a x^k = k\log_a x$ $\quad a^{\log_a x} = x$

0^0

$$\lim_{x\to 0+} x^{\frac{\ln a}{\ln x}} = \lim_{x\to 0+} e^{\ln x^{\frac{\ln a}{\ln x}}} = \lim_{x\to 0+} e^{\frac{\ln a}{\ln x}\cdot\ln x} = \lim_{x\to 0+} e^{\ln a} = \lim_{x\to 0+} a = a$$

- Navedeni primjer pokazuje kako neodređeni izraz 0^0 može poprimiti bilo koju pozitivnu realnu vrijednost.

Napomena

- Iako je 0^0 neodređeni izraz, u matematici se svejedno definira da je $0^0 = 1$. Za to postoje opravdani razlozi. Jedan od jednostavnih razloga koje ovdje možemo lako objasniti je binomni teorem

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Ako stavimo $a = 0$ i $b = 1$, tada dobivamo da je lijeva strana jednaka $1^n = 1$, a desna je jednaka 0^0. Ako želimo da taj teorem vrijedi za ovaj slučaj, tada moramo definirati da je $0^0 = 1$.

- Riječima rečeno, *nula na nultu jednako je jedan*. U ovom slučaju se ovdje ne radi o neodređenom izrazu.

Napomena

- U slučaju računanja limesa, izraz 0^0 također radi jednostavnosti čitamo *nula na nultu*. Međutim, u ovom kontekstu 0^0 ima potpuno drukčije značenje.
- U kontekstu limesa, 0^0 je preciznije čitati *beskonačno mali broj na beskonačno mali broj*. Drugim riječima, baza i eksponent nisu doslovno jednaki nula, već su to beskonačno male veličine, tj. brojevi koji su po volji jako blizu broja nula.
- Prethodni zadatak pokazuje kako u tom slučaju ne možemo definirati čemu je jednako 0^0 jer je to zaista neodređeni izraz koji može poprimiti bilo koju pozitivnu realnu vrijednost, ovisno o odnosu beskonačno malih veličina u bazi i eksponentu.

Zadatak 7

Odredite jednadžbu tangente na graf funkcije $f(x) = x - x^2$ koja je paralelna s pravcem $y = \frac{3}{4}x - 1$.

Rješenje

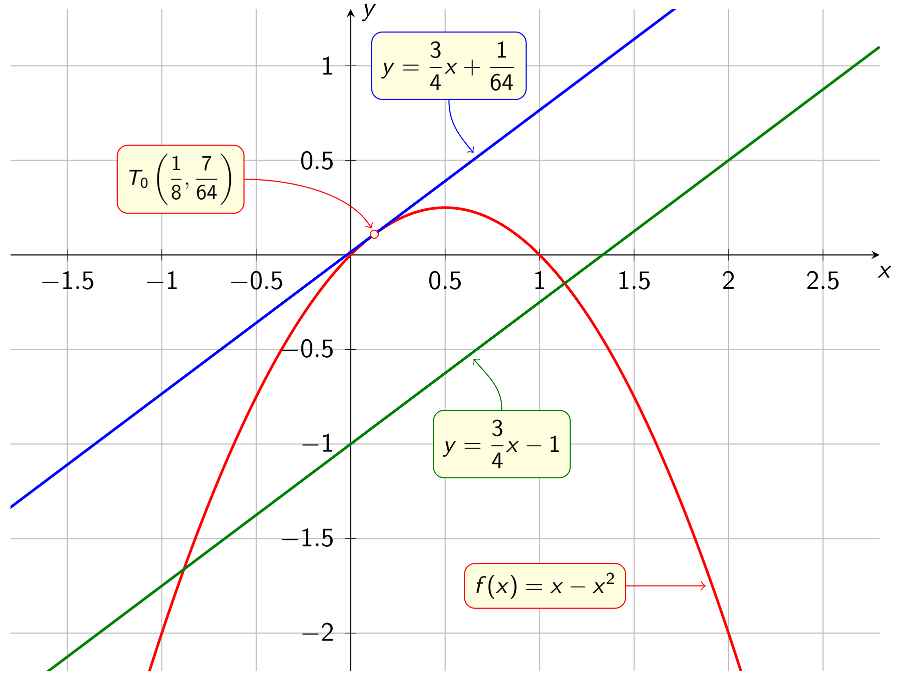
- $p \ldots y = \frac{3}{4}x - 1, \quad t \ldots y - y_0 = k_t(x - x_0), \quad k_t = f'(x_0)$
- $t \parallel p \implies k_t = k_p \implies \boxed{k_t = \frac{3}{4}} \qquad \boxed{x_0 = \frac{1}{8}} \qquad \boxed{y_0 = \frac{7}{64}}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= k_t \\ (x - x^2)' &= \frac{3}{4} \\ 1 - 2x &= \frac{3}{4} \quad / \cdot 4 \\ 4 - 8x &= 3 \\ -8x &= -1 \\ x &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

$$y_0 = f(x_0) = \frac{1}{8} - \left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{7}{64}$$

$$\begin{aligned} y - \frac{7}{64} &= \frac{3}{4}\left(x - \frac{1}{8}\right) \\ y &= \frac{3}{4}x - \frac{3}{32} + \frac{7}{64} \\ y &= \frac{3}{4}x + \frac{1}{64} \end{aligned}$$

$$\boxed{t \ldots y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{64}}$$



Zadatak 8

Zadana je kružnica $x^2 + y^2 = 10$ i parabola $y = 3x^2 - 13x + 13$.

a) *Odredite kut između zadanih krivulja u točki njihovog presjeka s apscisom 1.*

b) *Odredite kut između zadanih krivulja u točki njihovog presjeka s apscisom 3.*

Rješenje

- Ako je $x_0 = 1$, tada iz $y = 3x^2 - 13x + 13$ slijedi

$$y_0 = 3 \cdot 1^2 - 13 \cdot 1 + 13 = 3.$$

Kako je $1^2 + 3^2 = 10$, točka $A(1,3)$ također leži na kružnici $x^2 + y^2 = 10$.

- Ako je $x_0 = 3$, tada iz $y = 3x^2 - 13x + 13$ slijedi

$$y_0 = 3 \cdot 3^2 - 13 \cdot 3 + 13 = 1.$$

Kako je $3^2 + 1^2 = 10$, točka $B(3,1)$ također leži na kružnici $x^2 + y^2 = 10$.

- Dakle, trebamo pronaći pod kojim kutovima se sijeku zadane krivulje u točkama $A(1,3)$ i $B(3,1)$.

$$x^2 + y^2 = 10 \;\Big/ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$$

$$2x + 2yy' = 0 \;\Big/ :2$$

$$x + yy' = 0$$

$$yy' = -x$$

$$y' = -\frac{x}{y} \qquad \boxed{y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}$$

$$\boxed{k_1 = -\frac{x}{y}}$$

$$y = 3x^2 - 13x + 13$$

$$y' = 6x - 13$$

$$\boxed{k_2 = 6x - 13}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}\right|}$$

a)

$$k_1 = -\frac{x_0}{y_0} = -\frac{1}{3} \qquad \boxed{\begin{matrix} x_0 \; y_0 \\ A(1,3) \end{matrix}}$$

$$k_2 = 6x_0 - 13 = 6 \cdot 1 - 13 = -7$$

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \left|\frac{-\frac{1}{3} - (-7)}{1 + \frac{-1}{3} \cdot (-7)}\right| = \left|\frac{\frac{20}{3}}{\frac{10}{3}}\right| = 2$$

$$\varphi_1 = \operatorname{arctg} 2 \qquad \boxed{\varphi_1 = 63^\circ\, 26'\, 6''}$$

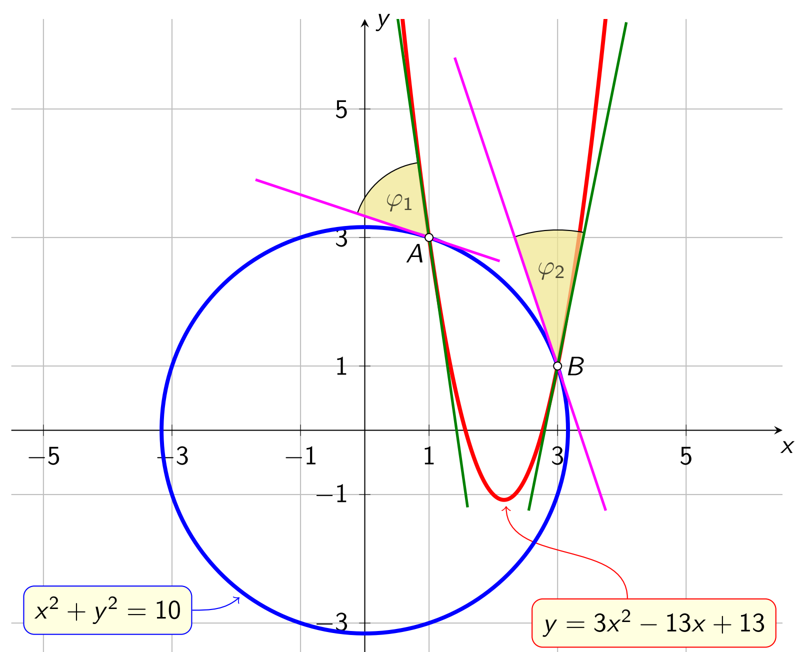
b)

$$k_1 = -\frac{x_0}{y_0} = -\frac{3}{1} = -3 \qquad \boxed{\begin{matrix} x_0 \; y_0 \\ B(3,1) \end{matrix}}$$

$$k_2 = 6x_0 - 13 = 6 \cdot 3 - 13 = 5$$

$$\operatorname{tg}\varphi_2 = \left|\frac{-3 - 5}{1 + (-3) \cdot 5}\right| = \left|\frac{-8}{-14}\right| = \frac{4}{7}$$

$$\varphi_2 = \operatorname{arctg}\frac{4}{7} \qquad \boxed{\varphi_2 = 29^\circ\, 44'\, 42''}$$



Zadatak 9

Odredite intervale monotonosti i ekstreme funkcije $f(x) = x^4 + 4x - 5$.

Rješenje

- Domena funkcije f jednaka je $D_f = \mathbb{R}$.
- Derivacija funkcije f jednaka je $f'(x) = 4x^3 + 4$.
- Tražimo nultočke derivacije kako bismo dobili stacionarne točke.

$$4x^3 + 4 = 0 \implies 4x^3 = -4 \implies x^3 = -1 \implies \boxed{x = -1}$$

- $x = -1$ je jedina stacionarna točka funkcije f.
- Karakter stacionarne točke možemo ispitati pomoću prve derivacije ili pomoću druge derivacije.

$\boxed{f'(x) = 4x^3 + 4}$ $\boxed{f(x) = x^4 + 4x - 5}$

Ispitivanje karaktera stacionarne točke pomoću prve derivacije

	$-\infty$	-1	$+\infty$
f'	$-$	$+$	
f	$\searrow$	$\nearrow$	

$$f(-1) = (-1)^4 + 4 \cdot (-1) - 5 = -8$$

- Funkcija f postiže lokalni minimum u točki $x = -1$ i on iznosi $f(-1) = -8$. U ovom slučaju taj minimum je ujedno i globalni minimum jer nakon što funkcija prestane padati, nakon toga stalno raste.
- Funkcija f strogo pada na intervalu $\langle -\infty, -1 \rangle$, a strogo raste na intervalu $\langle -1, +\infty \rangle$.

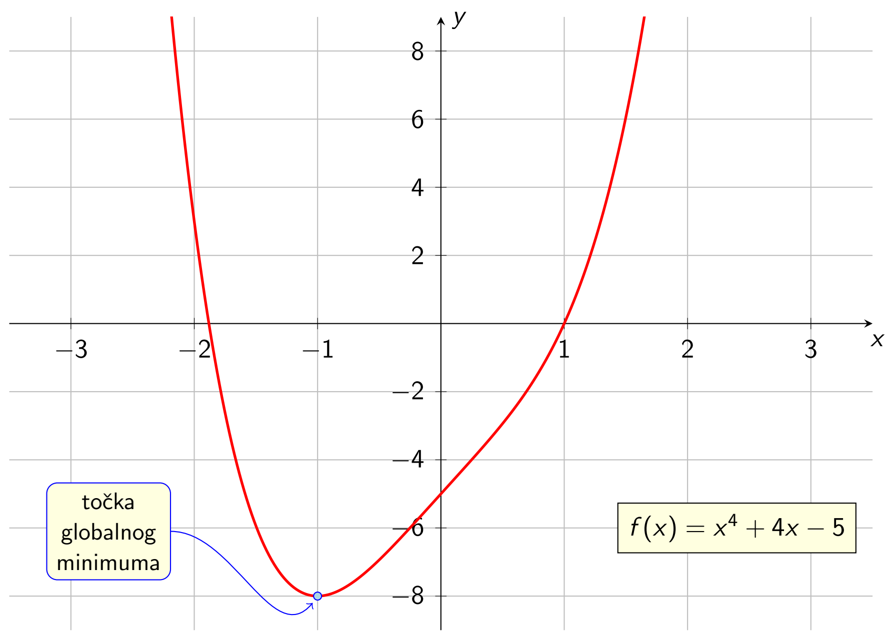
$\boxed{f'(x) = 4x^3 + 4}$ $\boxed{f(x) = x^4 + 4x - 5}$

Ispitivanje karaktera stacionarne točke pomoću druge derivacije

- $f''(x) = 12x^2, \quad f''(-1) = 12 \cdot (-1)^2 = 12 > 0$
- Kako je $f'(-1) = 0$ i $f''(-1) > 0$, zaključujemo da u točki $x = -1$ funkcija f postiže lokalni minimum koji je jednak

$$f(-1) = (-1)^4 + 4 \cdot (-1) - 5 = -8.$$

- U ovom slučaju nije odmah jasno radi li se o globalnom minimumu kao što je to bilo jasno iz prethodne tablice preko prve derivacije.
- Isto tako, ako želimo dobiti intervale monotonosti, onda to moramo raditi preko prve derivacije. Preko druge derivacije ne možemo dobiti intervale monotonosti funkcije, nego intervale konveksnosti i konkavnosti (tema idućih seminara).

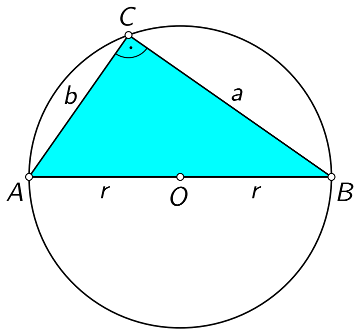


Zadatak 10

U kružnici polumjera 2 upisan je pravokutni trokut. Odredite duljine stranica trokuta tako da njegova površina bude maksimalna.

Rješenje

$\boxed{c = 4}$



$|OA| = |OB| = r = 2$

$c = 2r = 4$ Talesov teorem

$a^2 + b^2 = c^2$ Pitagorin teorem

$a^2 + b^2 = 16$

$b^2 = 16 - a^2$

$b = \pm\sqrt{16 - a^2}$ $b > 0$

$\boxed{b = \sqrt{16 - a^2}}$

$P = \frac{1}{2}ab$ površina pravokutnog trokuta

$P = \frac{1}{2}a\sqrt{16 - a^2}$

$\boxed{P(a) = \frac{1}{2}a\sqrt{16 - a^2}}$

- Tražimo maksimum (ukoliko postoji) funkcije jedne varijable

$$P(a) = \frac{1}{2}a\sqrt{16 - a^2}.$$

- Najprije odredimo derivaciju funkcije P.

$$P'(a) = \left(\frac{1}{2}a\right)' \cdot \sqrt{16 - a^2} + \frac{1}{2}a \cdot \left(\sqrt{16 - a^2}\right)' =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{16 - a^2} + \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2\sqrt{16 - a^2}} \cdot (16 - a^2)' =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{16 - a^2} + \frac{1}{2}a \cdot \frac{-2a}{2\sqrt{16 - a^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{16 - a^2} - \frac{a^2}{2\sqrt{16 - a^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{16 - a^2}^{\,2} - a^2}{2\sqrt{16 - a^2}} = \frac{16 - a^2 - a^2}{2\sqrt{16 - a^2}} = \frac{16 - 2a^2}{2\sqrt{16 - a^2}} = \frac{8 - a^2}{\sqrt{16 - a^2}}$$

$\boxed{P'(a) = \frac{8 - a^2}{\sqrt{16 - a^2}}}$ $\boxed{P(a) = \frac{1}{2}a\sqrt{16 - a^2}}$

$16 - a^2 \geqslant 0 \;\Leftrightarrow\; a^2 \leqslant 16 \;\Leftrightarrow\; a \in [-4, 4]$

$P'(a) = 0$

$\frac{8 - a^2}{\sqrt{16 - a^2}} = 0$

$8 - a^2 = 0$

$a^2 = 8$

$a = \pm 2\sqrt{2}$ $a > 0$

$\boxed{c = 4}$

$\boxed{a = 2\sqrt{2}}$ $\boxed{b = 2\sqrt{2}}$

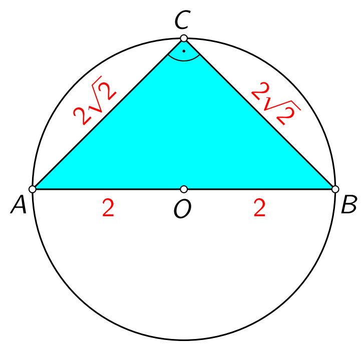
	0		$2\sqrt{2}$		4
P'		$+$		$-$	
P		$\nearrow$		$\searrow$	

✏ Funkcija P u točki $a = 2\sqrt{2}$ postiže globalni maksimum 4 na segmentu $[0, 4]$.

$\boxed{P_{\max} = 4}$

$$P(2\sqrt{2}) = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{16 - \left(2\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$$

$$b = \sqrt{16 - a^2} = \sqrt{16 - \left(2\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{16 - 8} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$



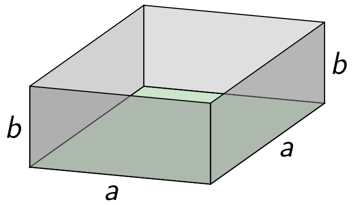
✏ Pravokutni trokut maksimalne površine upisan u kružnicu polumjera 2 jest jednakokračni pravokutni trokut čije su duljine kateta jednake $2\sqrt{2}$, a duljina hipotenuze je jednaka 4.

✏ Površina takvog trokuta jednaka je 4, tj. po iznosu (bez mjernih jedinica) je jednaka duljini hipotenuze.

Zadatak 11

Odredite dimenzije otvorenog bazena s kvadratnim dnom volumena $32\,m^3$ tako da za oblaganje njegovih bočnih dijelova i dna bude potrebna najmanja količina materijala.

Rješenje



- Bazen ima oblik kvadra čija baza je kvadrat pri čemu taj kvadar nema gornju bazu (gornja strana je otvorena).
- Uz zadani volumen kvadra tražimo njegove dimenzije tako da mu oplošje bude minimalno (u tom slučaju potrošit će se najmanja količina materijala za izgradnju bazena).
- Bazen je omeđen s jednim kvadratom duljine stranice a i četiri pravokutnika s duljinama stranica a i b. Stoga je njegov volumen jednak $V = a^2b$, a oplošje je jednako $O = a^2 + 4ab$.

$V = a^2b$

$32 = a^2b$

$\boxed{b = \dfrac{32}{a^2}}$

$O = a^2 + 4ab$

$O = a^2 + 4a \cdot \dfrac{32}{a^2}$

$O = a^2 + \dfrac{128}{a}$

$\boxed{O(a) = a^2 + 128a^{-1}}$

$O'(a) = 2a - 128a^{-2}$

$2a - 128a^{-2} = 0 \quad /\cdot a^2$

$2a^3 - 128 = 0$

$2a^3 = 128$

$a^3 = 64$

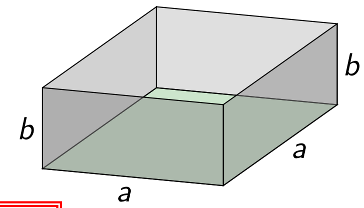
$a = \sqrt[3]{64}$

$\boxed{a = 4}$

$b = \dfrac{32}{4^2}$

$b = \dfrac{32}{16}$

$\boxed{b = 2}$



$\boxed{O_{\min} = 48}$

	0		4		$+\infty$
O'		$-$		$+$	
O		$\searrow$		$\nearrow$	

$O(4) = 4^2 + 128 \cdot 4^{-1} = 48$

✏ Uz zadani volumen bazena od $32\,\mathrm{m}^3$ i kvadratnim dnom, minimalno oplošje iznosi $48\,\mathrm{m}^2$, a postiže se ako je $a = 4\,\mathrm{m}$ i $b = 2\,\mathrm{m}$.