Analitička geometrija prostora

– primjeri riješenih zadataka –

Zadatak 1.
Napišite jednadžbu ravnine koja prolazi točkom $M(-5,3,4)$ i paralelna je s vektorima $\vec{a}=\vec{i}-7\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{b}=-\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$.

Rješenje.
Na ovom zadatku ćemo proći kroz sve oblike jednadžbi ravnine, a kasnije u složenijim zadacima koristimo onaj oblik koji nam u danom trenutku najviše odgovara. Najčešće ćemo koristiti opći oblik jednadžbe ravnine kod rješavanja zadataka. Neka je π ravnina koja prolazi točkom M i paralelna je (ili razapeta) s vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Vektorski oblik jednadžbe ravnine

$$\vec{r}=\vec{r}_0+u\vec{a}+v\vec{b}$$
$$\vec{r}_0=(-5,3,4),\quad \vec{a}=(1,-7,3),\quad \vec{b}=(-1,1,2)$$

Stoga vektorski oblik jednadžbe ravnine glasi

$$\pi\ldots\ \vec{r}=(-5,3,4)+u\cdot(1,-7,3)+v\cdot(-1,1,2).$$

Parametarski oblik jednadžbe ravnine

$$\begin{array}{rcccccccl} x &=& \boxed{-5} &+& \boxed{1} &\cdot u +& \boxed{(-1)} &\cdot v \\ y &=& \boxed{3} &+& \boxed{(-7)} &\cdot u +& \boxed{1} &\cdot v \\ z &=& \boxed{4} &+& \boxed{3} &\cdot u +& \boxed{2} &\cdot v \\ && \downarrow && \downarrow && \downarrow & \\ && M && \vec{a} && \vec{b} & \end{array}$$

Dakle, kada sve sredimo, dobivamo parametarske jednadžbe ravnine

$$\pi\ldots\left\{\begin{array}{rcl} x &=& -5+u-v \\ y &=& 3-7u+v, \\ z &=& 4+3u+2v \end{array}\right.\qquad u,v\in\mathbb{R}.$$

Opći oblik jednadžbe ravnine

- *Prvi način*: pomoću formule preko determinante

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}=0$$

Uvrštavanjem poznatih podataka dobivamo

$$\begin{vmatrix} x+5 & y-3 & z-4 \\ 1 & -7 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=0.$$

Laplaceovim razvojem po prvom retku dobivamo

$$(x+5)\begin{vmatrix} -7 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - (y-3)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + (z-4)\begin{vmatrix} 1 & -7 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Postupnim sređivanjem imamo

$$-17(x+5) - 5(y-3) - 6(z-4) = 0$$

$$-17x - 85 - 5y + 15 - 6z + 24 = 0$$

$$-17x - 5y - 6z - 46 = 0 \,/ \cdot (-1)$$

$$17x + 5y + 6z + 46 = 0$$

Dakle, opći oblik jednadžbe ravnine glasi

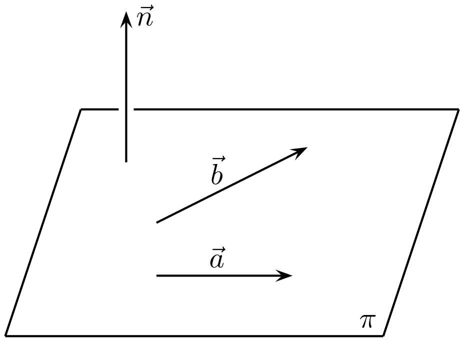
$$\pi \ldots\ 17x + 5y + 6z + 46 = 0.$$

- *Drugi način*: pomoću formule preko normale

Normala ravnine π je svaki vektor različit od nulvektora koji je okomit na ravninu π. Drugim riječima, normala ravnine π je vektor koji je okomit na svaki vektor koji leži u ravnini π. Dakle, svaka ravnina ima beskonačno mnogo normala. Taj način određivanja jednadžbe ravnine ćemo najčešće koristiti u zadacima. Jasno, smijete koristite i ostale načine ukoliko vam se oni više sviđaju. Jednadžbu ravnine π preko normale određujemo pomoću formule

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0, \tag{$\heartsuit$}$$

gdje je $\vec{n} = (A, B, C)$ bilo koja normala ravnine π, a $T_0(x_0, y_0, z_0)$ bilo koja točka u ravnini π. Mi znamo da naša ravnina mora prolaziti točkom $M(-5, 3, 4)$ pa je $x_0 = -5$, $y_0 = 3$ i $z_0 = 4$. Preostaje nam da još odredimo normalu $\vec{n}$ ravnine π. Kako je normala ravnine okomita na svaki vektor koji leži u toj ravnini, slijedi da je $\vec{n} \perp \vec{a}$ i $\vec{n} \perp \vec{b}$ (jer je ravnina π razapeta s vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$).



Iz definicije vektorskog produkta vektora slijedi da je $\vec{n} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$, gdje je $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ proizvoljan. Kako nama treba samo smjer normale, a nije nam važna duljina (jer normala ravnine je bilo koji vektor okomit na tu ravninu), možemo uzeti $\lambda = 1$, tj. $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$. Tako ćemo uvijek raditi bez posebne napomene. Jasno, smijete uzeti bilo koji drugi $\lambda \neq 0$ ako vam takav izbor daje "jednostavnije" brojeve.

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -7 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-17, -5, -6).$$

Uvrstimo li $A = -17$, $B = -5$, $C = -6$, $x_0 = -5$, $y_0 = 3$ i $z_0 = 4$ u ($\heartsuit$), dobivamo

$$-17(x - (-5)) - 5(y - 3) - 6(z - 4) = 0,$$

odnosno nakon sređivanja

$$\pi \ldots\ 17x + 5y + 6z + 46 = 0.$$

Segmentni oblik jednadžbe ravnine

Segmentni oblik jednadžbe ravnine glasi

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

gdje su a, b i c odsječci ravnine na koordinatnim osima. Segmentni oblik jednadžbe ravnine možemo dobiti iz općeg oblika na sljedeći način.

$$\begin{aligned}
17x + 5y + 6z + 46 &= 0\\
17x + 5y + 6z &= -46 \ /: (-46)\\
\frac{17x}{-46} + \frac{5y}{-46} + \frac{6z}{-46} &= 1\\
\frac{x}{\frac{-46}{17}} + \frac{y}{\frac{-46}{5}} + \frac{z}{\frac{-46}{6}} &= 1\\
\frac{x}{\frac{-46}{17}} + \frac{y}{\frac{-46}{5}} + \frac{z}{\frac{-23}{3}} &= 1
\end{aligned}$$

Dakle, segmentni oblik jednadžbe ravnine π glasi

$$\pi \ldots\ \frac{x}{\frac{-46}{17}} + \frac{y}{\frac{-46}{5}} + \frac{z}{\frac{-23}{3}} = 1.$$

Iz tog oblika vidimo da ravnina π siječe x-os u točki $A\big(\frac{-46}{17}, 0, 0\big)$, y-os u točki $B\big(0, \frac{-46}{5}, 0\big)$, a z-os u točki $C\big(0, 0, \frac{-23}{3}\big)$.

Normalni oblik jednadžbe ravnine

Normalni oblik jednadžbe ravnine dobijemo tako da opći oblik $Ax + By + Cz + D = 0$ pomnožimo s $\frac{1}{-\operatorname{sign}(D)\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$. Normalni oblik jednadžbe ravnine je zapravo jedan specijalni opći oblik u kojemu je normala jedinične duljine, a slobodni koeficijent je negativni broj.

$$\frac{1}{-\operatorname{sign}(D)\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{1}{-\operatorname{sign}(46)\sqrt{17^2 + 5^2 + 6^2}} = \frac{1}{-\sqrt{350}} = \frac{1}{-5\sqrt{14}}$$

$$\begin{aligned}
17x + 5y + 6z + 46 &= 0 \ \Big/ \cdot \tfrac{1}{-5\sqrt{14}}\\
\frac{-17}{5\sqrt{14}}x - \frac{1}{\sqrt{14}}y - \frac{6}{5\sqrt{14}}z - \frac{46}{5\sqrt{14}} &= 0
\end{aligned}$$

Dobivamo da normalni oblik jednadžbe ravnine π glasi

$$\pi \ldots\ \frac{-17}{5\sqrt{14}}x - \frac{1}{\sqrt{14}}y - \frac{6}{5\sqrt{14}}z - \frac{46}{5\sqrt{14}} = 0.$$

Oprez. Takav oblik mora ostati, ne smijete ga pojednostavljivati tako da jednadžbu pomnožite nekim brojem jer tada to više ne bi bio normalni oblik jednadžbe ravnine. Uočite da je $\frac{46}{5\sqrt{14}}$ zapravo udaljenost ravnine od ishodišta, a $\left(\frac{-17}{5\sqrt{14}}, \frac{-1}{\sqrt{14}}, \frac{-6}{5\sqrt{14}}\right)$ je njezina jedinična normala koja gleda na onu stranu ravnine u kojoj se ne nalazi ishodište.

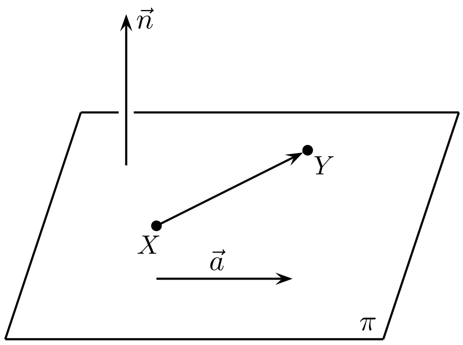
Zadatak 2.
Napišite jednadžbu ravnine koja je paralelna s vektorom $\vec{a} = \vec{i} - 7\vec{j} + 3\vec{k}$, a prolazi točkama $X(-1, 6, 2)$ i $Y(6, 3, 1)$.

Rješenje.
Odmah možemo pronaći parametarski oblik jednadžbe ravnine π jer je ta ravnina razapeta vektorima $\vec{a}$, $\overrightarrow{XY}$ i prolazi točkom X (mogli smo umjesto točke X uzeti točku Y, to je stvar našeg odabira jer obje točke leže u traženoj ravnini). Kako je

$$\vec{a} = (1, -7, 3), \quad \overrightarrow{XY} = (7, -3, -1), \quad X(-1, 6, 2),$$

dobivamo da su parametarske jednadžbe ravnine π dane s

$$\pi \ldots \begin{cases} x = -1 + u + 7v \\ y = 6 - 7u - 3v \qquad u, v \in \mathbb{R} \\ z = 2 + 3u - v \end{cases}$$



Pronađimo još i opći oblik jednadžbe ravnine preko normale jer ćemo njega ipak više koristiti kod kompliciranijih zadataka. Ako je $\vec{n} = (A, B, C)$ normala ravnine, a $T_0(x_0, y_0, z_0)$ točka kojom ravnina prolazi, tada njezina jednadžba glasi

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Iz zadatka znamo točku kojom ravnina prolazi, štoviše, znamo čak dvije takve točke X i Y. Odaberemo bilo koju od njih, npr. točku X pa je tada $x_0 = -1$, $y_0 = 6$ i $z_0 = 2$. Nedostaje nam još normala $\vec{n} = (A, B, C)$ ravnine π. Međutim, ravnina π je razapeta vektorima $\vec{a}$ i $\overrightarrow{XY}$ pa slijedi da je

$$\vec{n} = \vec{a} \times \overrightarrow{XY} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -7 & 3 \\ 7 & -3 & -1 \end{vmatrix} = (16, 22, 46).$$

Konačno dobivamo

$$\begin{aligned} A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)&=0 \\ 16(x-(-1))+22(y-6)+46(z-2)&=0 \ /:2 \\ 8(x+1)+11(y-6)+23(z-2)&=0 \\ 8x+8+11y-66+23z-46&=0 \\ 8x+11y+23z-104&=0 \end{aligned}$$

pa opći oblik jednadžbe ravnine π glasi

$$\pi \ldots \ 8x+11y+23z-104=0.$$

Napomena. Kod računanja normale ravnine π smo dobili da je $\vec{n}=(16,22,46)$. No, to možemo zapisati kao $\vec{n}=2\cdot(8,11,23)$ pa smo za normalu ravnine mogli uzeti također i vektor $(8,11,23)$ jer nam nije bitna duljina normale nego samo njezin smjer. Pazite, vektori $(16,22,46)$ i $(8,11,23)$ nisu jednaki, ali imaju isti smjer. Nama je svejedno kolika će biti duljina normale (osim ako netko od nas ne zahtijeva normalu određene duljine), bitno nam je samo da je ona okomita na promatranu ravninu, tj. bitan nam je samo njezin smjer (čak nam nije bitna niti orijentacija u općenitom slučaju). Dakle, mi smo za normalu ravnine uzeli vektor $(16,22,46)$, ali ne bismo ništa pogriješili da smo uzeli bilo koji drugi vektor oblika $\lambda\cdot(16,22,46)$ za bilo koji $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Ponekad će se to u zadacima raditi bez posebne napomene pa imajte to na umu.

Zadatak 3.
Napišite jednadžbu ravnine koja prolazi točkom $M(13,2,6)$ i okomita je na vektor $\vec{a}=-4\vec{i}+3\vec{j}-7\vec{k}$.

Rješenje.
Kako je vektor $\vec{a}$ okomit na traženu ravninu π, tada njega možemo uzeti za normalu ravnine π (sjetite se, normala ravnine je bilo koji vektor različit od nulvektora koji je okomit na ravninu). Dakle, $\vec{n}=(-4,3,-7)$ pa je $A=-4$, $B=3$ i $C=-7$. Nadalje, ravnina π prolazi točkom $M(13,2,6)$ pa je $x_0=13$, $y_0=2$ i $z_0=6$. Stoga dobivamo

$$\begin{aligned} A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)&=0 \\ -4(x-13)+3(y-2)-7(z-6)&=0 \\ -4x+3y-7z+88&=0 \end{aligned}$$

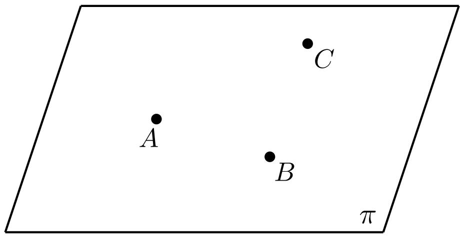
pa ravnina π ima jednadžbu

$$\pi \ldots \ -4x+3y-7z+88=0.$$

Zadatak 4.
Kako glasi jednadžba ravnine kroz točke $A(1,2,7)$, $B(-4,3,5)$ i $C(7,1,-2)$.

Rješenje.
Riješit ćemo zadatak na dva načina.

- *Prvi način*: pomoću formule za jednadžbu ravnine kroz tri točke



Jednadžba ravnine kroz tri točke $T_1(x_1, y_1, z_1)$, $T_2(x_2, y_2, z_2)$ i $T_3(x_3, y_3, z_3)$ glasi

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (\spadesuit)$$

U našem slučaju je $x_1 = 1$, $y_1 = 2$, $z_1 = 7$, $x_2 = -4$, $y_2 = 3$, $z_2 = 5$, $x_3 = 7$, $y_3 = 1$, $z_3 = -2$. Uvrstimo li ove podatke u ($\spadesuit$), dobivamo

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-7 \\ -5 & 1 & -2 \\ 6 & -1 & -9 \end{vmatrix} = 0.$$

Laplaceovim razvojem po prvom retku dobivamo

$$(x-1)\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -9 \end{vmatrix} - (y-2)\begin{vmatrix} -5 & -2 \\ 6 & -9 \end{vmatrix} + (z-7)\begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Sređivanjem dobivamo

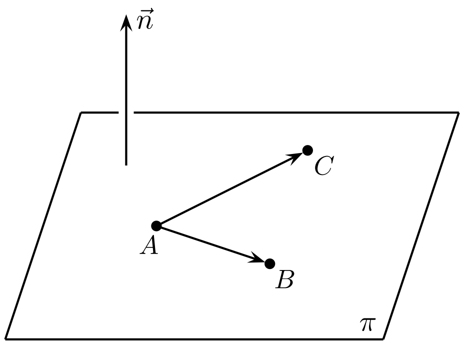
$$\begin{aligned} -11(x-1) - 57(y-2) - (z-7) &= 0 \\ -11x - 57y - z + 132 &= 0 \ /\cdot(-1) \\ 11x + 57y + z - 132 &= 0 \end{aligned}$$

pa jednadžba tražene ravnine π glasi

$$\pi \ldots \ 11x + 57y + z - 132 = 0.$$

- *Drugi način*: pomoću normale ravnine

Kako ravnina π prolazi točkama A, B i C, tada je ona razapeta s vektorima $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$. Stoga za normalu ravnine možemo uzeti vektor $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.



Kako je $\overrightarrow{AB}=(-5,1,-2)$, $\overrightarrow{AC}=(6,-1,-9)$, dobivamo

$$\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -5 & 1 & -2\\ 6 & -1 & -9\end{vmatrix}=(-11,-57,-1).$$

Uzmemo li da ravnina π prolazi točkom A (mogli smo odabrati i neku od preostale dvije točke B ili C), tada je $x_0=1$, $y_0=2$ i $z_0=7$. Konačno,

$$\begin{aligned}A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)&=0\\ -11(x-1)-57(y-2)-(z-7)&=0\\ -11x-57y-z+132&=0\ /\cdot(-1)\\ 11x+57y+z-132&=0\end{aligned}$$

pa smo opet dobili da ravnina π ima jednadžbu

$$\pi\ldots\ 11x+57y+z-132=0.$$

Zadatak 5.
Kroz polovište dužine $\overline{AB}$, $A(7,5,1)$, $B(3,2,4)$ prolazi ravnina koja na osima x i y odsijeca segmente $a=5$ i $b=2$. Napišite jednadžbu te ravnine.

Rješenje.
Ovdje je prirodno da idemo na segmentni oblik jednadžbe ravnine.

$$\pi\ldots\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

Kako je $a=5$ i $b=2$, slijedi da je

$$\pi\ldots\ \frac{x}{5}+\frac{y}{2}+\frac{z}{c}=1. \tag{$\clubsuit$}$$

Preostaje nam da odredimo još odsječak c koji tražena ravnina π odsijeca na osi z. Znamo da ravnina π mora prolaziti polovištem dužine $\overline{AB}$. Kako znamo koordinate krajeva dužine $\overline{AB}$, tada se koordinate polovišta P te dužine dobiju po formuli

$$P\Big(\frac{x_A+x_B}{2},\ \frac{y_A+y_B}{2},\ \frac{z_A+z_B}{2}\Big)$$

pa je $P\big(5,\frac{7}{2},\frac{5}{2}\big)$. Kako točka P mora ležati u ravnini π, tada njezine koordinate moraju zadovoljavati jednadžbu te ravnine. Uvrstimo li koordinate točke P u ($\clubsuit$), dobivamo

$$\begin{aligned}\frac{5}{5}+\frac{\frac{7}{2}}{2}+\frac{\frac{5}{2}}{c}&=1\\ 1+\frac{7}{4}+\frac{5}{2c}&=1\\ c&=-\frac{10}{7}\end{aligned}$$

pa jednadžba ravnine π glasi

$$\pi\ldots\ \frac{x}{5}+\frac{y}{2}+\frac{z}{-\frac{10}{7}}=1.$$

Zadatak 6.
Napišite jednadžbu ravnine koja prolazi točkom $M(3,5,1)$, a na koordinatnim osima odsijeca jednake i pozitivne odsječke.

Rješenje.
Ovdje je također prirodno da idemo na segmentni oblik jednadžbe ravnine.

$$\pi \ldots \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

No, kako su svi odsječci jednaki i pozitivni, slijedi da je $a=b=c>0$ pa je

$$\pi \ldots \frac{x}{a}+\frac{y}{a}+\frac{z}{a}=1.$$

Kako točka M mora ležati u ravnini π, tada njezine koordinate moraju zadovoljavati jednadžbu te ravnine pa slijedi

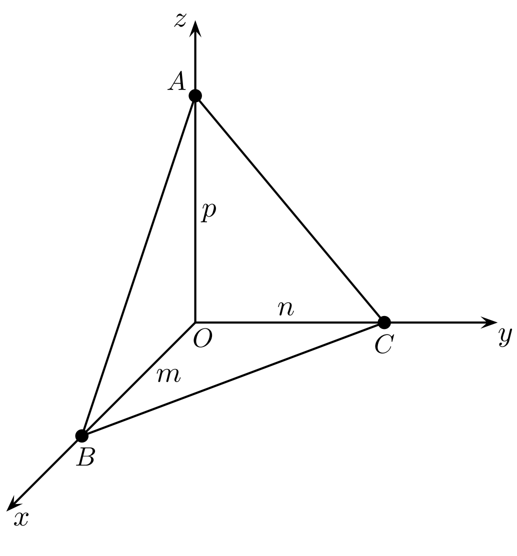
$$\frac{3}{a}+\frac{5}{a}+\frac{1}{a}=1 \Rightarrow \frac{9}{a}=1 \Rightarrow a=9.$$

Jednadžba tražene ravnine π je

$$\pi \ldots \frac{x}{9}+\frac{y}{9}+\frac{z}{9}=1.$$

Zadatak 7.
Tri strane tetraedra, koji leži u prvom oktantu, leže u koordinatnim ravninama. Napišite jednadžbu četvrte strane tetraedra ako su duljine bridova tetraedra koji omeđuju četvrtu stranu $|AB|=\sqrt{13}$, $|BC|=\sqrt{34}$, $|CA|=\sqrt{29}$.

Rješenje.
U prvom oktantu su one točke prostora kojima su sve tri koordinate pozitivne.



Mi tražimo jednadžbu ravnine π koja prolazi točkama A, B i C. Sa slike vidimo da je opet prirodno ići na segmentni oblik jednadžbe ravnine jer uz oznake sa slike, jednadžba ravnine π glasi

$$\frac{x}{m}+\frac{y}{n}+\frac{z}{p}=1,$$

pri čemu su $m,n,p>0$ jer se čitav tetraedar $ABCO$ nalazi u prvom oktantu.

Trokuti AOB, BOC i COA su pravokutni trokuti s pravim kutom u vrhu O. Primijenimo li redom na svakog od njih Pitagorin poučak, dobivamo

$$\begin{aligned} m^2 + p^2 &= |AB|^2 \\ m^2 + n^2 &= |BC|^2 \\ n^2 + p^2 &= |AC|^2 \end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned} m^2 + p^2 &= 13 \\ m^2 + n^2 &= 34 \\ n^2 + p^2 &= 29 \end{aligned}$$

Ako od druge jednadžbe oduzmemo prvu i tako dobivenu jednadžbu promatramo sa trećom jednadžbom, dobivamo sustav

$$\begin{aligned} n^2 - p^2 &= 21 \\ n^2 + p^2 &= 29 \end{aligned}$$

iz kojeg se lagano dobije da je $n^2 = 25$ i $p^2 = 4$. Tada iz $m^2 + p^2 = 13$ slijedi da je $m^2 = 9$. Stoga je $m = \pm 3$, $n = \pm 5$ i $p = \pm 2$. No, po pretpostavci zadatka su $m, n, p > 0$ pa mora biti $m = 3$, $n = 5$ i $p = 2$. Stoga jednadžba ravnine π glasi

$$\pi \ldots \ \frac{x}{3} + \frac{y}{5} + \frac{z}{2} = 1.$$

Zadatak 8.
Izračunajte kut između ravnina $2x + 3y - 4z + 5 = 0$ i $x - 2y + 2z - 1 = 0$.

Rješenje.

$$\begin{aligned} \pi_1 \ldots \ 2x + 3y - 4z + 5 &= 0 \\ \pi_2 \ldots \ x - 2y + 2z - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Neka je $\alpha = \sphericalangle(\pi_1, \pi_2)$. Iz jednadžbi ravnina očitamo njihove normale $\vec{n}_1 = (2, 3, -4)$ i $\vec{n}_2 = (1, -2, 2)$. Tada je prema formuli

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}.$$

Nadalje,

$$\begin{aligned} \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 &= 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) + (-4) \cdot 2 = 2 - 6 - 8 = -12 \\ |\vec{n}_1| &= \sqrt{2^2 + 3^2 + (-4)^2} = \sqrt{29} \\ |\vec{n}_2| &= \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3 \end{aligned}$$

Konačno dobivamo

$$\cos \alpha = \frac{|-12|}{3\sqrt{29}} = \frac{12}{3\sqrt{29}} = \frac{4}{\sqrt{29}}$$

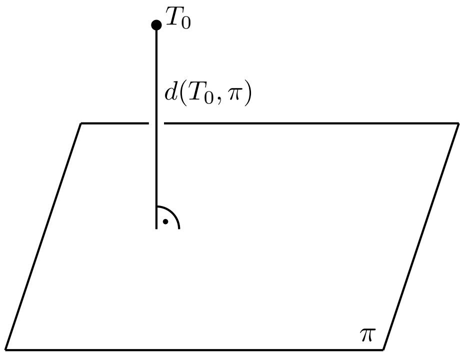
pa je $\alpha = \arccos \frac{4}{\sqrt{29}}$.

Oprez. Kut između dviju ravnina je po definiciji uvijek $\leqslant \frac{\pi}{2}$ pa se zbog toga u brojniku mora uzeti apsolutna vrijednost skalarnog produkta. Ako računamo kut između vektora, tada nema apsolutne vrijednosti u brojniku jer kut između vektora može biti i tupi, a to će biti ako je njihov skalarni produkt manji od nule. Uočite da je kut između normali $\vec{n}_1$ i $\vec{n}_2$ u ovom slučaju tupi kut. Dakle, u ovom slučaju je kut između ravnina jednak $\arccos \frac{4}{\sqrt{29}}$, ali je kut između njihovih normali jednak $\arccos \frac{-4}{\sqrt{29}}$. Stoga, zbog naše definicije kuta između dvije ravnine, nije ispravno reći da je kut između ravnina jednak kutu između njihovih normali. To je djelomično točan odgovor. Preciznu definiciju ste rekli na predavanjima i također se nalazi u prezentaciji pa obratite pažnju na nju.

Zadatak 9.
Odredite udaljenost točke $A(3, 2, -1)$ od ravnine $2x - 3y + 6z - 3 = 0$.

Rješenje.
Udaljenost točke $T_0(x_0, y_0, z_0)$ od ravnine $\pi \ldots Ax + By + Cz + D = 0$ se računa po formuli

$$d(T_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$



U ovom slučaju je $x_0 = 3$, $y_0 = 2$ i $z_0 = -1$ pa dobivamo

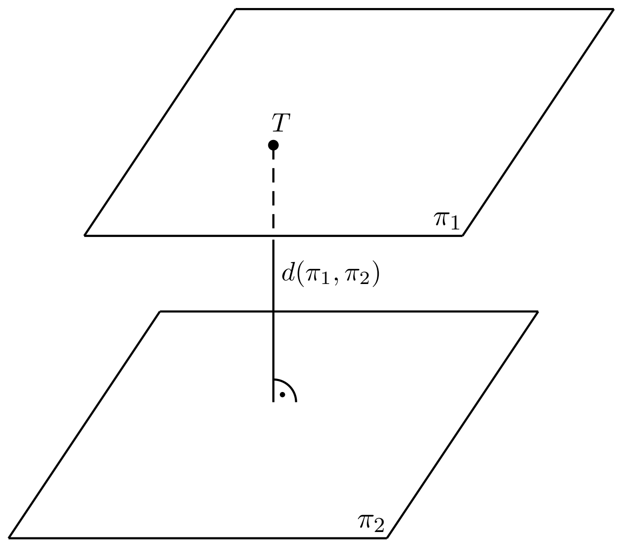
$$d(A, \pi) = \frac{|2 \cdot 3 - 3 \cdot 2 + 6 \cdot (-1) - 3|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 6^2}} = \frac{|-9|}{\sqrt{49}} = \frac{9}{7}.$$

Zadatak 10.
Kolika je udaljenost ravnina $2x + y - 2z + 33 = 0$ i $2x + y - 2z + 22 = 0$.

Rješenje.
Označimo promatrane ravnine s π_1 i π_2.

$$\pi_1 \ldots 2x + y - 2z + 33 = 0, \quad \vec{n}_1 = (2, 1, -2)$$
$$\pi_2 \ldots 2x + y - 2z + 22 = 0, \quad \vec{n}_2 = (2, 1, -2)$$

Uočavamo da su njihove normale kolinearni vektori, tj. u ovom slučaju jednaki vektori iz čega slijedi da su ravnine π_1 i π_2 paralelne. Da bismo odredili udaljenost tih ravnina, uzet ćemo jednu točku T u ravnini π_1 i zatim računati udaljenost te točke od ravnine π_2.



Kako odabrati neku točku T iz ravnine π_1? Pogledamo li jednadžbu ravnine π_1, vidimo da se radi o jednoj linearnoj jednadži s tri nepoznanice. Mi moramo odabrati neku točku čije koordinate zadovoljavaju jednadžu te ravnine (to je nužan i dovoljan uvjet da bi neka točka ležala u nekoj ravnini). No, imamo dva stupnja slobode, tj. dvije nepoznanice odaberemo po volji, a treću onda izračunamo iz jednadžbe ravnine π_1. Uzmimo, npr. $x = 0$ i $y = 0$, uvrstimo ih u jednadžbu ravnine π_1 pa dobivamo

$$\begin{aligned} 2x + y - 2z + 33 &= 0 \\ 2 \cdot 0 + 0 - 2z + 33 &= 0 \\ z &= \tfrac{33}{2} \end{aligned}$$

Stoga je $T\big(0, 0, \frac{33}{2}\big)$ jedna točka iz ravnine π_1. Konačno dobivamo

$$d(\pi_1, \pi_2) = d(T, \pi_2) = \frac{\left|2 \cdot 0 + 0 - 2 \cdot \frac{33}{2} + 22\right|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{|-11|}{\sqrt{9}} = \frac{11}{3}.$$

Oprez. Da bi ravnine bile paralelne, ne moraju nužno njihove normale biti jednake, dovoljno je da su kolinearne jer nas općenito zanima samo smjer, a ne i duljina tih normali. Dakle, dvije ravnine π_1 i π_2 su paralelne ako i samo ako su njihove normale kolinearni vektori, tj. $\vec{n}_1 = \lambda \vec{n}_2$ za neki $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. U ovom zadatku je bilo $\lambda = 1$, tj. normale su bile jednake.

Zadatak 11.
Odredite B tako da ravnine $4x + By - 7z + 3 = 0$ i $x - 2y + 4z - 1 = 0$ budu okomite.

Rješenje.
Neka su π_1 i π_2 zadane ravnine.

$$\begin{aligned} \pi_1 \ldots\ 4x + By - 7z + 3 = 0, &\quad \vec{n}_1 = (4, B, -7) \\ \pi_2 \ldots\ x - 2y + 4z - 1 = 0, &\quad \vec{n}_2 = (1, -2, 4) \end{aligned}$$

Ravnine π_1 i π_2 su okomite ako i samo ako su okomite njihove normale, tj. ako je $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$. Sjetimo se, dva vektora su okomita ako i samo ako je njihov skalarni produkt jednak 0 pa dobivamo

$$\begin{aligned} \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 &= 0 \\ (4, B, -7) \cdot (1, -2, 4) &= 0 \\ 4 - 2B - 28 &= 0 \\ B &= -12 \end{aligned}$$

Dakle, jedino za $B = -12$ su ravnine π_1 i π_2 međusobno okomite.

Zadatak 12.
Odredite A i C tako da ravnine $Ax - 2y + 3z - 1 = 0$ i $4x + y + Cz + 8 = 0$ budu paralelne.

Rješenje.
Neka su π_1 i π_2 zadane ravnine.

$$\begin{aligned} \pi_1 \ldots \ Ax - 2y + 3z - 1 = 0, \quad \vec{n}_1 = (A, -2, 3) \\ \pi_2 \ldots \ 4x + y + Cz + 8 = 0, \quad \vec{n}_2 = (4, 1, C) \end{aligned}$$

Ravnine π_1 i π_2 su paralelne ako i samo ako su njihove normale kolinearne, tj. ako je $\vec{n}_1 = \lambda \vec{n}_2$ za neki $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dobivamo

$$\begin{aligned} \vec{n}_1 &= \lambda \vec{n}_2 \\ (A, -2, 3) &= \lambda(4, 1, C) \\ (A, -2, 3) &= (4\lambda, \lambda, C\lambda) \end{aligned}$$

iz čega slijedi

$$A = 4\lambda, \quad -2 = \lambda, \quad 3 = C\lambda.$$

Iz prethodnih jednakosti lagano se dobije $A = -8$ i $C = -\frac{3}{2}$.

Zadatak 13.
Napišite jednadžbu pravca koji prolazi točkom $T(1, 0, 1)$ s vektorom smjera $\vec{a} = (3, 2, 1)$.

Rješenje.
U kompliciranijim zadacima ćemo najviše koristiti kanonski i parametarski oblik jednadžbe pravca.
Vektorski oblik jednadžbe pravca

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda \vec{a}$$

U ovom zadatku je $\vec{r}_0 = (1, 0, 1)$ (radijvektor neke točke koja se nalazi na pravcu), a $\vec{a} = (3, 2, 1)$ je vektor smjera pravca. Uvrštavanjem dobivamo

$$p \ldots \ \vec{r} = (1, 0, 1) + \lambda(3, 2, 1).$$

Parametarski oblik jednadžbe pravca

$$\begin{array}{rcc}
x = & \boxed{1} + & \boxed{3} \cdot t \\
y = & \boxed{0} + & \boxed{2} \cdot t \\
z = & \boxed{1} + & \boxed{1} \cdot t \\
 & \downarrow & \downarrow \\
 & T & \vec{a}
\end{array}$$

Dakle, kada sve sredimo, dobivamo parametarske jednadžbe pravca

$$p \ldots \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2t, \qquad\qquad t \in \mathbb{R}. \\ z = 1 + t \end{cases}$$

Kanonski oblik jednadžbe pravca

$$\frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y} = \frac{z - z_0}{a_z}$$

U ovom slučaju je $x_0 = 1$, $y_0 = 0$, $z_0 = 1$, $a_x = 3$, $a_y = 2$ i $a_z = 1$ pa dobivamo

$$p \ldots \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{1}.$$

Dakle, u nazivnike se pišu koordinate vektora smjera pravca, a u brojnike na odgovarajuća mjesta koordinate neke istaknute točke na pravcu.

Zadatak 14.

Napišite kanonski oblik i parametarske jednadžbe pravca koji prolazi točkom $A(5, 4, -1)$ i koji je paralelan s

a) vektorom $\vec{a} = (1, 2, 7)$,

b) osi x.

Rješenje.

Ako je pravac paralelan s nekim vektorom, to znači da taj vektor možemo uzeti za vektor smjera tog pravca.

a) Kanonski oblik jednadžbe pravca p glasi

$$p \ldots \frac{x-5}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z+1}{7},$$

a parametarske jednadžbe su

$$p \ldots \begin{cases} x = 5 + t \\ y = 4 + 2t, \qquad\qquad t \in \mathbb{R}. \\ z = -1 + 7t \end{cases}$$

b) Ako je pravac paralelan s x-osi, tada za njegov vektor smjera možemo uzeti vektor $\vec{i} = (1, 0, 0)$. Stoga kanonski oblik jednadžbe pravca p glasi

$$p \ldots \frac{x-5}{1} = \frac{y-4}{0} = \frac{z+1}{0},$$

a parametarske jednadže su

$$p \ldots \begin{cases} x = 5 + t \\ y = 4, \\ z = -1 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Napomena. Ako u kanonskom obliku jednadžbe pravca u nazivniku na nekom mjestu stoji 0, to ne znači da se radi o dijeljenju s nulom, nego to znači da je odgovarajuća koordinata vektora smjera tog pravca jednaka nula jer u nazivnike pišemo koordinate vektora smjera pravca, a moguće je da su neke koordinate vektora jednake 0. Jedino se ne može dogoditi da budu na sva tri mjesta u nazivnicima nule jer bi to onda značilo da odgovarajući pravac ima za vektor smjera nulvektor, što je nemoguće jer nulvektorom nije određen smjer.

Zadatak 15.
Napišite jednadžbu pravca koji prolazi težištem trokuta s vrhovima $A(2,-1,7)$, $B(4,5,1)$, $C(-3,2,4)$ i točkom $D(7,2,3)$.

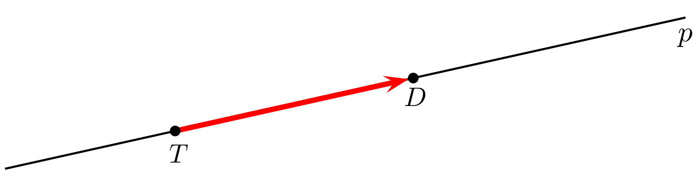
Rješenje.
Radijvektor $\vec{r}_T$ težišta trokuta ABC jednak je trećini sume radijvektora vrhova tog trokuta, tj.

$$\vec{r}_T = \frac{1}{3}\big(\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C\big).$$

Stoga je

$$\begin{aligned} x_T &= \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{2 + 4 + (-3)}{3} = 1 \\ y_T &= \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{-1 + 5 + 2}{3} = 2 \\ z_T &= \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = \frac{7 + 1 + 4}{3} = 4 \end{aligned}$$

pa težište T trokuta ABC ima koordinate $T(1,2,4)$. Sada znamo da pravac prolazi kroz točke $T(1,2,4)$ i $D(7,2,3)$. Tim podacima je pravac jednoznačno određen jer možemo uzeti da on prolazi točkom D i ima vektor smjera $\overrightarrow{TD}$.



Lagano se dobije $\overrightarrow{TD} = (6,0,-1)$ pa dobivamo da traženi pravac p ima jednadžbu

$$p \ldots \frac{x-7}{6} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-3}{-1}.$$

Zadatak 16.
Pravac p je zadan kao presjek ravnina $2x + 3y - 16z - 7 = 0$ i $3x + y - 17z = 0$. Odredite kanonski oblik jednadžbe pravca p.

Rješenje.
Da bismo odredili kanonski ili parametarski oblik jednadžbe pravca, treba nam jedna točka kojom pravac prolazi i njegov vektor smjera. Ako je pravac zadan kao presjek dviju ravnina, tada ti podaci nisu odmah vidljivi iz jednadžbi ravnina, ali ih možemo odrediti na dva načina. Pokazat ćemo ovdje oba načina.

- *Prvi način*: Pomoću Gaussovog postupka

Na zadane ravnine

$$
\begin{aligned}
2x + 3y - 16z - 7 &= 0 \\
3x + y - 17z &= 0
\end{aligned}
$$

možemo gledati kao na sustav od dvije linearne jednadžbe s tri nepoznanice. Prema Kronecker-Capellijevom teoremu znamo da opće rješenje zadanog sustava ima jedan parametar, a geometrijski će to rješenje predstavljati parametarske jednadžbe pravca iz kojih onda lagano očitamo vektor smjera pravca i jednu njegovu točku. Dakle, zadani sustav rješavamo Gaussovim postupkom.

$$
\begin{array}{ccc|cll}
x & y & z & & & \\
\hline
2 & 3 & -16 & 7 & & + \\
3 & \boxed{1} & -17 & 0 & / \cdot (-3) & \\
\hline
-7 & 0 & 35 & 7 & / \cdot \frac{1}{7} & \\
3 & 1 & -17 & 0 & & \\
\hline
\boxed{-1} & 0 & 5 & 1 & / \cdot 3 & \\
3 & 1 & -17 & 0 & & + \\
\hline
-1 & 0 & 5 & 1 & & \\
0 & 1 & -2 & 3 & &
\end{array}
$$

Iz navedenog slijedi

$$
\begin{aligned}
-x + 5z &= 1 \\
y - 2z &= 3.
\end{aligned}
$$

Uzemo li varijablu z za parametar, dobivamo opće rješenje zadanog sustava

$$x = -1 + 5t, \quad y = 3 + 2t, \quad z = t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ovo opće rješenje sustava zapravo predstavlja parametarske jednadžbe pravca p koji je zadan kao presjek ravnina.

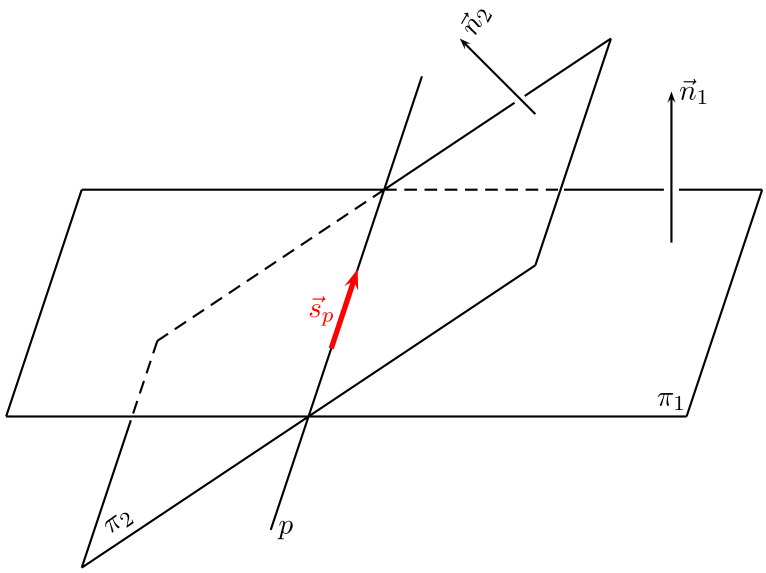
$$p \ldots \begin{cases} x = -1 + 5t \\ y = 3 + 2t, \\ z = t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Kanonski oblik jednadžbe pravca p glasi

$$p \ldots \frac{x+1}{5} = \frac{y-3}{2} = \frac{z}{1}.$$

Sada vidimo da pravac p prolazi točkom $T_0(-1, 3, 0)$ i ima vektor smjera $\vec{s} = (5, 2, 1)$.

- *Drugi način*: Pomoću vektorskog produkta



Ovdje treba uočiti da ako pravac leži u ravnini, tada je njegov vektor smjera okomit na normalu te ravnine. Pravac p leži u obje ravnine π_1 i π_2 pa je vektor smjera $\vec{s}_p$ pravca p okomit na normale $\vec{n}_1$ i $\vec{n}_2$ ravnina π_1 i π_2. Iz definicije vektorskog produkta vektora tada slijedi da je $\vec{s}_p = \lambda(\vec{n}_1 \times \vec{n}_2)$ za neko $\lambda \in \mathbb{R}$. Kako nama treba samo smjer vektora $\vec{s}_p$ (nije nam bitna duljina tog vektora), možemo uzeti da je $\lambda = 1$, tj. $\vec{s}_p = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ (istu priču smo ranije objašnjavali za biranje normale ravnine). Iz jednadžbi zadanih ravnina očitamo njihove normale

$$\begin{aligned} \pi_1 \ldots 2x + 3y - 16z - 7 = 0, &\qquad \vec{n}_1 = (2, 3, -16) \\ \pi_2 \ldots 3x + y - 17z = 0, &\qquad \vec{n}_2 = (3, 1, -17) \end{aligned}$$

pa dobivamo

$$\vec{s}_p = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -16 \\ 3 & 1 & -17 \end{vmatrix} = (-35, -14, -7) = -7 \cdot (5, 2, 1).$$

Možemo zapravo uzeti da je $\vec{s}_p = (5, 2, 1)$ jer nam ovdje nije bitna duljina i orijentacija vektora, već samo smjer (usput dobivamo i manje brojeve). Da bismo mogli napisati kanonski oblik jednadžbe pravca p, treba nam još neka točka koja leži na zadanom pravcu. Kako je pravac p zadan kao presjek ravnina π_1 i π_2, trebamo uzeti jednu točku T koja leži u obje ravnine π_1 i π_2. Kako doći do jedne takve točke T? Naime, da bi točka T ležala u obje ravnine π_1 i π_2, njezine koordinate moraju zadovoljavati jednadžbe tih ravnina, što nas dovodi do sustava linearnih jednadžbi

$$\begin{aligned} 2x + 3y - 16z - 7 &= 0 \\ 3x + y - 17z &= 0. \end{aligned}$$

Ovaj sustav ima beskonačno mnogo rješenja, a nama treba samo jedno neko njegovo rješenje. Ovdje imamo jedan stupanj slobode pa jednu nepoznanicu možemo odabrati po volji, a druge dvije tada moramo izračunati iz pripadnog 2×2 sustava. Uzmimo, npr. $x = 0$. Tada dobivamo da mora biti

$$\begin{aligned} 3y - 16z &= 7 \\ y - 17z &= 0. \end{aligned}$$

iz čega se lagano dobije $y = \frac{17}{5}$ i $z = \frac{1}{5}$. Stoga je $T\big(0, \frac{17}{5}, \frac{1}{5}\big)$ neka točka na pravcu p (jasno, tih točaka ima beskonačno mnogo, a koju od njih ćemo dobiti ovisi o našem izboru vrijednosti jedne od nepoznanica; ovdje smo uzeli $x = 0$). Sada imamo vektor smjera $\vec{s}_p = (5, 2, 1)$ pravca p i točku $T\big(0, \frac{17}{5}, \frac{1}{5}\big)$ kojom on prolazi pa njegov kanonski oblik jednadžbe glasi

$$p \ldots \frac{x}{5} = \frac{y - \frac{17}{5}}{2} = \frac{z - \frac{1}{5}}{1},$$

dok su parametarske jednadžbe

$$p \ldots \begin{cases} x = 5t \\ y = \frac{17}{5} + 2t, \\ z = \frac{1}{5} + t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Napomena. Svaki pravac ima beskonačno mnogo kanonskih oblika jednadžbi i beskonačno mnogo oblika parametarskih jednadžbi. Koji od tih oblika ćemo dobiti ovisi o tome koju točku tog pravca ćemo gledati kao istaknutu točku i koji vektor paralelan s tim pravcem ćemo uzeti za vektor smjera tog pravca. Tako smo u ovom zadatku, u prvom načinu rješavanja kao istaknutu točku pravca uzeli točku $T_0(-1, 3, 0)$, a u drugom načinu smo uzeli točku $T\big(0, \frac{17}{5}, \frac{1}{5}\big)$. Na taj način smo dobili malo "drukčije" jednadžbe pravca, međutim poanta je da, iako su te jednadžbe "drukčije", one predstavljaju isti pravac u prostoru. Da smo kod drugog načina rješavanja, umjesto $x = 0$, odabrali $z = 0$, tada bismo dobili istu istaknutu točku $T_0(-1, 3, 0)$ pravca p koju smo dobili i kod prvog načina rješavanja, a onda bismo dobili i "iste" jednadžbe pravca p. Jedino po čemu su dobivene jednadžbe "drukčije" jest da istu točku pravca p iz parametarskih jednadžbi dobivamo za različite izbore parametra t. Na primjer, točku $T_0(-1, 3, 0)$ dobivamo iz parametarskih jednadžbi dobivenih u prvom načinu rješavanja za parametar $t = 0$, dok ju iz parametarskih jednadžbi dobivenih u drugom načinu rješavanja dobivamo za parametar $t = -\frac{1}{5}$.

Zadatak 17.

Odredite kut α između pravaca koji su zadani jednadžbama

$$p_1 \ldots \begin{cases} 4x + y + 3z - 21 = 0 \\ 2x + 2y - 3z + 15 = 0 \end{cases} \quad \text{i} \quad p_2 \ldots \begin{cases} 2x - 2y - z + 8 = 0 \\ x + 2y - 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

Rješenje.

Kut između dva pravca p_1 i p_2 s vektorima smjerova $\vec{s}_1$ i $\vec{s}_2$ se računa po formuli

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2|}{|\vec{s}_1| \cdot |\vec{s}_2|}.$$

Kako su oba pravca zadani kao presjeci ravnina, ne možemo odmah očitati njihove vektore smjerova. No, prema prethodnom zadatku znamo da ako je pravac zadan kao presjek dvije ravnine, njegov vektora smjera jednak je vektorskom produktu normali tih ravnina. Stoga za pravac p_1

$$p_1 \ldots \begin{cases} 4x + y + 3z - 21 = 0 \\ 2x + 2y - 3z + 15 = 0 \end{cases}$$

dobivamo

$$\vec{s}_1 = (4,1,3) \times (2,2,-3) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = (-9,18,6) = 3 \cdot (-3,6,2)$$

pa zapravo za vektor smjera pravca p_1 možemo uzeti vektor $\vec{s}_1 = (-3,6,2)$. Isto tako, za pravac p_2

$$p_2 \ldots \begin{cases} 2x - 2y - z + 8 = 0 \\ x + 2y - 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

dobivamo

$$\vec{s}_2 = (2,-2,-1) \times (1,2,-2) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = (6,3,6) = 3 \cdot (2,1,2)$$

pa zapravo za vektor smjera pravca p_2 možemo uzeti vektor $\vec{s}_2 = (2,1,2)$. Konačno,

$$\cos\alpha = \frac{\big|(-3,6,2) \cdot (2,1,2)\big|}{\sqrt{(-3)^2 + 6^2 + 2^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{|-3 \cdot 2 + 6 \cdot 1 + 2 \cdot 2|}{7 \cdot 3} = \frac{|4|}{21} = \frac{4}{21}$$

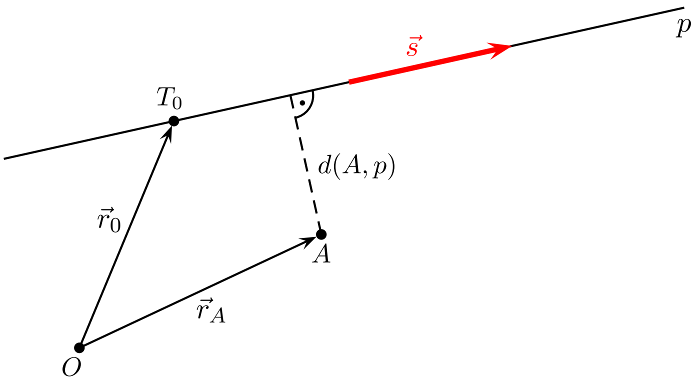
iz čega slijedi $\alpha = \arccos\frac{4}{21}$.

Oprez. Kut između dva pravca je po definiciji uvijek $\leqslant \frac{\pi}{2}$ pa se zbog toga u brojniku mora uzeti apsolutna vrijednost skalarnog produkta. Ako računamo kut između vektora, tada nema apsolutne vrijednosti u brojniku jer kut između vektora može biti i tupi, a to će biti ako je njihov skalarni produkt manji od nule. U ovom zadatku je kut između vektora smjerova $\vec{s}_1$ i $\vec{s}_2$ šiljasti kut jer je njihov skalarni produkt pozitivan. Dakle, u ovom slučaju je kut između pravaca jednak kutu između njihovih vektora smjerova. Međutim, zbog naše definicije kuta između dva pravca, nije ispravno reći da je kut između pravaca jednak kutu između njihovih vektora smjerova. To je djelomično točan odgovor koji nije istinit ako vektori smjerova zatvaraju tupi kut. Preciznu definiciju ste rekli na predavanjima i također se nalazi u prezentaciji pa obratite pažnju na nju.

Zadatak 18.
Izračunajte udaljenost točke $A(6,1,-5)$ od pravca $p \ldots \frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{1} = \frac{z-2}{-1}$.

Rješenje.
Udaljenost točke A od pravca p koji prolazi točkom T_0 i ima vektor smjera $\vec{s}$ se računa po formuli

$$d(A,p) = \frac{\left|(\vec{r}_A - \vec{r}_0) \times \vec{s}\,\right|}{|\vec{s}\,|}.$$



Iz jednadžbe pravca p očitamo radijvektor $\vec{r}_0 = (2,-4,2)$ točke T_0 i vektor smjera $\vec{s} = (3,1,-1)$. Radijvektor točke A je jednak $\vec{r}_A = (6,1,-5)$. Nadalje,

$$\vec{r}_A - \vec{r}_0 = (6,1,-5) - (2,-4,2) = (4,5,-7)$$

pa je

$$\big(\vec{r}_A - \vec{r}_0\big) \times \vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 5 & -7 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (2,-17,-11).$$

Konačno dobivamo

$$d(A,p) = \frac{\left|(\vec{r}_A - \vec{r}_0) \times \vec{s}\,\right|}{|\vec{s}\,|} = \frac{\big|(2,-17,-11)\big|}{\big|(3,1,-1)\big|} = \frac{\sqrt{2^2 + (-17)^2 + (-11)^2}}{\sqrt{3^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{3\sqrt{46}}{\sqrt{11}} = 3\sqrt{\frac{46}{11}}.$$

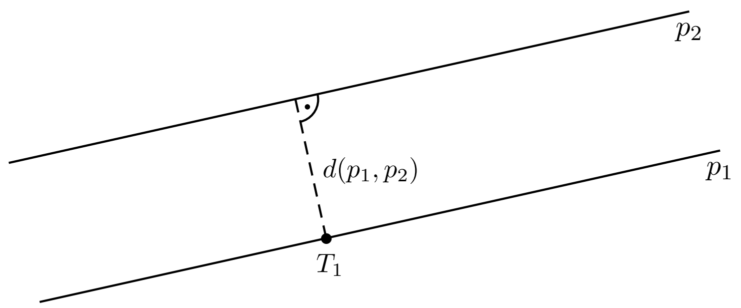
Zadatak 19.
Nađite udaljenost paralelnih pravaca

$$p_1 \ldots \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-1} \quad \text{i} \quad p_2 \ldots \frac{x}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+4}{-1}.$$

Rješenje.
Iz jednadžbi pravaca p_1 i p_2 vidimo da su njihovi vektori smjerova $\vec{s}_1 = (2,2,-1)$ i $\vec{s}_2 = (2,2,-1)$. Kako je $\vec{s}_1 = \vec{s}_2$, slijedi da su pravci p_1 i p_2 zaista paralelni.

Oprez. Općenito, da bi pravci p_1 i p_2 bili paralelni, nije nužno da imaju jednake vektore smjerova, već da su njihovi vektori smjerova kolinearni, tj. da je $\vec{s}_1 = \lambda \vec{s}_2$ za neki $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. U ovom primjeru je $\lambda = 1$ pa su vektori smjerova jednaki.

Da bismo pronašli udaljenost paralelnih pravaca p_1 i p_2, uzet ćemo jednu točku T_1 na pravcu p_1 i zatim računati udaljenost te točke od pravca p_2. Ta udaljenost je ujedno i udaljenost paralelnih pravaca p_1 i p_2.



Iz jednadžbe pravca p_1 vidimo da točka $T_1(1, -1, 3)$ leži na njemu pa možemo nju uzeti (jasno, možemo uzeti bilo koju drugu točku na pravcu p_1, ali do ove odabrane točke je nekako najlakše doći jer je ona već napisana u jednadžbi pravca p_1 pa nema potrebe komplicirati s drugim točkama jer nam ne trebaju). Sada računamo udaljenost točke T_1 od pravca p_2 prema formuli

$$d(T_1, p_2) = \frac{\left|(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{s}_2\right|}{|\vec{s}_2|}$$

za udaljenost točke od pravca. Pritom je $\vec{r}_1 = (1, -1, 3)$ radijvektor točke T_1 čiju udaljenost od pravca p_2 računamo, $\vec{r}_2 = (0, 1, -4)$ je radijvektor neke točke na pravcu p_2 (najlakše je uzeti onu točku koja se nalazi u jednadžbi pravca p_2), a $\vec{s}_2 = (2, 2, -1)$ je vektor smjera pravca p_2. Kako je

$$\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = (1, -1, 3) - (0, 1, -4) = (1, -2, 7),$$

slijedi

$$\big(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\big) \times \vec{s}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 7 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-12, 15, 6).$$

Konačno dobivamo

$$d(p_1, p_2) = d(T_1, p_2) = \frac{\big|(-12, 15, 6)\big|}{\big|(2, 2, -1)\big|} = \frac{\sqrt{(-12)^2 + 15^2 + 6^2}}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{9\sqrt{5}}{3} = 3\sqrt{5}.$$

Zadatak 20.
Odredite kut između pravca $p \ldots \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}$ i ravnine $\pi \ldots x + 2y - 2z - 5 = 0$.

Rješenje.
Neka je $\chi = \sphericalangle(p, \pi)$. Kut između pravca p i ravnine π se računa po formuli

$$\sin \chi = \frac{|\vec{s} \cdot \vec{n}|}{|\vec{s}| \cdot |\vec{n}|},$$

gdje je $\vec{s}$ vektor smjera pravca p, a $\vec{n}$ je normala ravnine π. Iz jednadžbe pravca i jednadžbe ravnine dobivamo da je

$$\vec{s} = (2, 1, -1), \quad \vec{n} = (1, 2, -2).$$

Iz navedenog slijedi

$$\sin\chi = \frac{\left|(2,1,-1)\cdot(1,2,-2)\right|}{\left|(2,1,-1)\right|\cdot\left|(1,2,-2)\right|} = \frac{\left|2\cdot 1 + 1\cdot 2 + (-1)\cdot(-2)\right|}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}} = \frac{|6|}{3\sqrt{6}} = \frac{6}{3\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

pa je $\chi = \arcsin\frac{2}{\sqrt{6}}$.

Napomena. Kada se računa kut između istih tipova objekata (kut između dvije ravnine, kut između dva pravca), tada se koriste funkcije kosinus i arkuskosinus, a kada se računa kut između različitih tipova objekata (kut između pravca i ravnine), tada se koriste funkcije sinus i arkussinus.

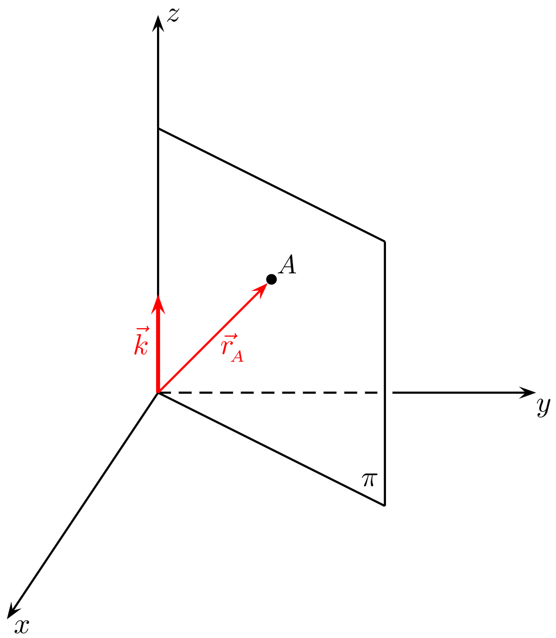
Zadatak 21.

Kako glasi jednadžba ravnine koja prolazi točkom $A(-1,6,3)$ i sadrži os z?

Rješenje.

Neka je π tražena ravnina. Kako ravnina π sadrži os z, tada specijalno vrijedi:

- Ravnina π je paralelna sa svakim vektorom na osi z pa je specijalno paralelna s vektorom $\vec{k}$.
- Ravnina π sadrži ishodište koordinatnog sustava pa je paralelna s radijvektorom $\vec{r}_A$ točke A.



Zaključujemo da je ravnina π razapeta s vektorima $\vec{k}$ i $\vec{r}_A$ pa za njezinu normalu možemo uzeti vektor $\vec{n} = \vec{r}_A \times \vec{k}$. Kako je $\vec{r}_A = (-1,6,3)$ (koordinate radijvektora neke točke se podudaraju s koordinatama te točke) i $\vec{k} = (0,0,1)$, slijedi

$$\vec{n} = \vec{r}_A \times \vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (6,1,0).$$

Dakle, ravnina π prolazi točkom $A(-1,6,3)$ i ima normalu $\vec{n} = (6,1,0)$ pa je $x_0 = -1$, $y_0 = 6$, $z_0 = 3$, $A = 6$, $B = 1$, $C = 0$ (oprez: nemojte ovdje točku A pomiješati s x-koordinatom normale $\vec{n}$ koja također ima isto ime). Stoga dobivamo

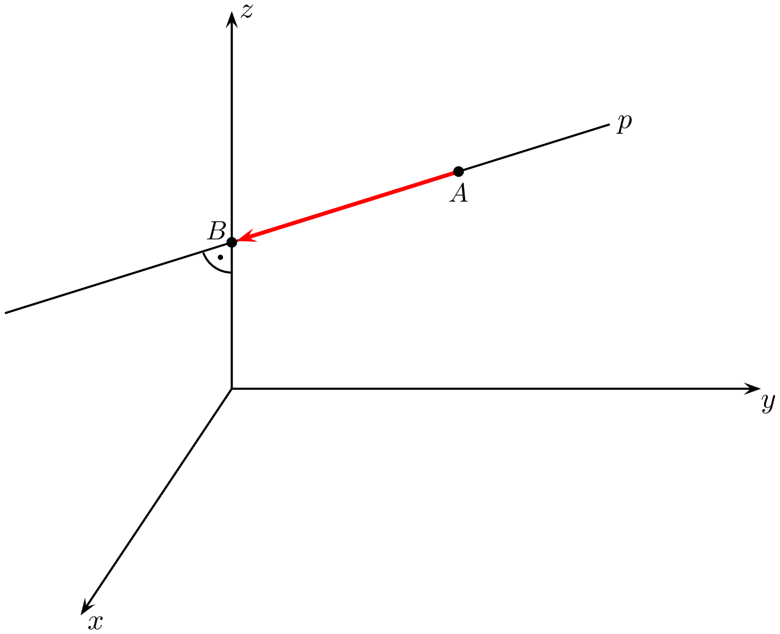
$$\begin{aligned} A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)&=0\\ 6\cdot(x+1)+1\cdot(y-6)+0\cdot(z-3)&=0\\ 6x+y&=0 \end{aligned}$$

pa ravnina π ima jednadžbu $\pi \ldots 6x+y=0$.

Napomena. Općenito, ako ravnina π prolazi točkom A, tada ona ne mora biti paralelna s radijvektorom $\vec{r}_A$ točke A. Ravnina π koja prolazi točkom A je paralelna s radijvektorom $\vec{r}_A$ točke A ako i samo ako ravnina π prolazi kroz ishodište koordinatnog sustava.

Zadatak 22.
Napišite jednadžbu pravca koji prolazi točkom $A(-1,2,3)$ i siječe os z pod pravim kutom.

Rješenje.
Neka je p traženi pravac. Kako je pravac p okomit na os z, tada on mora biti cijelo vrijeme na istoj visini od xy-ravnine. Drugim riječima, sve točke na pravcu p imaju istu z koordinatu. Pravac p prolazi točkom A pa sve točke na pravcu p imaju z koordinatu jednaku 3. Nadalje, kako pravac p siječe os z, on ju mora siječi u točki $B(0,0,3)$ zato jer sve točke na osi z imaju prve dvije koordinate jednake 0, a sve točke na pravcu p moraju imati treću koordinatu jednaku 3.



Za vektor smjera pravca p možemo uzeti vektor $\vec{s}_p=\overrightarrow{AB}=(1,-2,0)$. Konačno, na pravac p možemo gledati kao na pravac koji prolazi točkom A (mogli smo uzeti i točku B) i ima vektor smjera $\vec{s}_p$. Stoga njegov kanonski oblik jednadžbe glasi

$$p \ldots \frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-3}{0},$$

a parametarske jednadžbe su

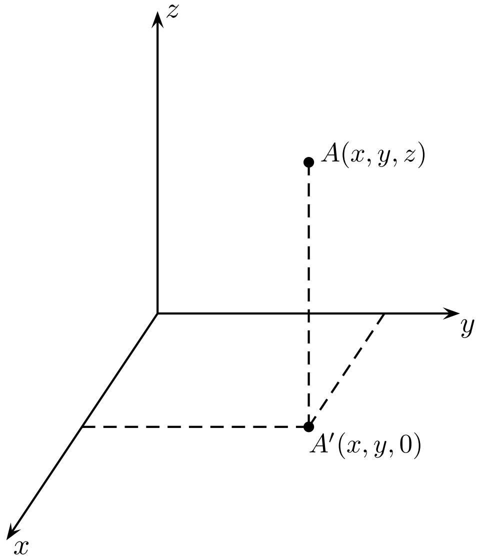
$$p \ldots \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 - 2t, \\ z = 3 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

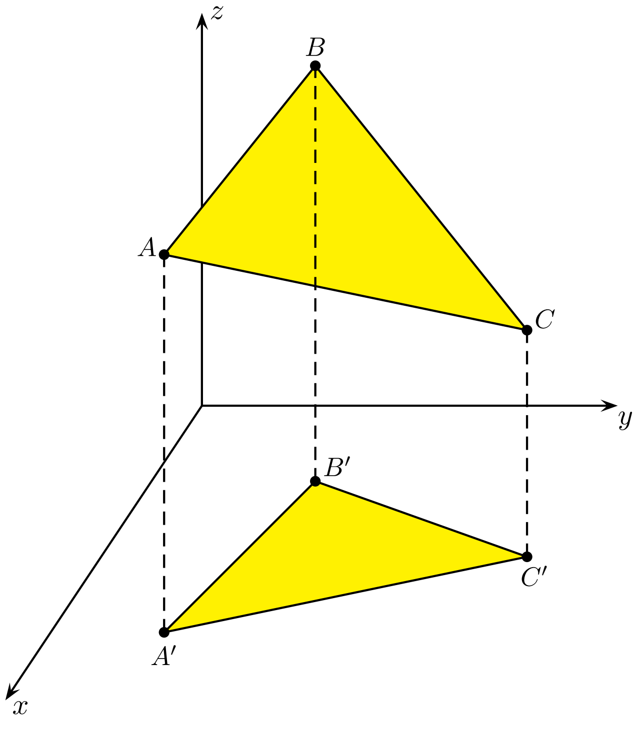
Zadatak 23.

Projicirajte (ortogonalno) trokut ABC na xy-ravninu i izračunajte površinu tako dobivenog trokuta ako je $A(-1, 6, 11)$, $B(2, 7, -5)$ i $C(4, 0, 17)$.

Rješenje.

Općenito, ortogonalna projekcija točke T na ravninu π je točka koja se nalazi na presjeku ravnine π i pravca kroz točku T okomitog na ravninu π. U našem slučaju, ortogonalna projekcija točke $T(x, y, z)$ na xy-ravninu je točka $T'(x, y, 0)$. Dakle, ortogonalnom projekcijom točke na xy-ravninu se čuvaju njezine prve dvije koordinate, dok se treća koordinata pretvara u nulu zato jer sve točke u xy-ravnini imaju treću koordinatu jednaku 0 (naime, znamo da $z = 0$ predstavlja jednadžbu xy-ravnine).



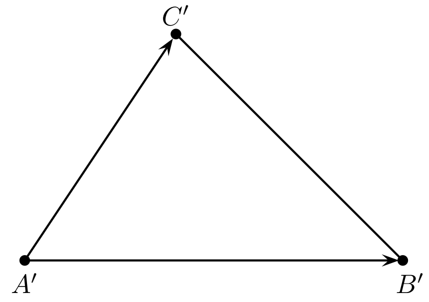


Ortogonalnu projekciju trokuta ABC na xy-ravninu dobijemo tako da ortogonalno projiciramo njegove vrhove. Na taj način dobivamo točke $A'(-1, 6, 0)$, $B'(2, 7, 0)$ i $C'(4, 0, 0)$. Nas zanima površina trokuta $A'B'C'$.

Napomena. Pazite, gornja desna slika predstavlja samo skicu jer nisu precizno unešene koordinate zadanih točaka kako bismo dobili što ljepšu sliku, tako da ta skica ne prikazuje stvarni položaj promatranih trokuta u prostoru, što nije niti bitno za samo rješavanje zadatka. Napravite na računalu pomoću nekog 3D programa (`Archimedes Geo3D, VPython,...`) stvarnu sliku.

Površinu trokuta $A'B'C'$ izračunat ćemo prema formuli $P_{A'B'C'} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{A'B'} \times \overrightarrow{A'C'}\right|$. Dakle, iz vrha

A' pogledamo vektore na stranicama trokuta $A'B'C'$ i izračunamo duljinu njihovog vektorskog produkta. Polovica te duljine jednaka je površini trokuta $A'B'C'$.



Najprije odredimo vektore $\overrightarrow{A'B'}$ i $\overrightarrow{A'C'}$.

$$\overrightarrow{A'B'} = \vec{r}_{B'} - \vec{r}_{A'} = (2,7,0) - (-1,6,0) = (3,1,0)$$
$$\overrightarrow{A'C'} = \vec{r}_{C'} - \vec{r}_{A'} = (4,0,0) - (-1,6,0) = (5,-6,0)$$

Nakon toga izračunamo njihov vektorski produkt.

$$\overrightarrow{A'B'} \times \overrightarrow{A'C'} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & -6 & 0 \end{vmatrix} = (0,0,-23)$$

Konačno, površina trokuta $A'B'C'$ jednaka je

$$P_{A'B'C'} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{A'B'} \times \overrightarrow{A'C'}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|(0,0,-23)\right| = \frac{1}{2}\sqrt{0^2 + 0^2 + (-23)^2} = \frac{23}{2}.$$

Napomena. U prethodnom zadatku, umjesto iz vrha A', mogli smo pogledati vektore na stranicama trokuta $A'B'C'$ iz vrha B' ili iz vrha C'. Drugim riječima,

$$P_{A'B'C'} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{A'B'} \times \overrightarrow{A'C'}\right| = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{B'A'} \times \overrightarrow{B'C'}\right| = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{C'A'} \times \overrightarrow{C'B'}\right|.$$

Nadalje, čak nije važno kojim redoslijedom vektorski množimo odabrane vektore jer je vektorsko množenje antikomutativno, a nas u konačnom rezultatu zanima samo duljina vektorskog produkta. Na primjer,

$$\left|\overrightarrow{A'C'} \times \overrightarrow{A'B'}\right| = \left| -\left(\overrightarrow{A'B'} \times \overrightarrow{A'C'}\right)\right| = \left|\overrightarrow{A'B'} \times \overrightarrow{A'C'}\right|$$

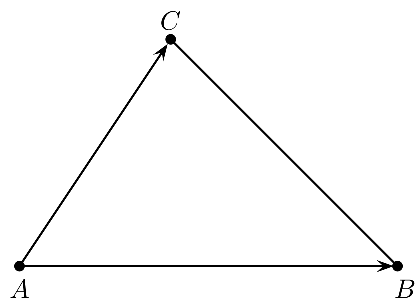
jer suprotni vektori imaju istu duljinu. Isto tako, zbog antikomutativnosti i kvaziasocijativnosti vektorskog produkta ne moramo dvije odabrane stranice trokuta orijentirati iz njihovog zajedničkog vrha prema preostalim dvama vrhovima, nego ih možemo orijentirati na proizvoljni način. Na primjer,

$$\left|\overrightarrow{A'B'} \times \overrightarrow{C'A'}\right| = \left|\overrightarrow{A'B'} \times \left(-\overrightarrow{A'C'}\right)\right| = \left| -\left(\overrightarrow{A'B'} \times \overrightarrow{A'C'}\right)\right| = \left|\overrightarrow{A'B'} \times \overrightarrow{A'C'}\right|.$$

Dakle, na koji način računamo površinu trokuta pomoću vektorskog produkta? Najprije odaberemo dvije stranice trokuta i od njih napravimo vektore na proizvoljni način (orijentiramo ih po želji). Nakon toga izračunamo vektorski produkt dobivenih vektora. Konačno, površina trokuta jednaka je polovici duljine dobivenog vektorskog produkta vektora. Mi ćemo u zadacima najčešće orijentirati dvije odabrane stranice trokuta iz njihovog zajedničkog vrha prema preostalim dvama vrhovima, kako smo to i napravili u prethodnom zadatku.

Zadatak 24.
Nađite površinu trokuta s vrhovima $A(1,1,2)$, $B(0,0,-1)$, $C(2,2,2)$ i duljinu visine tog trokuta iz vrha A.

Rješenje.
U ovom zadatku ćemo koristiti dvije različite formule za računanje površine trokuta. Najprije ćemo površinu trokuta ABC izračunati pomoću vektorskog produkta.



Uzet ćemo vektore na stranicama trokuta ABC iz vrha A. Tada je $P_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$. Odredimo najprije vektore $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \vec{r}_B - \vec{r}_A = (0,0,-1) - (1,1,2) = (-1,-1,-3) \\ \overrightarrow{AC} &= \vec{r}_C - \vec{r}_A = (2,2,2) - (1,1,2) = (1,1,0) \end{aligned}$$

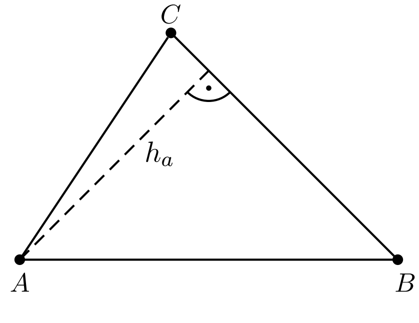
Nakon toga izračunamo njihov vektorski produkt.

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (3,-3,0)$$

Tada je površina trokuta ABC jednaka

$$P_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|(3,-3,0)\right| = \frac{1}{2}\sqrt{3^2 + (-3)^2 + 0^2} = \frac{3}{2}\sqrt{2}.$$

Da bismo izračunali duljinu visine iz vrha A, sjetimo se druge formule za računanje površine trokuta. Prema toj formuli površina trokuta jednaka je polovici produkta duljine stranice i duljine visine na tu stranicu.



Prema oznakama sa slike vrijedi $P_{ABC} = \frac{|BC| \cdot h_a}{2}$ pa je $h_a = \frac{2P_{ABC}}{|BC|}$.

Prema formuli za udaljenost dvije točke u prostoru slijedi

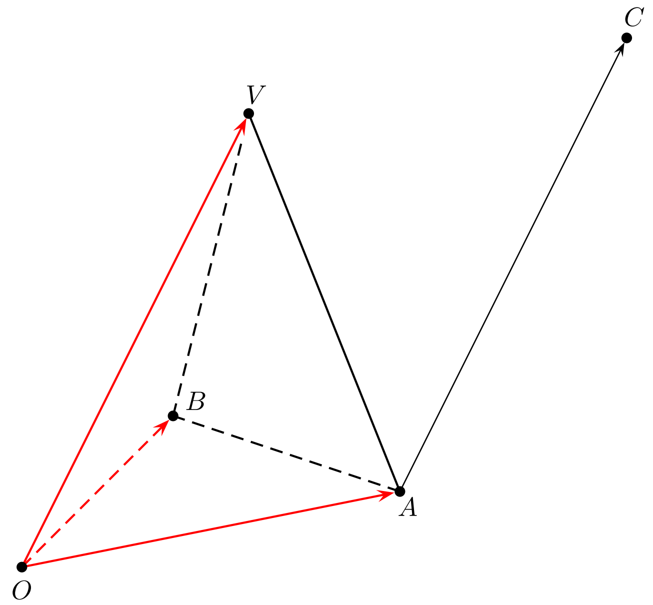
$$|BC| = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2 + (z_B - z_C)^2}$$
$$|BC| = \sqrt{(0-2)^2 + (0-2)^2 + (-1-2)^2}$$
$$|BC| = \sqrt{17}$$

pa je

$$h_a = \frac{2P_{ABC}}{|BC|} = \frac{2 \cdot \frac{3}{2}\sqrt{2}}{\sqrt{17}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{17}} \cdot \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{17}} = \frac{3}{17}\sqrt{34}.$$

Zadatak 25.
Izračunajte volumen tetraedra razapetog vektorima $\overrightarrow{OA} = (1,1,0)$, $\overrightarrow{OB} = (0,1,2)$ i $\overrightarrow{AC} = (1,1,2)$. Izračunajte duljinu visine tetraedra spuštenu na bazu OAB.

Rješenje.
Nanesimo vektor $\overrightarrow{AC}$ iz točke O tako da sva tri vektora koji razapinju promatrani tetraedar imaju početak u istoj točki. Neka je V točka za koju vrijedi $\overrightarrow{OV} = \overrightarrow{AC}$. Tada je također $\overrightarrow{OV} = (1,1,2)$.



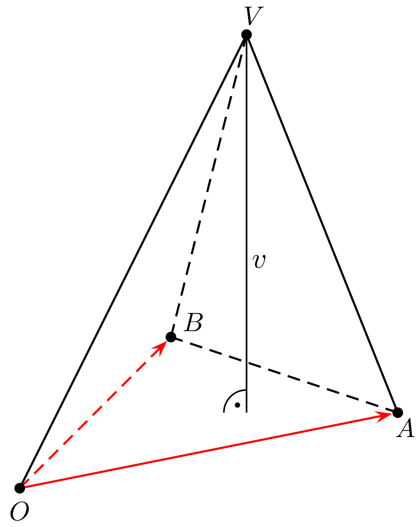
Volumen tetraedra jednak je šestini apsolutne vrijednosti mješovitog produkta vektora $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{OV}$, tj. $V = \frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OV})\right|$. Mješoviti produkt vektora $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{OV}$ jednak je

$$\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OV}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

pa je volumen tetraedra jednak

$$V = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OV}\right)\right| = \frac{1}{6} \cdot |2| = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Da bismo izračunali duljinu visine na bazu OAB, sjetimo se druge formule za računanje volumena tetraedra. Tetraedar je samo jedna specijalna vrsta piramide, a volumen bilo koje piramide jednak je trećini produkta površine baze i duljine visine piramide na tu bazu.



Prema oznakama sa slike vrijedi $V = \frac{1}{3}P_{OAB} \cdot v$ pa je $v = \frac{3V}{P_{OAB}}$. Kako je

$$\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (2, -2, 1),$$

površina trokuta OAB jednaka je

$$P_{OAB} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|(2, -2, 1)\right| = \frac{1}{2}\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = \frac{3}{2}.$$

Konačno, duljina visine tetraedra na bazu OAB jednaka je

$$v = \frac{3V}{P_{OAB}} = \frac{3 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Napomena. Iz svojstava mješovitog produkta tri vektora znamo da je bitan poredak vektora u mješovitom produktu. Ukoliko taj poredak promijenimo, moguće je jedino da mješoviti produkt promijeni predznak. Zbog toga kod računanja volumena tetraedra uzimamo u formuli apsolutnu vrijednost mješovitog produkta kako bismo uvijek dobili nenegativni volumen. Stoga je svejedno kojim ćemo redoslijedom razapinjuće vektore tetraedra smjestiti u determinantu za računanje mješovitog produkta. U slučaju da dobijemo negativnu vrijednost mješovitog produkta, apsolutna vrijednost će ukinuti taj negativni predznak.

Na primjer, u prethodnom zadatku smo imali raspored vektora $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OV}$ i njihov mješoviti produkt u tom redoslijedu je $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OV}\right) = 2$ pa je volumen tetraedra razapetog tim vektorima jednak $\frac{1}{6} \cdot |2| = \frac{1}{3}$. Ako uzmemo raspored vektora $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OV}$, $\overrightarrow{OB}$, tada je mješoviti produkt u tom redoslijedu jednak $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OV}, \overrightarrow{OB}\right) = -2$. Međutim, volumen tetraedra razapetog tim vektorima i dalje zbog apsolutne vrijednosti ostaje jednak $\frac{1}{6} \cdot |-2| = \frac{1}{3}$. Dakle, nemojmo doći u zabludu: mješoviti produkt $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OV}, \overrightarrow{OB}\right)$ nije jednak 2, on je jednak -2. Apsolutnu vrijednost jedino uzimamo iz razloga da osiguramo nenegativni volumen.

Teorem. *Dva pravca* $p_1 \ldots \frac{x-x_1}{\alpha_1} = \frac{y-y_1}{\beta_1} = \frac{z-z_1}{\gamma_1}$ *i* $p_2 \ldots \frac{x-x_2}{\alpha_2} = \frac{y-y_2}{\beta_2} = \frac{z-z_2}{\gamma_2}$ *su komplanarni (leže u istoj ravnini) ako i samo ako vrijedi*

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Zadatak 26.

Ispitajte međusobni položaj pravaca:

a) $p_1 \ldots \frac{x-2}{4} = y + 3 = \frac{z-5}{2}, \quad p_2 \ldots \frac{x}{8} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{4}$

b) $p_1 \ldots \frac{x}{5} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{1}, \quad p_2 \ldots x + 2 = \frac{3-y}{4} = \frac{z-8}{3}$

c) $p_1 \ldots \frac{x-1}{8} = \frac{-(y+2)}{3} = z + 1, \quad p_2 \ldots \frac{x-6}{2} = y + 3 = \frac{z-1}{3}$

Rješenje.

a) Ukoliko u kanonskom obliku jednadžbe pravca na nekoj komponenti nema razlomka, podrazumijeva se da je u nazivniku broj 1. Konkretno, kod pravca p_1, $y + 3$ zapravo znači $\frac{y+3}{1}$. Dakle, imamo

$$p_1 \ldots \frac{x-2}{4} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-5}{2}, \quad p_2 \ldots \frac{x}{8} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{4}.$$

Iz tih jednadžbi vidimo da pravac p_1 ima vektor smjera $\vec{s}_1 = (4, 1, 2)$, a pravac p_2 ima vektor smjera $\vec{s}_2 = (8, 2, 4)$. Uočavamo da vektori $\vec{s}_1$ i $\vec{s}_2$ imaju proporcionalne koordinate, tj. vrijedi

$$\frac{4}{8} = \frac{1}{2} = \frac{2}{4}, \text{ odnosno drugim riječima } \vec{s}_1 = \tfrac{1}{2}\vec{s}_2 \text{ ili } \vec{s}_2 = 2\vec{s}_1$$

pa zaključujemo da pravci p_1 i p_2 imaju kolinearne vektore smjerova. Stoga su pravci p_1 i p_2 paralelni.

b) Kod pravca p_2, $x + 2$ zapravo znači $\frac{x+2}{1}$. Nadalje, razlomak $\frac{3-y}{4}$ nije zapisan u standardnom obliku jer u brojniku mora pisati *varijabla minus broj*, a ne *broj minus varijabla.*

$$\frac{3-y}{4} = \frac{-(y-3)}{4} = \frac{y-3}{-4}$$

Dakle, promatrani pravci u standardnom kanonskom zapisu izgledaju

$$p_1 \ldots \frac{x}{5} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{1}, \quad p_2 \ldots \frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z-8}{3}. \tag{$\clubsuit$}$$

Iz tih jednadžbi vidimo da pravac p_1 ima vektor smjera $\vec{s}_1 = (5, 2, 1)$, a pravac p_2 ima vektor smjera $\vec{s}_2 = (1, -4, 3)$. Vektori $\vec{s}_1$ i $\vec{s}_2$ nisu kolinearni jer nemaju proporcionalne koordinate pa pravci p_1 i p_2 nisu paralelni. Zaključujemo da su pravci p_1 i p_2, ili mimosmjerni ili se sijeku. Koji od tih slučajeva nastupa, možemo provjeriti na dva načina.

- *1. način*: pomoću uvjeta komplanarnosti pravaca

Iz vektora smjerova pravaca dobivamo sljedeće podatke:

$$\vec{s}_1 = (5, 2, 1) \;\Rightarrow\; \alpha_1 = 5,\ \beta_1 = 2,\ \gamma_1 = 1$$
$$\vec{s}_2 = (1, -4, 3) \;\Rightarrow\; \alpha_2 = 1,\ \beta_2 = -4,\ \gamma_2 = 3$$

Iz (♣) vidimo da je $T_1(0,-2,3)$ jedna točka na pravcu p_1, a $T_2(-2,3,8)$ je jedna točka na pravcu p_2. Iz ovih točaka dobivamo sljedeće podatke:

$$\begin{aligned} T_1(0,-2,3) &\Rightarrow x_1 = 0,\, y_1 = -2,\, z_1 = 3 \\ T_2(-2,3,8) &\Rightarrow x_2 = -2,\, y_2 = 3,\, z_2 = 8 \end{aligned}$$

Sada računamo vrijednost determinante za uvjet komplanarnosti.

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0-(-2) & -2-3 & 3-8 \\ 5 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -5 & -5 \\ 5 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 200 \neq 0.$$

Kako je vrijednost te determinante različita od nule, zaključujemo da ne postoji ravnina koja bi sadržavala pravce p_1 i p_2. Stoga su p_1 i p_2 mimosmjerni pravci.

- *2. način*: pomoću Gaussovog postupka

Ideja je da pronađemo presjek pravaca p_1 i p_2 ukoliko on postoji ili da dokažemo da se pravci p_1 i p_2 ne sijeku (što će onda značiti da su mimosmjerni jer smo već ranije provjerili da nisu paralelni). U tu svrhu moramo najprije kanonske jednadžbe pravaca p_1 i p_2 iz (♣) pretvoriti u parametarski oblik.

$$p_1 \ldots \begin{cases} x = 5u \\ y = -2 + 2u \\ z = 3 + u \end{cases} \qquad p_2 \ldots \begin{cases} x = -2 + v \\ y = 3 - 4v \\ z = 8 + 3v \end{cases}$$

Kad bi se pravci p_1 i p_2 sijekli u nekoj točki S, tada bi se točka S morala moći dobiti za neki parametar $u \in \mathbb{R}$ na pravcu p_1, ali isto tako bi se točka S morala moći dobiti za neki parametar $v \in \mathbb{R}$ na pravcu p_2. Drugim riječima, morali bi postojati brojevi $u, v \in \mathbb{R}$ za koje bi vrijedilo:

- x-koordinata točke S je istovremeno oblika $5u$ i oblika $-2 + v$
- y-koordinata točke S je istovremeno oblika $-2 + 2u$ i oblika $3 - 4v$
- z-koordinata točke S je istovremeno oblika $3 + u$ i oblika $8 + 3v$

Dakle, ako se pravci p_1 i p_2 sijeku, mora vrijediti

$$\begin{aligned} 5u &= -2 + v \\ -2 + 2u &= 3 - 4v, \\ 3 + u &= 8 + 3v \end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned} 5u - v &= -2 \\ 2u + 4v &= 5 \\ u - 3v &= 5 \end{aligned} \tag{$\star$}$$

Sustav linearnih jednadžbi ($\star$) rješavamo Gaussovim postupkom.

$$
\begin{array}{cc|cll}
u & v & & & \\
\hline
5 & -1 & -2 & & + \\
2 & 4 & 5 & + & \\
\boxed{1} & -3 & 5 & / \cdot (-2) & / \cdot (-5) \\
\hline
0 & 14 & -27 & & \\
0 & 10 & -5 & / \cdot \frac{1}{5} & \\
1 & -3 & 5 & & \\
\hline
0 & 14 & -27 & + & \\
0 & \boxed{2} & -1 & / \cdot (-7) & / \cdot \frac{3}{2} \\
1 & -3 & 5 & & + \\
\hline
{\color{red}0} & {\color{red}0} & {\color{red}-20} & & \\
0 & 2 & -1 & & \\
1 & 0 & \frac{7}{2} & &
\end{array}
$$

Zaključujemo da je sustav ($\star$) kontradiktoran, što znači da se pravci p_1 i p_2 ne sijeku. Kako već od ranije znamo da nisu niti paralelni, slijedi da su p_1 i p_2 mimosmjerni pravci.

c) Kod pravca p_1 u razlomku $\frac{-(y+2)}{3}$ predznak minus iz brojnika moramo prebaciti u nazivnik. Isto tako, u izrazima kod kojih nema razlomaka podrazumijeva se da je nazivnik jednak 1. Stoga promatrani pravci u standardnom kanonskom zapisu izgledaju

$$
p_1 \ldots \frac{x-1}{8} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z+1}{1}, \quad p_2 \ldots \frac{x-6}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-1}{3}. \tag{$\spadesuit$}
$$

Iz tih jednadžbi vidimo da pravac p_1 ima vektor smjera $\vec{s}_1 = (8, -3, 1)$, a pravac p_2 ima vektor smjera $\vec{s}_2 = (2, 1, 3)$. Vektori $\vec{s}_1$ i $\vec{s}_2$ nisu kolinearni jer nemaju proporcionalne koordinate pa pravci p_1 i p_2 nisu paralelni. Zaključujemo da su pravci p_1 i p_2, ili mimosmjerni ili se sijeku. Koji od tih slučajeva nastupa, možemo provjeriti na dva načina.

- *1. način*: pomoću uvjeta komplanarnosti pravaca

Iz vektora smjerova pravaca dobivamo sljedeće podatke:

$$
\begin{aligned}
\vec{s}_1 = (8, -3, 1) \ &\Rightarrow\ \alpha_1 = 8,\ \beta_1 = -3,\ \gamma_1 = 1 \\
\vec{s}_2 = (2, 1, 3) \ &\Rightarrow\ \alpha_2 = 2,\ \beta_2 = 1,\ \gamma_2 = 3
\end{aligned}
$$

Iz ($\spadesuit$) vidimo da je $T_1(1, -2, -1)$ jedna točka na pravcu p_1, a $T_2(6, -3, 1)$ je jedna točka na pravcu p_2. Iz ovih točaka dobivamo sljedeće podatke:

$$
\begin{aligned}
T_1(1, -2, -1) \ &\Rightarrow\ x_1 = 1,\ y_1 = -2,\ z_1 = -1 \\
T_2(6, -3, 1) \ &\Rightarrow\ x_2 = 6,\ y_2 = -3,\ z_2 = 1
\end{aligned}
$$

Sada računamo vrijednost determinante za uvjet komplanarnosti.

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-6 & -2-(-3) & -1-1 \\ 8 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 1 & -2 \\ 8 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Kako je vrijednost te determinante jednaka nuli, zaključujemo da postoji ravnina koja sadrži pravce p_1 i p_2, tj. p_1 i p_2 sigurno nisu mimosmjerni pravci. Stoga su p_1 i p_2 paralelni pravci ili se sijeku. Kako već od ranije znamo da nisu paralelni, zaključujemo da se pravci p_1 i p_2 sijeku. Uočite da smo ovim postupkom dobili samo informaciju da se promatrani pravci sijeku, ali nismo dobili informaciju u kojoj se točki sijeku.

- *2. način*: pomoću Gaussovog postupka

Ideja je da pronađemo presjek pravaca p_1 i p_2 ukoliko on postoji ili da dokažemo da se pravci p_1 i p_2 ne sijeku (što će onda značiti da su mimosmjerni jer smo već ranije provjerili da nisu paralelni). U tu svrhu moramo najprije kanonske jednadžbe pravaca p_1 i p_2 iz (♠) pretvoriti u parametarski oblik.

$$p_1 \ldots \begin{cases} x = 1 + 8u \\ y = -2 - 3u \\ z = -1 + u \end{cases} \qquad p_2 \ldots \begin{cases} x = 6 + 2v \\ y = -3 + v \\ z = 1 + 3v \end{cases}$$

Kad bi se pravci p_1 i p_2 sijekli u nekoj točki S, tada bi se točka S morala moći dobiti za neki parametar $u \in \mathbb{R}$ na pravcu p_1, ali isto tako bi se točka S morala moći dobiti za neki parametar $v \in \mathbb{R}$ na pravcu p_2. Drugim riječima, morali bi postojati brojevi $u, v \in \mathbb{R}$ za koje bi vrijedilo:

- x-koordinata točke S je istovremeno oblika $1 + 8u$ i oblika $6 + 2v$
- y-koordinata točke S je istovremeno oblika $-2 - 3u$ i oblika $-3 + v$
- z-koordinata točke S je istovremeno oblika $-1 + u$ i oblika $1 + 3v$

Dakle, ako se pravci p_1 i p_2 sijeku, mora vrijediti

$$\begin{aligned} 1 + 8u &= 6 + 2v \\ -2 - 3u &= -3 + v, \\ -1 + u &= 1 + 3v \end{aligned}$$

odnosno sustav

$$\begin{aligned} 8u - 2v &= 5 \\ 3u + v &= 1 \\ u - 3v &= 2 \end{aligned} \tag{$*$}$$

mora imati barem jedno rješenje (preciznije rečeno, točno jedno rješenje).

Sustav linearnih jednadžbi ($*$) rješavamo Gaussovim postupkom.

$$
\begin{array}{cc|cl}
u & v & & \\
\hline
8 & -2 & 5 & \quad + \\
3 & \boxed{1} & 1 & /\cdot 2 \quad /\cdot 3 \\
1 & -3 & 2 & \quad + \\
\hline
14 & 0 & 7 & /\cdot \frac{1}{7} \\
3 & 1 & 1 & \\
10 & 0 & 5 & /\cdot \frac{1}{5} \\
\hline
2 & 0 & 1 & \\
3 & 1 & 1 & \\
2 & 0 & 1 & \\
\hline
\boxed{2} & 0 & 1 & /\cdot \frac{-3}{2} \\
3 & 1 & 1 & \quad + \\
\hline
2 & 0 & 1 & \\
0 & 1 & -\frac{1}{2} &
\end{array}
$$

Zaključujemo da sustav $(*)$ ima jedinstveno rješenje $u = \frac{1}{2}$, $v = -\frac{1}{2}$ iz čega slijedi da se pravci p_1 i p_2 sijeku. No, sada možemo dobiti i njihovu točku presjeka S tako da $u = \frac{1}{2}$ uvrstimo u parametarske jednadžbe pravca p_1 ili pak uvrstimo $v = -\frac{1}{2}$ u parametarske jednadžbe pravca p_2. U ovom primjeru ćemo napraviti oba uvrštavanja kako bismo se uvjerili da ćemo u oba slučaja dobiti istu točku presjeka. Ako $u = \frac{1}{2}$ uvrstimo u parametarske jednadžbe pravca p_1, dobivamo

$$
\begin{aligned}
x &= 1 + 8u = 1 + 8 \cdot \tfrac{1}{2} = 5 \\
y &= -2 - 3u = -2 - 3 \cdot \tfrac{1}{2} = -\tfrac{7}{2} \\
z &= -1 + u = -1 + \tfrac{1}{2} = -\tfrac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Isto tako, ako $v = -\frac{1}{2}$ uvrstimo u parametarske jednadžbe pravca p_2, ponovo dobivamo

$$
\begin{aligned}
x &= 6 + 2v = 6 + 2 \cdot \tfrac{-1}{2} = 5 \\
y &= -3 + v = -3 + \tfrac{-1}{2} = -\tfrac{7}{2} \\
z &= 1 + 3v = 1 + 3 \cdot \tfrac{-1}{2} = -\tfrac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Dakle, pravci p_1 i p_2 se sijeku u točki $S\big(5, -\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}\big)$.

Napomena. Ovdje ćemo spomenuti dvije veoma važne stvari koje znaju često biti uzrok pogrešnog rješavanja zadataka, a odnose se upravo na prethodno riješeni zadatak. Kao prvo, zašto smo prilikom pretvaranja iz kanonskog u parametarski oblik, parametre pravaca p_1 i p_2 nazvali različitim slovima u i v? Zašto ih nismo nazvali istim slovom? Odgovor je jednostavan ako pogledate c) dio prethodnog zadatka. Naime, ukoliko se pravci sijeku u nekoj točki S, tada se ta točka općenito ne mora dobiti za istu vrijednost parametra na oba pravca. To je upravo bio slučaj u c) dijelu zadatka. Točka $S\big(5, -\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}\big)$ se nalazi na oba pravca p_1 i p_2. Međutim, ona se iz parametarskih jednadžbi pravca p_1

dobiva za parametar $u = \frac{1}{2}$, a iz parametarskih jednadžbi pravca p_2 se dobiva za parametar $v = -\frac{1}{2}$. Sada kada znamo da se točka S nalazi na oba pravca p_1 i p_2, možemo npr. napisati parametarske jednadžbe tih pravaca s točkom S kao istaknutom točkom. Dakle,

$$p_1 \ldots \begin{cases} x = 5 + 8u \\ y = -\frac{7}{2} - 3u \\ z = -\frac{1}{2} + u \end{cases} \qquad p_2 \ldots \begin{cases} x = 5 + 2v \\ y = -\frac{7}{2} + v \\ z = -\frac{1}{2} + 3v \end{cases}$$

su također parametarske jednadžbe istih pravaca p_1 i p_2 (samo smo im promijenili istaknute točke, a vektore smjerova smo ostavili na miru – nismo ih produljivali, niti skraćivali). U ovom slučaju se točka S na oba pravca p_1 i p_2 dobiva za istu vrijednost parametara $u = 0$ i $v = 0$. Naravno, postoji još beskonačno mnogo parametrizacija pravaca p_1 i p_2 u kojima bi se točka S dobivala za iste vrijednosti parametara na oba pravca, ali isto tako postoji još i beskonačno mnogo parametrizacija pravaca p_1 i p_2 u kojima bi se točka S dobivala za različite vrijednosti parametara na oba pravca.

Dakle, za koje će se vrijednosti parametara zajednička točka dvaju pravaca dobiti na pojedinim pravcima, bitno ovisi o tome na koji način su pravci parametrizirani (koje smo točke na njima uzeli za istaknute točke i koje smo vektore iz klase kolinearnih vektora uzeli za vektore smjera). Tokom traženja presjeka dvaju pravaca ne treba puno brinuti o načinu na koji su oni parametrizirani, važno je samo da njihove parametre nazovemo različitim slovima jer se njihova zajednička točka (ukoliko se pravci sijeku) na oba pravca općenito dobiva za različite vrijednosti njihovih parametara.

Druga važna stvar koju ovdje želimo naglasiti ima veze sa sljedećim pitanjem: *Zašto uopće prilikom traženja presjeka dvaju pravaca, kanonske jednadžbe pravaca pretvaramo u parametarski oblik?*

Pogledajmo ponovo c) dio prethodnog zadatka. Kanonske jednadžbe pravaca p_1 i p_2 su

$$p_1 \ldots \frac{x-1}{8} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z+1}{1}, \quad p_2 \ldots \frac{x-6}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-1}{3}.$$

Prva ideja za traženje presjeka koja bi nam mogla pasti na pamet jest da pojedine razlomke uz iste koordinate izjednačimo. Tada bismo dobili

$$\begin{array}{ccc} \frac{x-1}{8} = \frac{x-6}{2} & \frac{y+2}{-3} = \frac{y+3}{1} & \frac{z+1}{1} = \frac{z-1}{3} \\ 2(x-1) = 8(x-6) & y+2 = -3(y+3) & 3(z+1) = z-1 \\ x = \frac{23}{3} & y = -\frac{11}{4} & z = -2 \end{array}$$

pa bismo zaključili da se pravci p_1 i p_2 sijeku u točki $S'\left(\frac{23}{3}, -\frac{11}{4}, -2\right)$, što nije istina jer znamo da se oni sijeku u točki $S\left(5, -\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. Još goru situaciju bismo dobili u b) dijelu zadatka jer bi ovaj postupak dao da se pravci u b) dijelu zadatka sijeku, a znamo da su mimosmjerni.

Zašto ovaj postupak rješavanja nije ispravan? Naime, ako koordinate neke točke koja pripada pravcu uvrstimo u njegov kanonski zapis, tada su vrijednosti svih razlomaka iz kanonskog zapisa upravo jednake vrijednosti parametra za koji se ta točka dobiva u pripadnim parametarskim jednadžbama. Konkretno, u našem slučaju to znači da vrijedi

$$p_1 \ldots \frac{x-1}{8} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z+1}{1} = u, \quad p_2 \ldots \frac{x-6}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-1}{3} = v.$$

Prilikom izjednačavanja pojedinih razlomaka mi smo zapravo tri puta implicitno napisali da je $u = v$, tj. da se točka presjeka na oba pravca dobiva za iste vrijednosti parametara u i v, što naravno ne mora biti istina. Na taj način vidimo da ovaj postupak traženja presjeka pravaca nije ispravan. Možemo primijetiti da je kanonski oblik jednadžbe pravca veoma nezgodan i opasan za neka ozbiljnija računanja. Mogli bismo reći da je to više *šminkerski* zapis pravca u kojemu je elegantno zapisan njegov vektor smjera i jedna točka na tom pravcu, ali druge koristiti od toga zapisa zapravo i nemamo. U zadacima je uvijek najpametnije raditi s parametarskim jednadžbama pravaca ukoliko provodimo neka računanja u koja su uključeni pojedini pravci.

Zadatak 27.
Napišite jednadžbu normale iz točke $A(6,1,-5)$ na pravac $p \ldots \frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{1} = 2-z$.

Rješenje.
Normala iz točke A na pravac p je pravac n koji prolazi točkom A i siječe zadani pravac p pod pravim kutom. Ovakav zadatak se u ravninskom slučaju vrlo jednostavno rješava preko jednadžbe pravca kroz zadanu točku sa zadanim koeficijentom smjera. Naime, točka A nam je zadana, a okomiti pravci imaju suprotne i recipročne koeficijente smjera. U prostoru je situacija malo drukčija jer postoje i mimosmjerni pravci. Ukoliko su u prostoru pravci okomiti, to još uvijek ne znači da se sijeku jer mogu biti mimosmjerni. Stoga na prvi pogled u prostoru nije tako jednostavno iz zadane točke pronaći pravac koji siječe zadani pravac pod pravim kutom. Ovdje ćemo pokazati čak tri načina pomoću kojih možemo pronaći taj pravac. Prije nego krenemo dalje, zapišimo pravac p u standardnom kanonskom zapisu. Naime, kako je

$$2-z = \frac{-(z-2)}{1} = \frac{z-2}{-1},$$

standardni kanonski zapis pravca p glasi

$$p \ldots \frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{1} = \frac{z-2}{-1}. \tag{$\heartsuit$}$$

Pokažimo sada tri različita načina dobivanja normale n iz zadane točke A na zadani pravac p.

- *1. način:* uvođenje dodatne ravnine

Točkom A postavimo ravninu π koja je okomita na pravac p. U toj ravnini su sadržani svi pravci koji prolaze točkom A i okomiti su na pravac p. Specijalno, normala n je također sadržana u toj ravnini. Preciznije, ravnina π i pravac p se sijeku u točki S. Tada je tražena normala n zapravo pravac koji prolazi točkama A i S.

Pronađimo najprije jednadžbu ravnine π. Kako je $\pi \perp p$, slijedi da za normalu ravnine π možemo uzeti vektor smjera pravca p, tj. možemo uzeti $\vec{n}_\pi = \vec{s}_p$ (vidi donju sliku). Iz ($\heartsuit$) dobivamo $\vec{s}_p = (3,1,-1)$ pa je $\vec{n}_\pi = (3,1,-1)$.

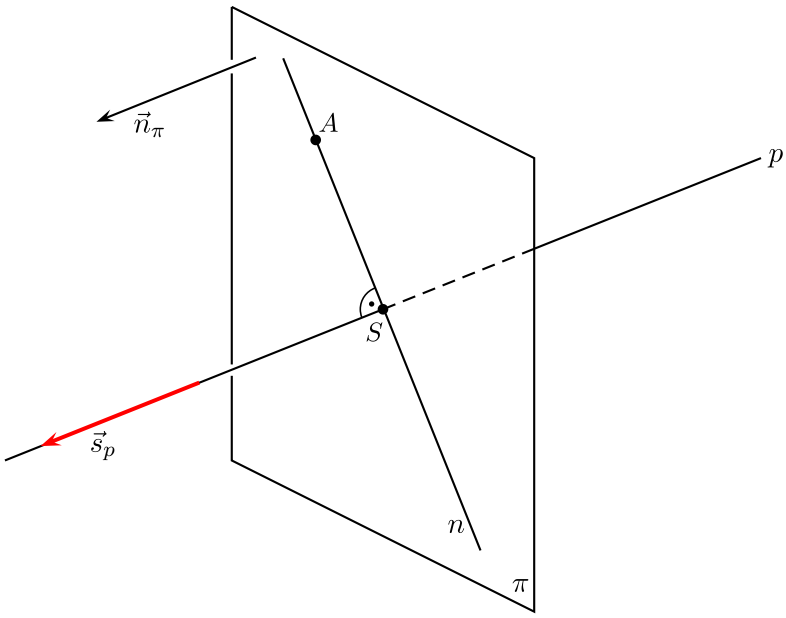
Dakle, ravnina π je ravnina koja prolazi točkom $A(6,1,-5)$ i ima normalu $\vec{n}_\pi = (3,1,-1)$ pa imamo

$$A(6,1,-5) \;\Rightarrow\; x_0 = 6,\ y_0 = 1,\ z_0 = -5$$
$$\vec{n}_\pi = (3,1,-1) \;\Rightarrow\; A = 3,\ B = 1,\ C = -1$$

Pazite, nemojte ime točke A miješati s x-koordinatom normale $\vec{n}_\pi$ (ostavljene su namjerno oznake kakve se nalaze u formulama). Uvrštavanjem navedenih podataka u formulu za jednadžbu ravnine ako je poznata jedna njezina točka i normala, dobivamo

$$\begin{aligned} A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)&=0\\ 3(x-6)+1\cdot(y-1)+(-1)\cdot(z-(-5))&=0\\ 3x+y-z-24&=0 \end{aligned}$$

pa ravnina π ima jednadžbu $\pi \ldots 3x+y-z-24=0$.



Sada točku S možemo dobiti kao presjek ravnine π i pravca p. Presjek pravca i ravnine u ovom slučaju možemo pronaći tako da parametarske jednadžbe pravca p uvrstimo u opći oblik jednadžbe ravnine π. Parametarske jednadžbe pravca p su

$$p \ldots \begin{cases} x &= 2+3t\\ y &= -4+t\\ z &= 2-t \end{cases}$$

pa uvrštavanjem u jednadžbu ravnine π dobivamo

$$\begin{gathered} 3x+y-z-24=0\\ 3(2+3t)+(-4+t)-(2-t)-24=0\\ 6+9t-4+t-2+t-24=0\\ 11t=24\\ t=\tfrac{24}{11} \end{gathered}$$

Konačno, $t=\frac{24}{11}$ uvrstimo u parametarske jednadžbe pravca p pa dobivamo

$$\begin{gathered} x=2+3\cdot\tfrac{24}{11}=\tfrac{94}{11}\\ y=-4+\tfrac{94}{11}=-\tfrac{20}{11}\\ z=2-\tfrac{24}{11}=-\tfrac{2}{11} \end{gathered}$$

Dakle, pravac p i ravnina π sijeku se u točki $S\left(\frac{94}{11}, -\frac{20}{11}, -\frac{2}{11}\right)$. Sada kada smo pronašli točku S nije problem pronaći jednadžbu pravca n. Kako pravac n prolazi točkama A i S, o njemu možemo razmišljati kao o pravcu koji prolazi točkom A i ima vektor smjera $\vec{s}_n = \overrightarrow{AS}$.

$$\overrightarrow{AS} = \vec{r}_S - \vec{r}_A = \left(\tfrac{94}{11}, -\tfrac{20}{11}, -\tfrac{2}{11}\right) - (6, 1, -5) = \left(\tfrac{28}{11}, -\tfrac{31}{11}, \tfrac{53}{11}\right)$$

Kako bismo u jednadžbi imali ljepše brojeve, možemo se u ovom trenutku predomisliti i umjesto vektora $\overrightarrow{AS}$ uzeti vektor $11 \cdot \overrightarrow{AS}$ za vektor smjera pravca n. Dakle, uzmimo da je

$$\vec{s}_n = 11 \cdot \overrightarrow{AS} = 11 \cdot \left(\tfrac{28}{11}, -\tfrac{31}{11}, \tfrac{53}{11}\right) = (28, -31, 53).$$

Stoga kanonski oblik jednadžbe pravca n glasi

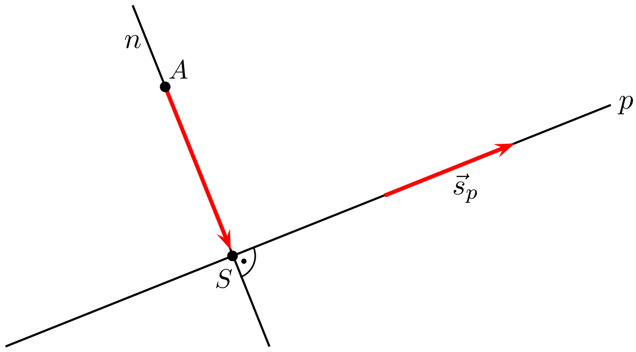
$$n \ldots \frac{x-6}{28} = \frac{y-1}{-31} = \frac{z+5}{53}.$$

Oprez. Pazite, vektori $\vec{v}_1 = \left(\frac{28}{11}, -\frac{31}{11}, \frac{53}{11}\right)$ i $\vec{v}_2 = (28, -31, 53)$ nisu jednaki, ali imaju isti smjer. Nama je svejedno kolika će biti duljina vektora smjera pravca (osim ako netko od nas ne zahtijeva vektor određene duljine), bitan nam je samo smjer vektora (čak nam nije bitna niti orijentacija u općenitom slučaju). Stoga si možemo dozvoliti taj luksuz da uzmemo za vektor smjera pravca onaj vektor iz klase kolinearnih vektora koji ima ljepše koordinate. Općenito, ako je $\vec{s}$ vektor smjera nekog pravca, tada je i vektor $\lambda\vec{s}$ također vektor smjera tog pravca za svaki $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Međutim, u toj slobodi koju si dozvoljavamo ponekad možemo i pretjerati da počnemo istu stvar raditi i sa točkama. Na primjer, gore smo dobili točku $S\left(\frac{94}{11}, -\frac{20}{11}, -\frac{2}{11}\right)$ i mogli bismo doći na ludu ideju da iz te točke izlučimo faktor $\frac{1}{11}$ i nakon toga ga izostavimo i kažemo da se pravac p i ravnina π sijeku u točki $S'(94, -20, -2)$ tako da imamo i ljepše koordinate za točku presjeka. TO JE POGREŠNO!!! To se ne smije raditi jer točke S i S' nisu jednake jer nemaju jednake koordinate. Naravno, ta ista priča se ne smije raditi niti sa vektorima jer vektori su također jednaki ako i samo ako imaju istu duljinu, isti smjer i istu orijentaciju, odnosno ako i samo ako imaju jednake koordinate s obzirom na neku bazu. Međutim, kod izbora vektora smjera nekog pravca, nama u tom trenutku nisu bitne sve tri informacije koje vektor u sebi sadrži, važan nam je samo smjer vektora. Kako spomenuti vektori $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$ imaju isti smjer, nismo napravili nikakvu pogrešku što smo umjesto vektora $\vec{v}_1$ uzeli vektor $\vec{v}_2$ za vektor smjera pravca n jer je njegov smjer i dalje ostao sačuvan.

- *2. način:* pomoću skalarnog produkta vektora

Neka je S presjek pravca p i normale n. Kako su pravci p i n okomiti, slijedi da su vektori $\overrightarrow{AS}$ i $\vec{s}_p$ također okomiti pa je $\overrightarrow{AS} \cdot \vec{s}_p = 0$. Iz ($\heartsuit$) vidimo da je $\vec{s}_p = (3, 1, -1)$.



Nadalje, iz ($\heartsuit$) dobivamo da su parametarske jednadžbe pravca p

$$p \dots \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -4 + t\,. \\ z = 2 - t \end{cases}$$

Kako se točka S nalazi na pravcu p, njezine koordinate moraju biti oblika $S(2+3t, -4+t, 2-t)$ za neki $t \in \mathbb{R}$ jer u protivnom točka S ne bi ležala na pravcu p.

Napomena. Svaki puta kada u zadatku znate da se neka nepoznata točka S nalazi na nekom zadanom pravcu p, iskoristite parametarske jednadžbe pravca p jer na taj način za koordinate nepoznate točke S nećete imati tri nepoznanice, nego samo jednu nepoznanicu.

Kako je $A(6,1,-5)$ i $S(2+3t, -4+t, 2-t)$, slijedi

$$\overrightarrow{AS} = \vec{r}_S - \vec{r}_A = (2+3t, -4+t, 2-t) - (6,1,-5) = (-4+3t, -5+t, 7-t).$$

Uvrstimo li $\vec{s}_p = (3,1,-1)$ i $\overrightarrow{AS} = (-4+3t, -5+t, 7-t)$ u $\overrightarrow{AS} \cdot \vec{s}_p = 0$, dobivamo

$$\begin{gathered} \overrightarrow{AS} \cdot \vec{s}_p = 0 \\ (-4+3t, -5+t, 7-t) \cdot (3,1,-1) = 0 \\ (-4+3t) \cdot 3 + (-5+t) \cdot 1 + (7-t) \cdot (-1) = 0 \\ -12 + 9t - 5 + t - 7 + t = 0 \\ 11t = 24 \\ t = \tfrac{24}{11} \end{gathered}$$

Stoga točka S ima koordinate

$$\begin{gathered} S(2+3t, -4+t, 2-t) \\ S\big(2 + 3 \cdot \tfrac{24}{11},\ -4 + \tfrac{24}{11},\ 2 - \tfrac{24}{11}\big) \\ S\big(\tfrac{94}{11}, -\tfrac{20}{11}, -\tfrac{2}{11}\big) \end{gathered}$$

Sada kada smo pronašli točku S nije problem pronaći jednadžbu pravca n. Kako pravac n prolazi točkama A i S, o njemu možemo razmišljati kao o pravcu koji prolazi točkom A i ima vektor smjera $\vec{s}_n = \overrightarrow{AS}$.

$$\overrightarrow{AS} = \vec{r}_S - \vec{r}_A = \big(\tfrac{94}{11}, -\tfrac{20}{11}, -\tfrac{2}{11}\big) - (6,1,-5) = \big(\tfrac{28}{11}, -\tfrac{31}{11}, \tfrac{53}{11}\big)$$

Kako bismo u jednadžbi imali ljepše brojeve, možemo se u ovom trenutku predomisliti i umjesto vektora $\overrightarrow{AS}$ uzeti vektor $11 \cdot \overrightarrow{AS}$ za vektor smjera pravca n. Dakle, uzmimo da je

$$\vec{s}_n = 11 \cdot \overrightarrow{AS} = 11 \cdot \big(\tfrac{28}{11}, -\tfrac{31}{11}, \tfrac{53}{11}\big) = (28, -31, 53).$$

Stoga kanonski oblik jednadžbe pravca n glasi

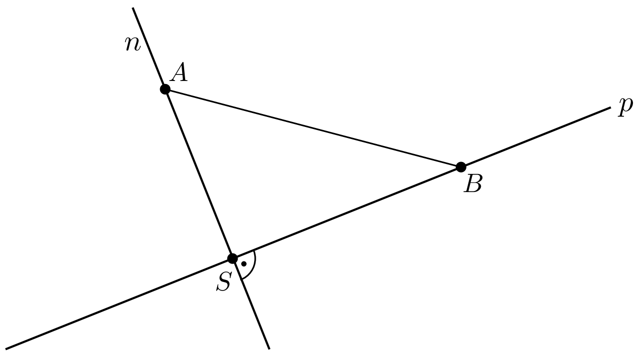
$$n \dots \frac{x-6}{28} = \frac{y-1}{-31} = \frac{z+5}{53}.$$

- *3. način:* pomoću derivacije funkcije

Neka je S presjek pravca p i normale n. Iz ($\heartsuit$) dobivamo parametarske jednadžbe pravca p.

$$p \ldots \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -4 + t \\ z = 2 - t \end{cases}$$

Uzmimo na pravcu p bilo koju točku B. Kako je točka B na pravcu p, ona mora biti oblika $B(2 + 3t, -4 + t, 2 - t)$ za neki $t \in \mathbb{R}$.



Udaljenost točke A od točke B jednaka je

$$\begin{aligned} d(A, B) &= \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2} = \\ &= \sqrt{(6 - (2 + 3t))^2 + (1 - (-4 + t))^2 + (-5 - (2 - t))^2} = \\ &= \sqrt{(4 - 3t)^2 + (5 - t)^2 + (-7 + t)^2}. \end{aligned}$$

Dakle, udaljenost točke A od bilo koje točke $B(2 + 3t, -4 + t, 2 - t)$ pravca p je funkcija jedne varijable

$$f(t) = \sqrt{(4 - 3t)^2 + (5 - t)^2 + (-7 + t)^2}.$$

Specijalno, po toj formuli se može izračunati i udaljenost točke A od točke S i ta udaljenost upravo predstavlja minimum funkcije f. Naime, dužina $\overline{AS}$ je najmanje duljine od svih dužina oblika $\overline{AB}$ kada se točka B šeće po pravcu p (u pravokutnom trokutu je kateta uvijek manje duljine od hipotenuze). Naravno, kako je i točka S na pravcu p, ona je također oblika $S(2+3t, -4+t, 2-t)$ za neki $t \in \mathbb{R}$. Važno je uočiti da ćemo točku S dobiti za onaj parametar t za koji funkcija f poprima minimum. Dakle, tražimo stacionarne točke funkcije f. Znamo da su to kandidati za ekstreme. Možemo umjesto funkcije f promatrati funkciju

$$g(t) = (4 - 3t)^2 + (5 - t)^2 + (-7 + t)^2$$

koja zapravo mjeri kvadrat udaljenosti točke A od neke točke na pravcu p. Funkcije f i g postižu minimum u istoj točki jer je udaljenost minimalna ako i samo ako je kvadrat udaljenosti minimalan. Kako je funkciju g jednostavnije derivirati, radije ćemo s njom dalje raditi (naravno, nije nikakva greška ako nastavimo raditi s funkcijom f).

Napomena. Funkcije f i g nemaju isti minimum. Naime, ako funkcija f ima minimum jednak m, tada funkcija g ima minimum jednak m^2. Međutim, poanta je da funkcije f i g postižu svoje minimume za istu vrijednost varijable t.

Deriviranjem funkcije g dobivamo

$$\begin{aligned} g'(t) &= 2 \cdot (4-3t) \cdot (-3) + 2 \cdot (5-t) \cdot (-1) + 2 \cdot (-7+t) \\ g'(t) &= 22t - 48 \end{aligned}$$

Rješavanjem jednadžbe $22t - 48 = 0$ slijedi $t = \frac{24}{11}$. Stoga točka S ima koordinate

$$S(2+3t, -4+t, 2-t)$$
$$S\big(2+3\cdot\tfrac{24}{11},\ -4+\tfrac{24}{11},\ 2-\tfrac{24}{11}\big)$$
$$S\big(\tfrac{94}{11}, -\tfrac{20}{11}, -\tfrac{2}{11}\big)$$

Sada kada smo pronašli točku S nije problem pronaći jednadžbu pravca n. Kako pravac n prolazi točkama A i S, o njemu možemo razmišljati kao o pravcu koji prolazi točkom A i ima vektor smjera $\vec{s}_n = \overrightarrow{AS}$.

$$\overrightarrow{AS} = \vec{r}_S - \vec{r}_A = \big(\tfrac{94}{11}, -\tfrac{20}{11}, -\tfrac{2}{11}\big) - (6,1,-5) = \big(\tfrac{28}{11}, -\tfrac{31}{11}, \tfrac{53}{11}\big)$$

Kako bismo u jednadžbi imali ljepše brojeve, možemo se u ovom trenutku predomisliti i umjesto vektora $\overrightarrow{AS}$ uzeti vektor $11 \cdot \overrightarrow{AS}$ za vektor smjera pravca n. Dakle, uzmimo da je

$$\vec{s}_n = 11 \cdot \overrightarrow{AS} = 11 \cdot \big(\tfrac{28}{11}, -\tfrac{31}{11}, \tfrac{53}{11}\big) = (28, -31, 53).$$

Stoga kanonski oblik jednadžbe pravca n glasi

$$n \ldots \frac{x-6}{28} = \frac{y-1}{-31} = \frac{z+5}{53}.$$

Napomena. Uočite da sva tri prethodno opisana načina traženja normale iz zadane točke na zadani pravac imaju jednu zajedničku stvar. Naime, u sva tri načina se traži točka S (presjek normale i pravca), jedino je razlika u pristupu traženja te točke. Točku S iz prethodnog zadatka zovemo ortogonalna projekcija točke A na pravac p. Nadalje, uočite da je udaljenost točke A od pravca p jednaka duljini dužine $\overline{AS}$. Drugim riječima, udaljenost točke A od pravca p jednaka je udaljenosti točke A od njezine ortogonalne projekcije na pravac p. Dakle,

$$d(A,p) = |AS| = d(A,S) = \sqrt{\big(6-\tfrac{94}{11}\big)^2 + \big(1-\big(-\tfrac{20}{11}\big)\big)^2 + \big(-5-\big(-\tfrac{2}{11}\big)\big)^2} = 3\sqrt{\tfrac{46}{11}}.$$

Već ranije smo u zadatku 18. na stranici 19. udaljenost točke A od pravca p izračunali po gotovoj formuli. Ovdje je pokazan još jedan način računanja udaljenosti točke od pravca u kojemu se ne koristi gotova formula.

Zadatak 28.
Odredite udaljenost pravca $p_1 \dots \frac{x-2}{3} = y + 4 = \frac{z-5}{4}$ od pravca $p_2 \dots \frac{x+1}{4} = y + 2 = \frac{z-1}{4}$.

Rješenje.
Vektor smjera pravca p_1 je $\vec{s}_1 = (3, 1, 4)$, a vektor smjera pravca p_2 je $\vec{s}_2 = (4, 1, 4)$. Kako vektori $\vec{s}_1$ i $\vec{s}_2$ nemaju proporcionalne koordinate, slijedi da $p_1 \nparallel p_2$.

Točka $T_1(2, -4, 5)$ je istaknuta točka na pravcu p_1, a $T_2(-1, -2, 1)$ je istaknuta točka na pravcu p_2. Iz toga dobivamo

$$\begin{aligned} T_1(2, -4, 5) &\Rightarrow x_1 = 2,\ y_1 = -4,\ z_1 = 5 \\ T_2(-1, -2, 1) &\Rightarrow x_2 = -1,\ y_2 = -2,\ z_2 = 1 \end{aligned}$$

Nadalje, iz vektora smjerova dobivamo

$$\begin{aligned} \vec{s}_1 = (3, 1, 4) &\Rightarrow \alpha_1 = 3,\ \beta_1 = 1,\ \gamma_1 = 4 \\ \vec{s}_2 = (4, 1, 4) &\Rightarrow \alpha_2 = 4,\ \beta_2 = 1,\ \gamma_2 = 4 \end{aligned}$$

Uvrstimo li ove podatke u uvjet za komplanarnost pravaca p_1 i p_2, slijedi

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 - (-1) & -4 - (-2) & 5 - 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -12 \qquad (\clubsuit)$$

pa zaključujemo da su p_1 i p_2 mimosmjerni pravci. Udaljenost mimosmjernih pravaca računa se po formuli

$$d(p_1, p_2) = \frac{\left|(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, \vec{s}_1, \vec{s}_2)\right|}{|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2|},$$

pri čemu je $\vec{r}_1$ radijvektor točke T_1, a $\vec{r}_2$ radijvektor točke T_2. Uočite da smo već u ($\clubsuit$) izračunali mješoviti produkt vektora $\vec{r}_1 - \vec{r}_2, \vec{s}_1, \vec{s}_2$, tj. $(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, \vec{s}_1, \vec{s}_2) = -12$. Nadalje,

$$\vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (0, 4, -1)$$

pa je konačno

$$d(p_1, p_2) = \frac{|-12|}{|(0, 4, -1)|} = \frac{12}{\sqrt{0^2 + 4^2 + (-1)^2}} = \frac{12}{\sqrt{17}}.$$

Zadatak 29.
Nađite zajedničku normalu mimosmjernih pravaca $p_1 \dots \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$ i $p_2 \dots \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$.

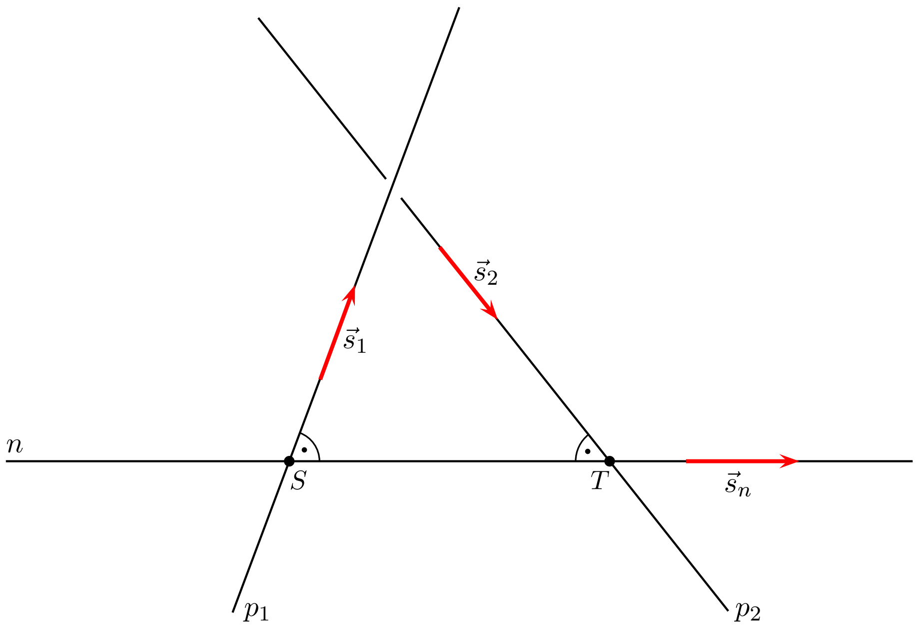
Rješenje.
Zajednička normala dva mimosmjerna pravca je pravac koji siječe oba pravca pod pravim kutom. Mimosmjerni pravci imaju jedinstvenu zajedničku normalu. Zadatak ćemo riješiti na dva različita načina.

- *1. način*

Pretvorimo najprije jednadžbe oba pravca u parametarski oblik.

$$p_1 \ldots \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \qquad p_2 \ldots \begin{cases} x = 1 + u \\ y = 2u \\ z = u \end{cases} \tag{$\star$}$$

Neka je n zajednička normala mimosmjernih pravaca p_1 i p_2 koja siječe redom zadane pravce pod pravim kutom u točkama S i T.



Kako je $n \perp p_1$ i $n \perp p_2$, slijedi $\vec{s}_n \perp \vec{s}_1$ i $\vec{s}_n \perp \vec{s}_2$. Stoga za vektor smjera pravca n možemo uzeti $\vec{s}_n = \vec{s}_1 \times \vec{s}_2$. Kako je $\vec{s}_1 = (1,1,2)$ i $\vec{s}_2 = (1,2,1)$, dobivamo

$$\vec{s}_n = \vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-3,1,1).$$

Sada imamo vektor smjera pravca n, a da bismo mogli napisati njegovu jednadžbu, treba nam još jedna njegova točka kojom on prolazi. Ideja je da pronađemo jednu od točaka S ili T.

Točka S se nalazi na pravcu p_1 pa iz $(\star)$ slijedi da mora biti oblika $S(t,t,1+2t)$ za neki $t \in \mathbb{R}$. Točka T se nalazi na pravcu p_2 pa iz $(\star)$ slijedi da mora biti oblika $T(1+u,2u,u)$ za neki $u \in \mathbb{R}$.

Kako bismo pronašli točke S i T, vektor $\overrightarrow{ST}$ ćemo izraziti na dva različita načina u standardnoj ortonormiranoj bazi. Prvi način je preko klasične formule. Usput se sjetimo da se koordinate radijvektora neke točke podudaraju s koordinatama te točke.

$$\overrightarrow{ST} = \vec{r}_T - \vec{r}_S = (1+u,2u,u) - (t,t,1+2t) = (1+u-t,2u-t,u-2t-1)$$

Drugi način je da uočimo da su vektori $\overrightarrow{ST}$ i $\vec{s}_n$ kolinearni (vidi sliku) pa je $\overrightarrow{ST} = \lambda\vec{s}_n$ za neki $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\overrightarrow{ST} = \lambda\vec{s}_n = \lambda \cdot (-3,1,1) = (-3\lambda,\lambda,\lambda)$$

Dobivene jednakosti $\overrightarrow{ST} = (1+u-t, 2u-t, u-2t-1)$ i $\overrightarrow{ST} = (-3\lambda, \lambda, \lambda)$ predstavljaju dva različita prikaza vektora $\overrightarrow{ST}$ u standardnoj ortonormiranoj bazi. Međutim, kako je prikaz svakog vektora u bilo kojoj bazi jedinstven, mora biti

$$(1 + u - t, 2u - t, u - 2t - 1) = (-3\lambda, \lambda, \lambda)$$

iz čega dobivamo sustav linearnih jednadžbi

$$\begin{aligned} 1 + u - t &= -3\lambda \\ 2u - t &= \lambda\,. \\ u - 2t - 1 &= \lambda \end{aligned}$$

Zapišimo taj sustav u standardnom obliku tako da nepoznanice budu na lijevoj strani, a slobodni koeficijenti na desnoj strani.

$$\begin{aligned} u - t + 3\lambda &= -1 \\ 2u - t - \lambda &= 0 \\ u - 2t - \lambda &= 1 \end{aligned} \tag{$\diamondsuit$}$$

Sustav ($\diamondsuit$) riješit ćemo Cramerovim pravilom (naravno, možete ga riješiti i Gaussovim postupkom). Nadalje, nas treća nepoznanica λ uopće ne zanima pa nema potrebe da računamo determinantu D_3 iz Cramerovog pravila. Isto tako, kako nam je dovoljna samo jedna od točaka S i T da bismo napisali jednadžbu pravca n, dovoljno je izračunati samo jednu od nepoznanica t i u. No, mi ćemo ovdje ipak odrediti obje točke S i T. Kako je

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -11, \quad D_1 = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 5, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 6,$$

slijedi

$$u = \frac{D_1}{D} = -\frac{5}{11}, \quad t = \frac{D_2}{D} = -\frac{6}{11}.$$

Sada konačno možemo odrediti točke S i T.

$$\begin{gathered} S(t, t, 1 + 2t) \\ S\big(-\tfrac{6}{11}, -\tfrac{6}{11}, 1 + 2 \cdot \tfrac{-6}{11}\big) \\ S\big(-\tfrac{6}{11}, -\tfrac{6}{11}, -\tfrac{1}{11}\big) \end{gathered} \qquad \begin{gathered} T(1 + u, 2u, u) \\ T\big(1 + \tfrac{-5}{11}, 2 \cdot \tfrac{-5}{11}, \tfrac{-5}{11}\big) \\ T\big(\tfrac{6}{11}, -\tfrac{10}{11}, -\tfrac{5}{11}\big) \end{gathered}$$

Za pravac n sada znamo njegov vektor smjera $\vec{s}_n$ i čak dvije njegove točke S i T. Ako odaberemo točku S za istaknutu točku, kanonski oblik jednadžbe pravca n glasi

$$n \ldots \frac{x + \frac{6}{11}}{-3} = \frac{y + \frac{6}{11}}{1} = \frac{z + \frac{1}{11}}{1}.$$

Napomena. Uočite da je udaljenost mimosmjernih pravaca p_1 i p_2 jednaka duljini dužine $\overline{ST}$, tj. $d(p_1, p_2) = |ST|$. U prethodnom zadatku, zadatak 28., udaljenost mimosmjernih pravaca smo računali prema gotovoj formuli. Međutim, ukoliko znamo nožišta zajedničke normale mimosmjernih pravaca, njihovu udaljenost možemo izračunati tako da odredimo udaljenost tih nožišta. Dakle, u ovom slučaju je

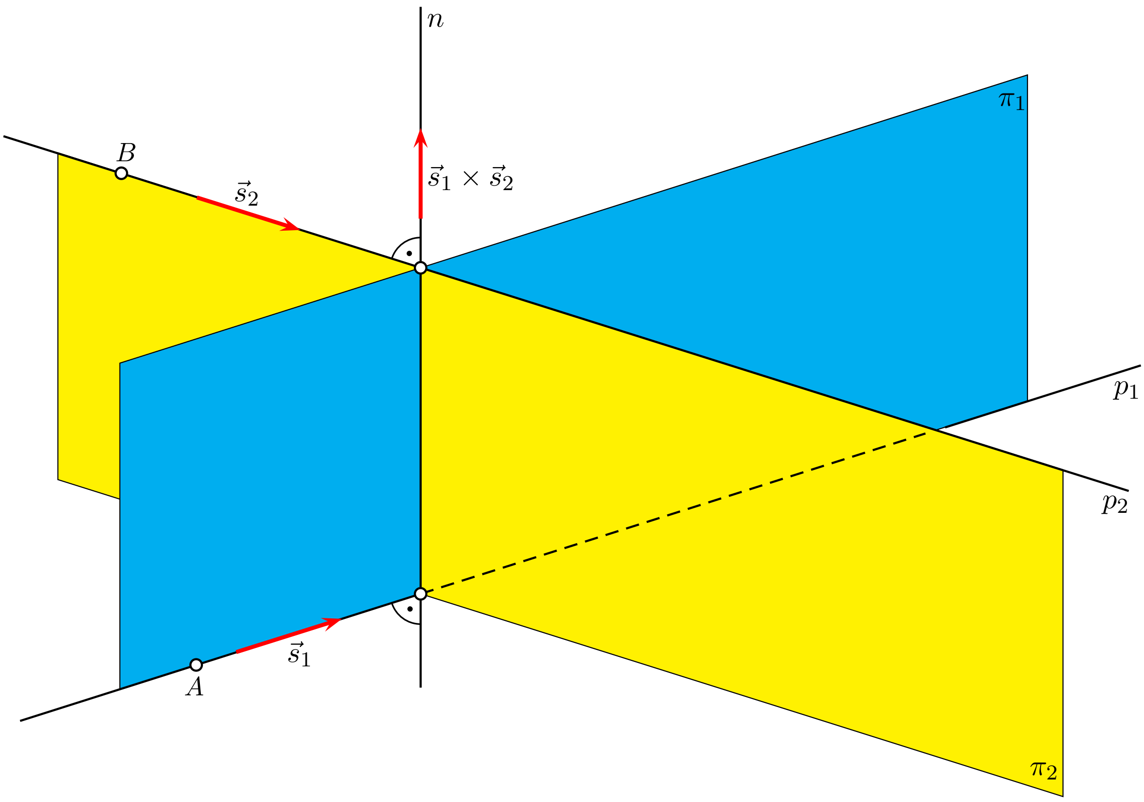
$$
\begin{aligned}
d(p_1,p_2) = |ST| &= \sqrt{(x_S - x_T)^2 + (y_S - y_T)^2 + (z_S - z_T)^2} = \\
&= \sqrt{\left(-\tfrac{6}{11} - \tfrac{6}{11}\right)^2 + \left(-\tfrac{6}{11} - \left(-\tfrac{10}{11}\right)\right)^2 + \left(-\tfrac{1}{11} - \left(-\tfrac{5}{11}\right)\right)^2} = \\
&= \sqrt{\tfrac{144}{121} + \tfrac{16}{121} + \tfrac{16}{121}} = \tfrac{4\sqrt{11}}{11}
\end{aligned}
$$

- *2. način*

Iz jednadžbi pravaca p_1 i p_2 vidimo da je $A(0,0,1)$ jedna točka na pravcu p_1, a $B(1,0,0)$ jedna točka na pravcu p_2. Nadalje, vektor smjera pravca p_1 je $\vec{s}_1 = (1,1,2)$, a vektor smjera pravca p_2 je $\vec{s}_2 = (1,2,1)$. Neka je n zajednička normala mimosmjernih pravaca p_1 i p_2. Kako je $n \perp p_1$ i $n \perp p_2$, slijedi $\vec{s}_n \perp \vec{s}_1$ i $\vec{s}_n \perp \vec{s}_2$. Stoga je $\vec{s}_1 \times \vec{s}_2$ vektor smjera normale n.

Neka je π_1 ravnina koja prolazi točkom A i razapeta je vektorima $\vec{s}_1$ i $\vec{s}_1 \times \vec{s}_2$. To je ravnina koja sadrži pravce p_1 i n. Njezina jednadžba je $\left(\vec{r} - \vec{r}_A, \vec{s}_1, \vec{s}_1 \times \vec{s}_2\right) = 0$. Neka je π_2 ravnina koja prolazi točkom B i razapeta je vektorima $\vec{s}_2$ i $\vec{s}_1 \times \vec{s}_2$. To je ravnina koja sadrži pravce p_2 i n. Njezina jednadžba je $\left(\vec{r} - \vec{r}_B, \vec{s}_2, \vec{s}_1 \times \vec{s}_2\right) = 0$. Tada se zajednička normala n mimosmjernih pravaca p_1 i p_2 dobiva kao presjek ravnina π_1 i π_2 pa je

$$
n \ldots \begin{cases} \left(\vec{r} - \vec{r}_A, \vec{s}_1, \vec{s}_1 \times \vec{s}_2\right) = 0 \\ \left(\vec{r} - \vec{r}_B, \vec{s}_2, \vec{s}_1 \times \vec{s}_2\right) = 0 \end{cases}
$$



Kako je $\vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = (-3, 1, 1)$, slijedi

$$\left(\vec{r} - \vec{r}_A, \vec{s}_1, \vec{s}_1 \times \vec{s}_2\right) = \begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -x - 7y + 4z - 4$$

$$\left(\vec{r} - \vec{r}_B, \vec{s}_2, \vec{s}_1 \times \vec{s}_2\right) = \begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = x - 4y + 7z - 1$$

Konačno je

$$n \ldots \begin{cases} -x - 7y + 4z - 4 = 0 \\ \ \ x - 4y + 7z - 1 = 0 \end{cases}.$$

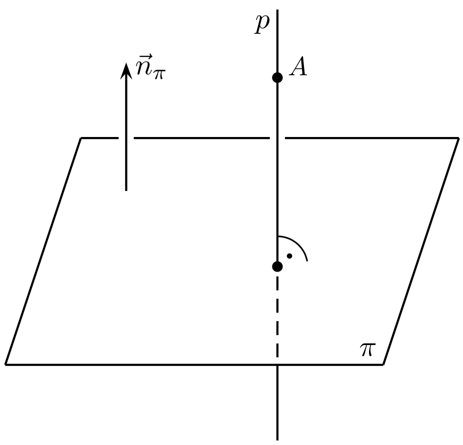
Uočite da smo ovim postupkom zajedničku normalu n dobili kao presjek dvije ravnine, ali nismo dobili njezina nožišta na pravcima p_1 i p_2.

Napomena. Do sada smo riječ *normala* koristili u više različitih konteksta pa ponovimo još jednom sve na ovom mjestu kako ne bi došlo do zabune u zadacima.

- *Normala ravnine* je bilo koji vektor različit od nulvektora koji je okomit na promatranu ravninu.
- *Normala iz zadane točke na zadani pravac* je pravac koji prolazi zadanom točkom i siječe zadani pravac pod pravim kutom.
- *Zajednička normala mimosmjernih pravaca* je pravac koji siječe oba mimosmjerna pravca pod pravim kutom.

Zadatak 30.
Pravac p prolazi točkom $A(3, 2, 1)$ i okomit je na ravninu $x + y - 2z - 6 = 0$. Napišite jednadžbu pravca p.

Rješenje.

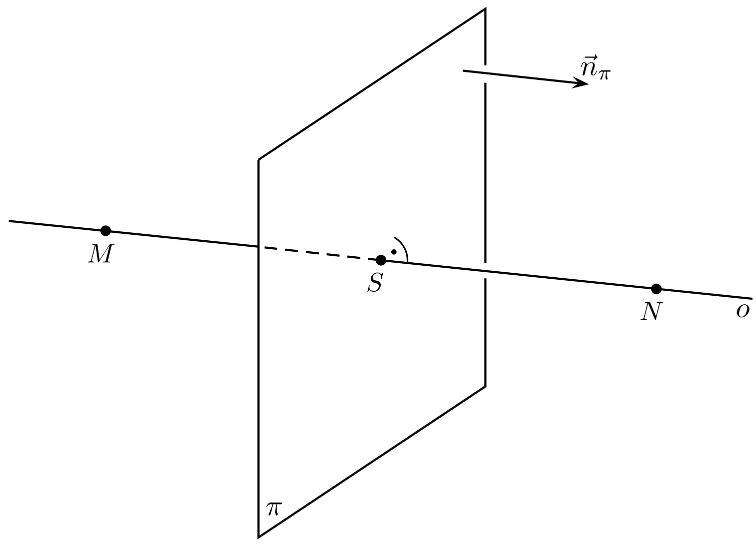


Kako je pravac p okomit na ravninu $\pi \ldots x+y-2z-6=0$, za vektor smjera pravca p možemo uzeti normalu ravnine π. Iz jednadžbe ravnine vidimo da je $\vec{n}_\pi=(1,1,-2)$ pa je $\vec{s}_p=(1,1,-2)$. Stoga kanonski oblik jednadže pravca p glasi

$$p \ldots \frac{x-3}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{-2}.$$

Zadatak 31.
Zadana je ravnina $\pi \ldots 2x+y-z-13=0$ i točka $M(1,2,3)$. Odredite ortogonalnu projekciju točke M na ravninu π i simetričnu točku točke M s obzirom na ravninu π.

Rješenje.
Neka je o pravac kroz točku M koji je okomit na ravninu π. Presjek pravca o i ravnine π je točka S koju zovemo ortogonalna projekcija točke M na ravninu π.



Kako je pravac o okomit na ravninu π, za vektor smjera pravca o možemo uzeti normalu ravnine π. Iz jednadžbe ravnine π dobivamo $\vec{n}_\pi=(2,1,-1)$. Pravac o je pravac kroz točku $M(1,2,3)$ s vektorom smjera $\vec{s}_o=(2,1,-1)$ pa su njegove parametarske jednadžbe dane s

$$o \ldots \begin{cases} x=1+2t \\ y=2+t \\ z=3-t \end{cases}.$$

Točku S dobivamo kao presjek ravnine π i pravca o tako da parametarske jednadžbe pravca o uvrstimo u jednadžbu ravnine π.

$$\begin{gathered} 2x+y-z-13=0 \\ 2(1+2t)+(2+t)-(3-t)-13=0 \\ 6t=12 \\ t=2 \end{gathered}$$

Sada $t = 2$ uvrstimo u parametarske jednadžbe pravca o pa dobivamo koordinate točke S.

$$\begin{aligned} x_S &= 1 + 2t = 1 + 2 \cdot 2 = 5 \\ y_S &= 2 + t = 2 + 2 = 4 \\ z_S &= 3 - t = 3 - 2 = 1 \end{aligned}$$

Dakle, ortogonalna projekcija točke $M(1,2,3)$ na ravninu π je točka $S(5,4,1)$.

Simetrična točka točke M s obzirom na ravninu π je točka N koja se nalazi na pravcu o i za koju vrijedi $|MS| = |NS|$ (pogledaj gornju sliku). Iz toga zaključujemo da mora vrijediti $\overrightarrow{MS} = \overrightarrow{SN}$. Ako stavimo $N(x_N, y_N, z_N)$, slijedi

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MS} &= \overrightarrow{SN} \\ \vec{r}_S - \vec{r}_M &= \vec{r}_N - \vec{r}_S \\ (5,4,1) - (1,2,3) &= \big(x_N, y_N, z_N\big) - (5,4,1) \\ (4,2,-2) &= \big(x_N - 5, y_N - 4, z_N - 1\big) \end{aligned}$$

iz čega dobivamo sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} x_N - 5 &= 4 \\ y_N - 4 &= 2. \\ z_N - 1 &= -2 \end{aligned}$$

Iz dobivenih jednadžbi lagano slijedi $x_N = 9$, $y_N = 6$, $z_N = -1$. Dakle, simetrična točka točke $M(1,2,3)$ s obzirom na ravninu π je točka $N(9,6,-1)$.

Zadatak 32.

Zadan je pravac $p \ldots \frac{x-5}{4} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-1}{1}$ i točka $T(4,4,3)$. Odredite ortogonalnu projekciju točke T na pravac p i simetričnu točku točke T s obzirom na pravac p.

Rješenje.

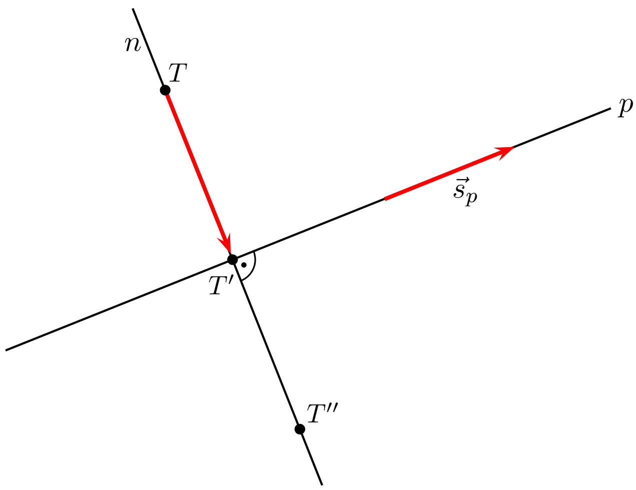
Neka je n normala iz točke T na pravac p. Presjek normale n i pravca p je točka T' koju zovemo ortogonalna projekcija točke T na pravac p. Parametarske jednadžbe pravca p su

$$p \ldots \begin{cases} x = 5 + 4t \\ y = -2 - 2t\,. \\ z = 1 + t \end{cases}$$

Kako točka T' leži na pravcu p, njezine koordinate moraju biti oblika $T'(5+4t, -2-2t, 1+t)$ za neki $t \in \mathbb{R}$. Nadalje, vektori $\overrightarrow{TT'}$ i $\vec{s}_p$ su okomiti (vidi donju sliku) pa je njihov skalarni produkt jednak nula. Odredimo najprije vektor $\overrightarrow{TT'}$.

$$\overrightarrow{TT'} = \vec{r}_{T'} - \vec{r}_T = (5+4t, -2-2t, 1+t) - (4,4,3) = (1+4t, -6-2t, -2+t)$$

Kako je $\vec{s}_p = (4,-2,1)$, iz $\overrightarrow{TT'} \cdot \vec{s}_p = 0$ dobivamo



$$\overrightarrow{TT'} \cdot \vec{s}_p = 0$$
$$(1+4t, -6-2t, -2+t) \cdot (4, -2, 1) = 0$$
$$(1+4t) \cdot 4 + (-6-2t) \cdot (-2) + (-2+t) \cdot 1 = 0$$
$$21t + 14 = 0$$
$$t = -\tfrac{2}{3}$$

Uvrštavanjem $t = -\frac{2}{3}$ u parametarske jednadžbe pravca p dobivamo koordinate točke T'.

$$\begin{aligned} x_{T'} &= 5 + 4t = 5 + 4 \cdot \tfrac{-2}{3} = \tfrac{7}{3} \\ y_{T'} &= -2 - 2t = -2 - 2 \cdot \tfrac{-2}{3} = -\tfrac{2}{3} \\ z_{T'} &= 1 + t = 1 + \tfrac{-2}{3} = \tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

Dakle, ortogonalna projekcija točke $T(4, 4, 3)$ na pravac p je točka $T'\big(\frac{7}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\big)$.

Simetrična točka točke T s obzirom na pravac p je točka T'' koja se nalazi na normali n i za koju vrijedi $|TT'| = |T'T''|$ (pogledaj gornju sliku). Iz toga zaključujemo da mora vrijediti $\overrightarrow{TT'} = \overrightarrow{T'T''}$. Umjesto jednakosti $\overrightarrow{TT'} = \overrightarrow{T'T''}$ možemo uzeti jednakost $\overrightarrow{TT''} = 2\,\overrightarrow{TT'}$ (uočite da su to ekvivalentne jednakosti). U jednakosti $\overrightarrow{TT''} = 2\,\overrightarrow{TT'}$ točka T' se javlja samo jedanput, a to nam je u ovom slučaju zgodnije jer koordinate točke T' nisu cjelobrojne pa nam je "teže" s njima računati. No, nije nikakva greška ukoliko ostanete raditi s jednakosti $\overrightarrow{TT'} = \overrightarrow{T'T''}$. Ako stavimo $T''(x'', y'', z'')$, slijedi

$$\overrightarrow{TT''} = 2\,\overrightarrow{TT'}$$
$$\vec{r}_{T''} - \vec{r}_T = 2\big(\vec{r}_{T'} - \vec{r}_T\big)$$
$$(x'', y'', z'') - (4, 4, 3) = 2\Big(\big(\tfrac{7}{3}, -\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}\big) - (4, 4, 3)\Big)$$
$$(x''-4, y''-4, z''-3) = 2\big(-\tfrac{5}{3}, -\tfrac{14}{3}, -\tfrac{8}{3}\big)$$
$$(x''-4, y''-4, z''-3) = \big(-\tfrac{10}{3}, -\tfrac{28}{3}, -\tfrac{16}{3}\big)$$

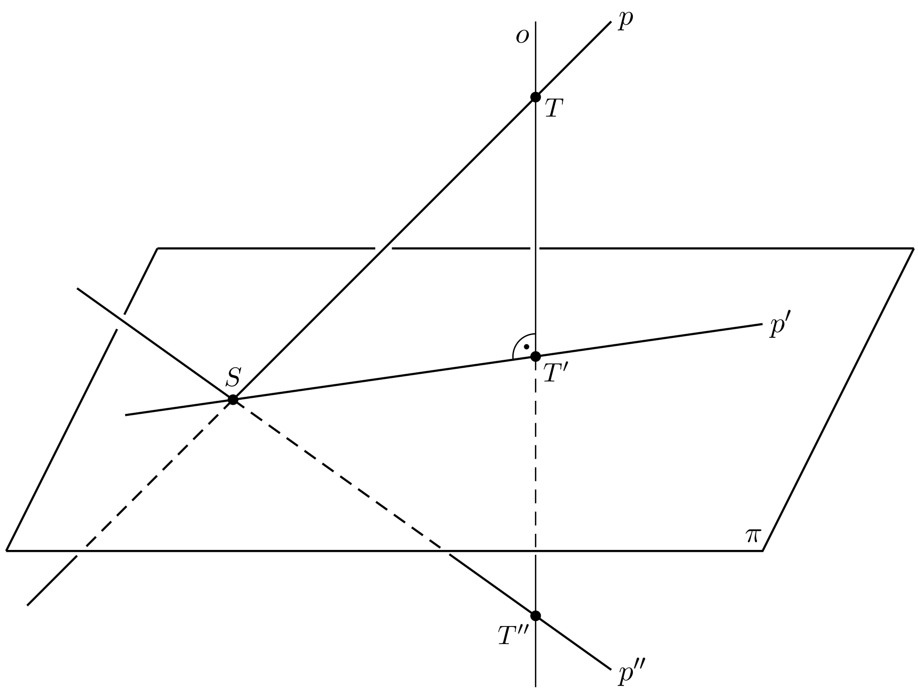
iz čega dobivamo sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} x'' - 4 &= -\tfrac{10}{3} \\ y'' - 4 &= -\tfrac{28}{3}\,. \\ z'' - 3 &= -\tfrac{16}{3} \end{aligned}$$

Iz dobivenih jednadžbi lagano slijedi $x'' = \frac{2}{3}$, $y'' = -\frac{16}{3}$, $z'' = -\frac{7}{3}$. Dakle, simetrična točka točke $T(4,4,3)$ s obzirom na pravac p je točka $T''\left(\frac{2}{3}, -\frac{16}{3}, -\frac{7}{3}\right)$.

Zadatak 33.
Zadana je ravnina $\pi \ldots x + 2y - 2z - 5 = 0$ i pravac $p \ldots \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}$. Odredite ortogonalnu projekciju pravca p na ravninu π i simetrični pravac pravca p s obzirom na ravninu π.

Rješenje.
Vektor smjera pravca p je $\vec{s}_p = (2,1,-1)$, a normala ravnine π je $\vec{n}_\pi = (1,2,-2)$. Kako je $\vec{s}_p \cdot \vec{n}_\pi \neq 0$, pravac p nije paralelan s ravninom π. Neka je točka S presjek pravca p i ravnine π.



Uvrštavanjem parametarskih jednadžbi pravca p

$$p \ldots \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = t \\ z = -t \end{cases}$$

u jednadžbu ravnine π dobivamo

$$x + 2y - 2z - 5 = 0$$
$$(-1 + 2t) + 2t - 2 \cdot (-t) - 5 = 0$$
$$6t = 6$$
$$t = 1$$

Uvrstimo li $t = 1$ u parametarske jednadžbe pravca p, dobivamo koordinate točke S.

$$x_S = -1 + 2 \cdot 1 = 1, \quad y_S = 1, \quad z_S = -1$$

Dakle, pravac p i ravnina π sijeku se u točki $S(1,1,-1)$. Neka je dalje T bilo koja točka na pravcu p različita od točke S. Možemo uzeti, npr. istaknutu točku u jednadžbi pravca p, tj. točku koju dobijemo za $t=0$ iz parametarskih jednadžbi pravca p. To je točka $T(-1,0,0)$ i očito je ta točka različita od točke S. Naravno, mogli smo u parametarske jednadžbe pravca p uvrstiti bilo koji drugi realni broj za parametar t kako bismo dobili neku točku T na pravcu p (važno je samo da je točka T s pravca p različita od točke S).

Neka je T' ortogonalna projekcija točke T na ravninu π, a T'' simetrična točka točke T s obzirom na ravninu π. Tada je ortogonalna projekcija pravca p na ravninu π pravac p' koji prolazi točkama S i T' (vidi sliku), a simetrični pravac pravca p s obzirom na ravninu π je pravac p'' koji prolazi točkama S i T'' (vidi sliku).

Neka je o pravac kroz točku T koji je okomit na ravninu π. Točka T' je tada presjek pravca o i ravnine π. Kako je pravac o okomit na ravninu π, za vektor smjera pravca o možemo uzeti normalu ravnine π pa je $\vec{s}_o=(1,2,-2)$. Stoga su parametarske jednadžbe pravca o

$$o\ldots\begin{cases} x=-1+t\\ y=2t\\ z=-2t\end{cases}$$

Uvrštavanjem parametarskih jednadžbi pravca o u jednadžbu ravnine π dobivamo

$$\begin{gathered} x+2y-2z-5=0\\ (-1+t)+2\cdot 2t-2\cdot(-2t)-5=0\\ 9t=6\\ t=\tfrac{2}{3}\end{gathered}$$

Sada $t=\frac{2}{3}$ uvrstimo u parametarske jednadžbe pravca o i dobivamo koordinate točke T'.

$$x_{T'}=-1+\tfrac{2}{3}=-\tfrac{1}{3},\quad y_{T'}=2\cdot\tfrac{2}{3}=\tfrac{4}{3},\quad z_{T'}=-2\cdot\tfrac{2}{3}=-\tfrac{4}{3}$$

Dakle, ortogonalna projekcija točke $T(-1,0,0)$ na ravninu π je točka $T'\big(-\frac{1}{3},\frac{4}{3},-\frac{4}{3}\big)$.

Za simetričnu točku T'' točke T s obzirom na ravninu π mora vrijediti $\overrightarrow{TT'}=\overrightarrow{T'T''}$. Umjesto te jednakosti uzet ćemo ekvivalentnu jednakost $\overrightarrow{TT''}=2\,\overrightarrow{TT'}$ jer se u njoj točka T' javlja samo jedanput, a to nam je zgodnije u ovom slučaju jer koordinate točke T' nisu cjelobrojne pa nam je "teže" s njima računati. No, nije nikakva greška ukoliko ostanete raditi s jednakosti $\overrightarrow{TT'}=\overrightarrow{T'T''}$. Ako stavimo $T''(x'',y'',z'')$, slijedi

$$\begin{gathered} \overrightarrow{TT''}=2\,\overrightarrow{TT'}\\ \vec{r}_{T''}-\vec{r}_T=2\big(\vec{r}_{T'}-\vec{r}_T\big)\\ (x'',y'',z'')-(-1,0,0)=2\Big(\big(-\tfrac{1}{3},\tfrac{4}{3},-\tfrac{4}{3}\big)-(-1,0,0)\Big)\\ (x''+1,y'',z'')=2\big(\tfrac{2}{3},\tfrac{4}{3},-\tfrac{4}{3}\big)\\ (x''+1,y'',z'')=\big(\tfrac{4}{3},\tfrac{8}{3},-\tfrac{8}{3}\big)\end{gathered}$$

iz čega dobivamo $x''=\frac{1}{3}$, $y''=\frac{8}{3}$, $z''=-\frac{8}{3}$. Stoga je $T''\big(\frac{1}{3},\frac{8}{3},-\frac{8}{3}\big)$.

Sada konačno možemo pronaći jednadžbe pravaca p' i p''. Najprije,

$$\overrightarrow{ST'} = \vec{r}_{T'} - \vec{r}_S = \left(-\tfrac{1}{3}, \tfrac{4}{3}, -\tfrac{4}{3}\right) - (1,1,-1) = \left(-\tfrac{4}{3}, \tfrac{1}{3}, -\tfrac{1}{3}\right)$$
$$\overrightarrow{ST''} = \vec{r}_{T''} - \vec{r}_S = \left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{8}{3}, -\tfrac{8}{3}\right) - (1,1,-1) = \left(-\tfrac{2}{3}, \tfrac{5}{3}, -\tfrac{5}{3}\right)$$

Za vektore smjerova pravaca p' i p'' možemo uzeti vektore

$$\vec{s}_{p'} = -3\,\overrightarrow{ST'} = -3\left(-\tfrac{4}{3}, \tfrac{1}{3}, -\tfrac{1}{3}\right) = (4,-1,1)$$
$$\vec{s}_{p''} = -3\,\overrightarrow{ST''} = -3\left(-\tfrac{2}{3}, \tfrac{5}{3}, -\tfrac{5}{3}\right) = (2,-5,5)$$

Pravac p' prolazi točkom $S(1,1,-1)$ i ima vektor smjera $\vec{s}_{p'} = (4,-1,1)$ pa njegova kanonska jednadžba glasi

$$p' \ldots \frac{x-1}{4} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{1}.$$

Pravac p'' prolazi točkom $S(1,1,-1)$ i ima vektor smjera $\vec{s}_{p''} = (2,-5,5)$ pa njegova kanonska jednadžba glasi

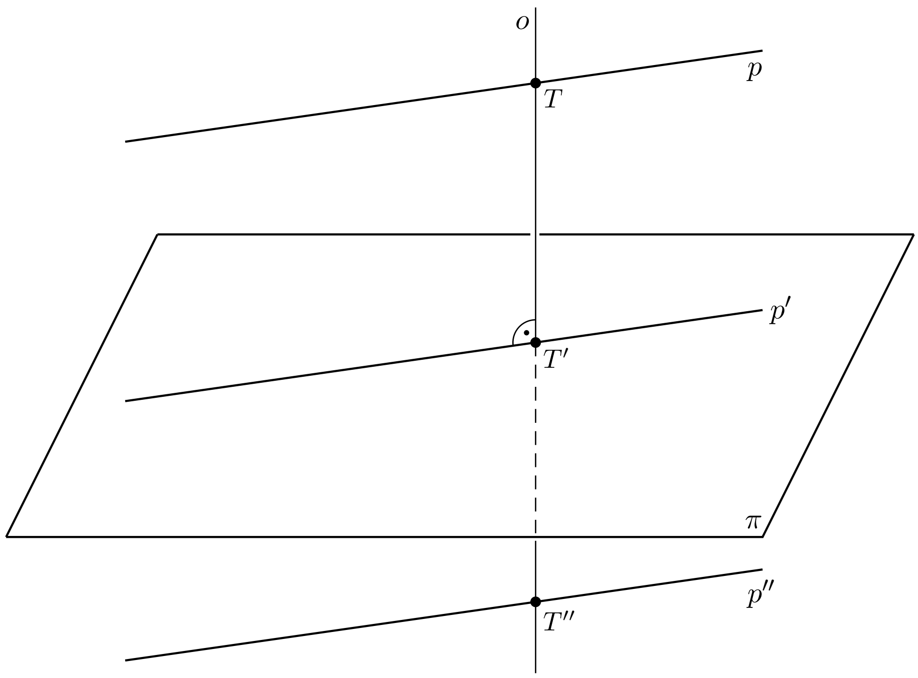
$$p'' \ldots \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-5} = \frac{z+1}{5}.$$

Zadatak 34.

Zadana je ravnina $\pi \ldots x + 2y - 2z - 5 = 0$ i pravac $p \ldots \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2}$. Odredite ortogonalnu projekciju pravca p na ravninu π i simetrični pravac pravca p s obzirom na ravninu π.

Rješenje.

Vektor smjera pravca p je $\vec{s}_p = (2,1,2)$, a normala ravnine π je $\vec{n}_\pi = (1,2,-2)$. Kako je $\vec{s}_p \cdot \vec{n}_\pi = 0$, pravac p je paralelan s ravninom π. Stoga nema smisla tražiti presjek pravca p i ravnine π jer on ne postoji. Međutim, u ovom slučaju su ortogonalna projekcija p' i simetrični pravac p'' paralelni s pravcem p pa možemo uzeti $\vec{s}_{p'} = \vec{s}_{p''} = \vec{s}_p = (2,1,2)$.



Preostaje nam još odabrati neku točku T na pravcu p i pronaći njezinu ortogonalnu projekciju T' i simetričnu točku T'' s obzirom na ravninu π. Najlakše nam je odabrati istaknutu točku u jednadžbi pravca p, a to je točka $T(-1, 0, 2)$.

Neka je o pravac kroz točku T koji je okomit na ravninu π. Točka T' je tada presjek pravca o i ravnine π. Kako je pravac o okomit na ravninu π, za vektor smjera pravca o možemo uzeti normalu ravnine π pa je $\vec{s}_o = (1, 2, -2)$. Stoga su parametarske jednadžbe pravca o

$$o \ldots \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2t \\ z = 2 - 2t \end{cases}$$

Uvrštavanjem parametarskih jednadžbi pravca o u jednadžbu ravnine π dobivamo

$$\begin{gathered} x + 2y - 2z - 5 = 0 \\ (-1 + t) + 2 \cdot 2t - 2 \cdot (2 - 2t) - 5 = 0 \\ 9t = 10 \\ t = \tfrac{10}{9} \end{gathered}$$

Sada $t = \frac{10}{9}$ uvrstimo u parametarske jednadžbe pravca o i dobivamo koordinate točke T'.

$$\begin{aligned} x_{T'} &= -1 + \tfrac{10}{9} = \tfrac{1}{9} \\ y_{T'} &= 2 \cdot \tfrac{10}{9} = \tfrac{20}{9} \\ z_{T'} &= 2 - 2 \cdot \tfrac{10}{9} = -\tfrac{2}{9} \end{aligned}$$

Dakle, ortogonalna projekcija točke $T(-1, 0, 2)$ na ravninu π je točka $T'\big(\frac{1}{9}, \frac{20}{9}, -\frac{2}{9}\big)$.

Za simetričnu točku T'' točke T s obzirom na ravninu π mora vrijediti $\overrightarrow{TT'} = \overrightarrow{T'T''}$. Umjesto te jednakosti uzet ćemo ekvivalentnu jednakost $\overrightarrow{TT''} = 2\,\overrightarrow{TT'}$ jer se u njoj točka T' javlja samo jedanput, a to nam je zgodnije u ovom slučaju jer koordinate točke T' nisu cjelobrojne pa nam je "teže" s njima računati. No, nije nikakva greška ukoliko ostanete raditi s jednakosti $\overrightarrow{TT'} = \overrightarrow{T'T''}$. Ako stavimo $T''(x'', y'', z'')$, slijedi

$$\begin{gathered} \overrightarrow{TT''} = 2\,\overrightarrow{TT'} \\ \vec{r}_{T''} - \vec{r}_T = 2\big(\vec{r}_{T'} - \vec{r}_T\big) \\ (x'', y'', z'') - (-1, 0, 2) = 2\Big(\big(\tfrac{1}{9}, \tfrac{20}{9}, -\tfrac{2}{9}\big) - (-1, 0, 2)\Big) \\ (x'' + 1, y'', z'' - 2) = 2\big(\tfrac{10}{9}, \tfrac{20}{9}, -\tfrac{20}{9}\big) \\ (x'' + 1, y'', z'' - 2) = \big(\tfrac{20}{9}, \tfrac{40}{9}, -\tfrac{40}{9}\big) \end{gathered}$$

iz čega dobivamo $x'' = \frac{11}{9}$, $y'' = \frac{40}{9}$, $z'' = -\frac{22}{9}$. Stoga je $T''\big(\frac{11}{9}, \frac{40}{9}, -\frac{22}{9}\big)$.

Pravac p' prolazi točkom $T'\big(\frac{1}{9}, \frac{20}{9}, -\frac{2}{9}\big)$ i ima vektor smjera $\vec{s}_{p'} = (2, 1, 2)$ pa njegova kanonska jednadžba glasi

$$p' \ldots \frac{x - \frac{1}{9}}{2} = \frac{y - \frac{20}{9}}{1} = \frac{z + \frac{2}{9}}{2}.$$

Pravac p'' prolazi točkom $T''\left(\frac{11}{9}, \frac{40}{9}, -\frac{22}{9}\right)$ i ima vektor smjera $\vec{s}_{p''} = (2,1,2)$ pa njegova kanonska jednadžba glasi

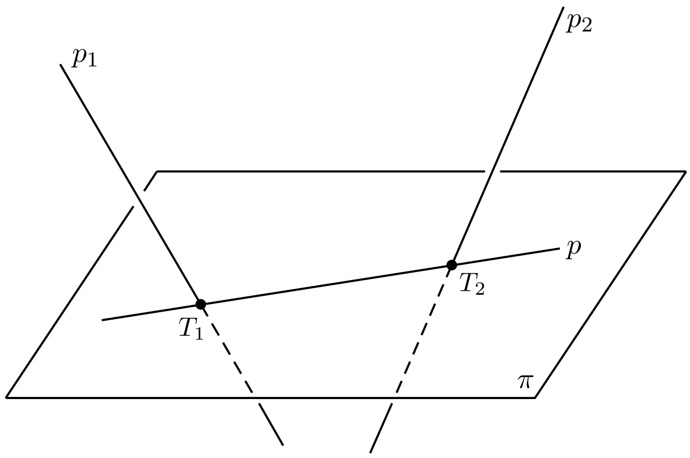
$$p'' \ldots \frac{x - \frac{11}{9}}{2} = \frac{y - \frac{40}{9}}{1} = \frac{z + \frac{22}{9}}{2}.$$

Zadatak 35.

Napišite jednadžbu pravca koji prolazi sjecištima ravnine $\pi \ldots x - 2y + 4z + 12 = 0$ s pravcima $p_1 \ldots \frac{x}{2} = \frac{y}{5} = \frac{z-1}{4}$ i $p_2 \ldots \frac{x+3}{-1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{6}$.

Rješenje.

Neka je p traženi pravac. Neka je točka T_1 presjek pravca p_1 i ravnine π, a točka T_2 presjek pravca p_2 i ravnine π. Traženi pravac p mora prolaziti točkama T_1 i T_2.



Ako parametarske jednadžbe pravca p_1

$$p_1 \ldots \begin{cases} x = 2t \\ y = 5t \\ z = 1 + 4t \end{cases}$$

uvrstimo u jednadžbu ravnine π, dobivamo

$$\begin{gathered} x - 2y + 4z + 12 = 0 \\ 2t - 2 \cdot 5t + 4(1 + 4t) + 12 = 0 \\ 8t = -16 \\ t = -2 \end{gathered}$$

Uvrstimo li $t = -2$ u parametarske jednadžbe pravca p_1, dobivamo koordinate točke T_1.

$$x_{T_1} = 2 \cdot (-2) = -4, \quad y_{T_1} = 5 \cdot (-2) = -10, \quad z_{T_1} = 1 + 4 \cdot (-2) = -7$$

Dakle, presjek pravca p_1 i ravnine π je točka $T_1(-4, -10, -7)$.

Nadalje, ako parametarske jednadžbe pravca p_2

$$p_2 \ldots \begin{cases} x = -3 - t \\ y = -2 + 3t \\ z = 6t \end{cases}$$

uvrstimo u jednadžbu ravnine π, dobivamo

$$\begin{aligned} x - 2y + 4z + 12 &= 0 \\ (-3-t) - 2(-2+3t) + 4 \cdot 6t + 12 &= 0 \\ 17t &= -13 \\ t &= -\tfrac{13}{17} \end{aligned}$$

Uvrstimo li $t = -\frac{13}{17}$ u parametarske jednadžbe pravca p_2, dobivamo koordinate točke T_2.

$$x_{T_2} = -3 - \tfrac{-13}{17} = -\tfrac{38}{17}, \quad y_{T_2} = -2 + 3 \cdot \tfrac{-13}{17} = -\tfrac{73}{17}, \quad z_{T_2} = 6 \cdot \tfrac{-13}{17} = -\tfrac{78}{17}$$

Dakle, presjek pravca p_2 i ravnine π je točka $T_2\left(-\frac{38}{17}, -\frac{73}{17}, -\frac{78}{17}\right)$. Odredimo još vektor $\overrightarrow{T_1T_2}$.

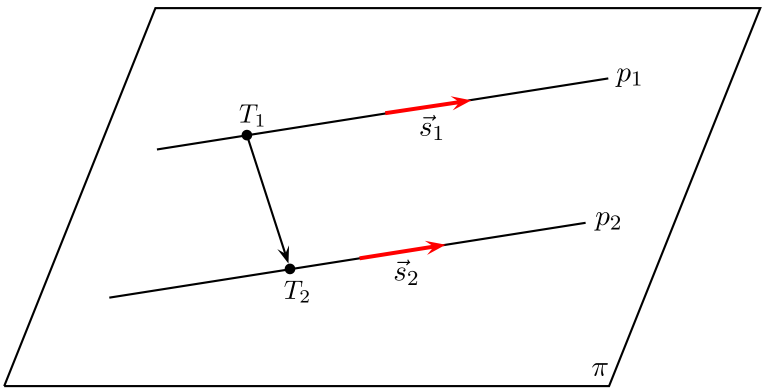
$$\overrightarrow{T_1T_2} = \vec{r}_{T_2} - \vec{r}_{T_1} = \left(-\tfrac{38}{17}, -\tfrac{73}{17}, -\tfrac{78}{17}\right) - (-4, -10, -7) = \left(\tfrac{30}{17}, \tfrac{97}{17}, \tfrac{41}{17}\right)$$

Za vektor smjera pravca p možemo uzeti vektor $\vec{s}_p = 17\,\overrightarrow{T_1T_2} = (30, 97, 41)$. Konačno, o pravcu p možemo razmišljati kao o pravcu koji prolazi točkom $T_1(-4, -10, -7)$ (mogli smo umjesto točke T_1 uzeti točku T_2) i ima vektor smjera $\vec{s}_p = (30, 97, 41)$ pa njegov kanonski oblik glasi

$$p \ldots \frac{x+4}{30} = \frac{y+10}{97} = \frac{z+7}{41}.$$

Zadatak 36.
Napišite jednadžbu ravnine koja sadrži pravce $p_1 \ldots \frac{x-1}{1} = \frac{y+7}{3} = \frac{z-2}{4}$ i $p_2 \ldots \frac{x}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+5}{4}$.

Rješenje.
Vektor smjera pravca p_1 je $\vec{s}_1 = (1, 3, 4)$, a vektor smjera pravca p_2 je vektor $\vec{s}_2 = (1, 3, 4)$. Uočavamo da su vektori $\vec{s}_1$ i $\vec{s}_2$ kolinearni (u ovom slučaju čak i jednaki) pa su p_1 i p_2 paralelni pravci. Dakle, moramo pronaći jednadžbu ravnine π koja sadrži paralelne pravce p_1 i p_2.



Vektori $\vec{s}_1$ i $\vec{s}_2$ u ovom slučaju ne razapinju ravninu π jer su kolinearni. Neka je T_1 bilo koja točka na pravcu p_1, a T_2 bilo koja točka na pravcu p_2. Najlakše nam je da odaberemo one točke koje su istaknute u jednadžbama pravaca p_1 i p_2. To su točke $T_1(1, -7, 2)$ i $T_2(0, 2, -5)$. Te točke također leže i u ravnini π zbog toga što ravnina π mora sadržavati oba pravca p_1 i p_2, a onda sadrži i sve točke tih pravaca. Vektori $\vec{s}_1$ i $\overrightarrow{T_1T_2}$ nisu kolinearni pa razapinju ravninu π. Stoga za normalu ravnine π možemo uzeti vektor $\vec{n}_\pi = \vec{s}_1 \times \overrightarrow{T_1T_2}$. Kako je

$$\overrightarrow{T_1T_2} = \vec{r}_{T_2} - \vec{r}_{T_1} = (0,2,-5) - (1,-7,2) = (-1,9,-7),$$

slijedi

$$\vec{n}_\pi = \vec{s}_1 \times \overrightarrow{T_1T_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & 4 \\ -1 & 9 & -7 \end{vmatrix} = (-57,3,12).$$

O ravnini π možemo sada razmišljati kao o ravnini koja prolazi točkom $T_1(1,-7,2)$ (mogli smo odabrati točku T_2 umjesto točke T_1) i ima normalu $\vec{n}_\pi = (-57,3,12)$. Stoga je $x_0 = 1$, $y_0 = -7$, $z_0 = 2$, $A = -57$, $B = 3$ i $C = 12$ pa dobivamo

$$\begin{aligned} A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) &= 0 \\ -57(x-1) + 3(y-(-7)) + 12(z-2) &= 0 \\ -57x + 3y + 12z + 54 &= 0 \,/ : 3 \\ -19x + y + 4z + 18 &= 0 \end{aligned}$$

Tražena ravnina π ima jednadžbu $-19x + y + 4z + 18 = 0$.

Zadatak 37.

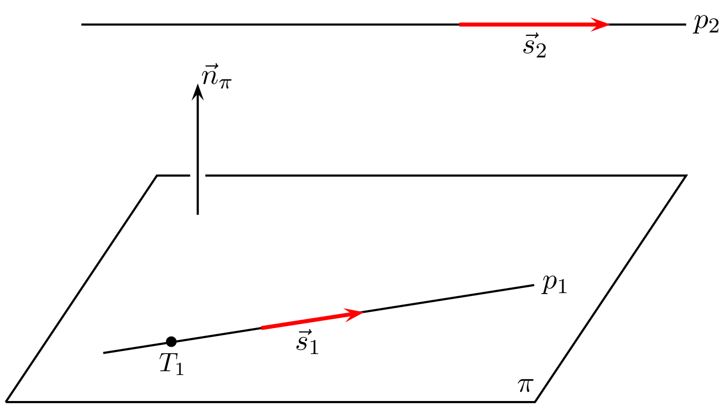
Zadani su pravci $p_1 \ldots \frac{x-2}{11} = \frac{y+3}{9} = (z-4)\cdot 7$ i $p_2 \ldots \frac{x}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{5-z}{1}$. Napišite jednadžbu ravnine koja sadrži prvi pravac, a paralelna je s drugim pravcem.

Rješenje.

Napišimo najprije standardne kanonske jednadžbe pravaca p_1 i p_2.

$$p_1 \ldots \frac{x-2}{11} = \frac{y+3}{9} = \frac{z-4}{\frac{1}{7}}, \qquad p_2 \ldots \frac{x}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-5}{-1}$$

Vektor smjera pravca p_1 je $\vec{s}_1 = \left(11, 9, \frac{1}{7}\right)$, a vektor smjera pravca p_2 je $\vec{s}_2 = (2,1,-1)$.



Neka je π tražena ravnina. Da bismo napisali jednadžbu ravnine π, treba nam jedna točka kojom ona prolazi i njezina normala. Kako ravnina π sadrži pravac p_1, tada ona sadrži sve točke pravca p_1.

Stoga, da bismo dobili neku točku kojom ravnina π prolazi, dovoljno je odabrati bilo koju točku na pravcu p_1. Najlakše nam je odabrati istaknutu točku u jednadžbi pravca p_1. To je točka $T_1(2,-3,4)$.

Nadalje, kako pravac p_1 leži u ravnini π, slijedi da je normala ravnine π okomita na vektor smjera pravca p_1. Isto tako, kako je pravac p_2 paralelan s ravninom π, slijedi da je normala ravnine π okomita na vektor smjera pravca p_2. Konačno, iz $\vec{n}_\pi \perp \vec{s}_1$ i $\vec{n}_\pi \perp \vec{s}_2$ zaključujemo da za normalu ravnine π možemo uzeti vektor $\vec{s}_1 \times \vec{s}_2$.

$$\vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 11 & 9 & \frac{1}{7} \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \left(-\tfrac{64}{7}, \tfrac{79}{7}, -7\right)$$

Kako bismo imali "ljepše" brojeve, možemo za normalu ravnine π uzeti vektor $\vec{n}_\pi = -7\big(\vec{s}_1 \times \vec{s}_2\big)$ pa je $\vec{n}_\pi = (64, -79, 49)$.

Ravnina π prolazi točkom $T_1(2,-3,4)$ i ima normalu $\vec{n}_\pi = (64,-79,49)$ pa imamo

$$\begin{gathered} A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0 \\ 64(x-2) + (-79)\cdot(y-(-3)) + 49(z-4) = 0 \\ 64x - 79y + 49z - 561 = 0 \end{gathered}$$

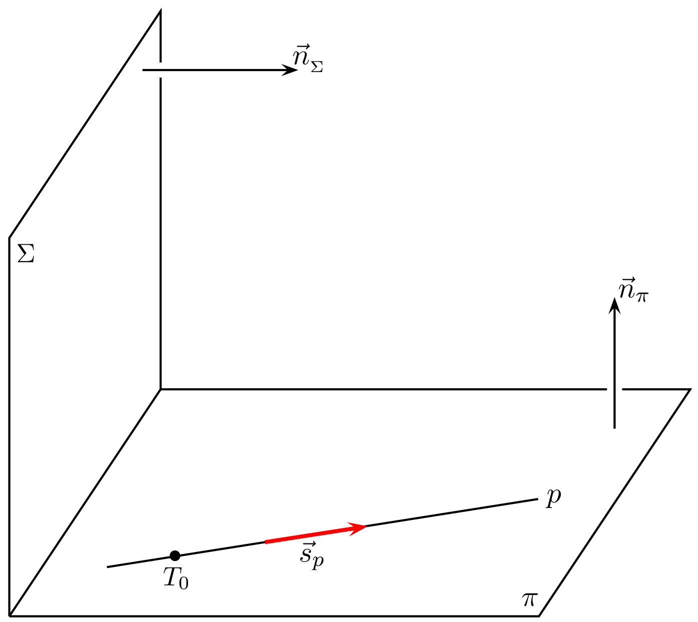
Dakle, ravnina π ima jednadžbu $64x - 79y + 49z - 561 = 0$.

Zadatak 38.

Napišite jednadžbu ravnine koja sadrži pravac $p \ldots \frac{x-3}{-4} = y - 7 = \frac{z+2}{-1}$ i okomita je na ravninu $\Sigma \ldots x - 5y + 2z - 7 = 0$.

Rješenje.

Vektor smjera pravca p je $\vec{s}_p = (-4,1,-1)$, a normala ravnine Σ je $\vec{n}_\Sigma = (1,-5,2)$.



Neka je π tražena ravnina. Da bismo napisali jednadžbu ravnine π, trebamo pronaći njezinu normalu i jednu točku kojom ona prolazi. Kako ravnina π sadrži pravac p, tada ona sadrži sve njegove točke. Specijalno, ravnina π prolazi istaknutom točkom u jednadžbi pravca p, tj. točkom $T_0(3,7,-2)$.

Kako ravnina π sadrži pravac p, slijedi da je normala ravnine π okomita na vektor smjera pravca p. Isto tako, kako su ravnine π i Σ okomite, slijedi da su okomite i njihove normale. Konačno, iz $\vec{n}_\pi \perp \vec{s}_p$ i $\vec{n}_\pi \perp \vec{n}_\Sigma$ zaključujemo da za normalu ravnine π možemo uzeti vektor $\vec{s}_p \times \vec{n}_\Sigma$.

$$\vec{s}_p \times \vec{n}_\Sigma = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 2 \end{vmatrix} = (-3,7,19)$$

Ravnina π prolazi točkom $T_0(3,7,-2)$ i ima normalu $\vec{n}_\Sigma = (-3,7,19)$ pa imamo

$$\begin{aligned} A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0) &= 0 \\ -3(x-3)+7(y-7)+19(z-(-2)) &= 0 \\ -3x+7y+19z-2 &= 0 \end{aligned}$$

Dakle, ravnina π ima jednadžbu $-3x+7y+19z-2=0$.

Zadatak 39.

Nađite pravac paralelan s ravninama $\pi \ldots x+y-z=0$ i $\Sigma \ldots x-y+2z=0$ koji siječe pravce $p_1 \ldots \frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{2}$ i $p_2 \ldots \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{2}$.

Rješenje.

Neka je p traženi pravac. Sjetimo se, pravac i ravnina su paralelni ako i samo ako je vektor smjera pravca okomit na normalu ravnine π. Prema uvjetima zadatka traženi pravac p mora biti paralelan sa zadanim ravninama π i Σ pa zaključujemo

$$\begin{aligned} p \parallel \pi \quad &\Rightarrow \quad \vec{s}_p \perp \vec{n}_\pi \\ p \parallel \Sigma \quad &\Rightarrow \quad \vec{s}_p \perp \vec{n}_\Sigma \end{aligned}$$

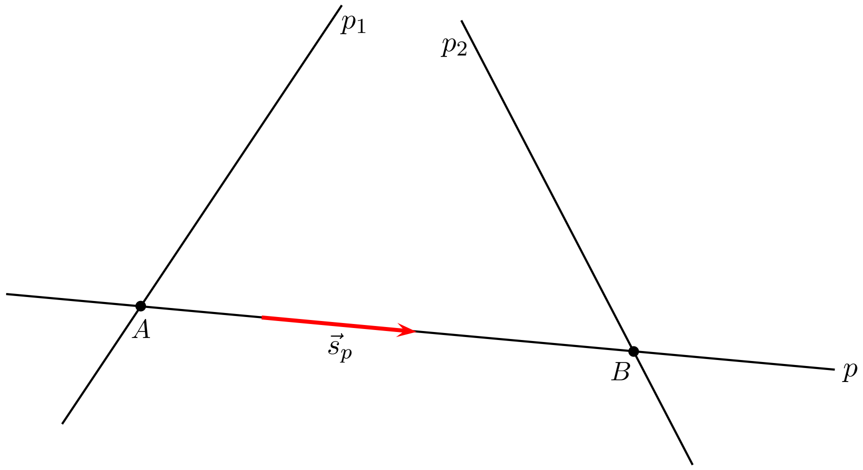
iz čega slijedi da za vektor smjera pravca p možemo uzeti vektor $\vec{s}_p = \vec{n}_\pi \times \vec{n}_\Sigma$. Kako je $\vec{n}_\pi = (1,1,-1)$ i $\vec{n}_\Sigma = (1,-1,2)$, slijedi

$$\vec{s}_p = \vec{n}_\pi \times \vec{n}_\Sigma = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (1,-3,-2).$$

Kako bismo mogli napisati jednadžbu pravca p, treba nam još jedna točka kojom on prolazi. Prema uvjetima zadatka, traženi pravac p mora sječi zadane pravce p_1 i p_2 pa ćemo pronaći jedno od tih sjecišta. Neka je točka A presjek pravaca p i p_1, a točka B presjek pravaca p i p_2. Da bismo pronašli jednu od točaka A i B, prikazat ćemo vektor $\overrightarrow{AB}$ na dva načina u ortonormiranoj bazi. Parametarske jednadžbe pravaca p_1 i p_2 su

$$p_1 \ldots \begin{cases} x = 2u \\ y = u \\ z = 1+2u \end{cases} \qquad p_2 \ldots \begin{cases} x = 1+v \\ y = 2+v \\ z = 1+2v \end{cases}.$$

Kako točka A leži na pravcu p_1, njezine koordinate moraju biti oblika $A(2u, u, 1+2u)$ za neki $u \in \mathbb{R}$. Isto tako, kako točka B leži na pravcu p_2, njezine koordinate moraju biti oblika $B(1+v, 2+v, 1+2v)$ za neki $v \in \mathbb{R}$.



Prikažimo sada vektor $\overrightarrow{AB}$ na dva različita načina. Prvi način je preko klasične formule.

$$\overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = (1+v, 2+v, 1+2v) - (2u, u, 1+2u) = (1+v-2u, 2+v-u, 2v-2u)$$

Drugi način je da uočimo da su vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\vec{s}_p$ kolinearni (vidi sliku) pa je $\overrightarrow{AB} = \lambda\vec{s}_p$ za neki $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\overrightarrow{AB} = \lambda\vec{s}_p = \lambda \cdot (1, -3, -2) = (\lambda, -3\lambda, -2\lambda)$$

Dobivene jednakosti $\overrightarrow{AB} = (1+v-2u, 2+v-u, 2v-2u)$ i $\overrightarrow{AB} = (\lambda, -3\lambda, -2\lambda)$ predstavljaju dva različita prikaza vektora $\overrightarrow{AB}$ u standardnoj ortonormiranoj bazi. Međutim, kako je prikaz svakog vektora u bilo kojoj bazi jedinstven, mora biti

$$(1+v-2u, 2+v-u, 2v-2u) = (\lambda, -3\lambda, -2\lambda)$$

iz čega dobivamo sustav linearnih jednadžbi

$$\begin{aligned} 1+v-2u &= \lambda \\ 2+v-u &= -3\lambda\,. \\ 2v-2u &= -2\lambda \end{aligned}$$

Zapišimo taj sustav u standardnom obliku tako da nepoznanice budu na lijevoj strani, a slobodni koeficijenti na desnoj strani.

$$\begin{aligned} -2u+v-\lambda &= -1 \\ -u+v+3\lambda &= -2 \\ -2u+2v+2\lambda &= 0 \end{aligned} \tag{$\diamondsuit$}$$

Sustav ($\diamondsuit$) riješit ćemo Cramerovim pravilom (naravno, možete ga riješiti i Gaussovim postupkom). Nadalje, nas treća nepoznanica λ uopće ne zanima pa nema potrebe da računamo determinantu D_3 iz Cramerovog pravila. Isto tako, kako nam je dovoljna samo jedna od točaka A i B da bismo napisali jednadžbu pravca p, dovoljno je izračunati samo jednu od nepoznanica u i v. No, mi ćemo ovdje ipak odrediti obje točke A i B. Kako je

$$D = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4, \quad D_1 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 12, \quad D_2 = \begin{vmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 16,$$

slijedi

$$u = \frac{D_1}{D} = \frac{12}{4} = 3, \quad v = \frac{D_2}{D} = \frac{16}{4} = 4.$$

Sada konačno možemo odrediti točke A i B.

$$\begin{array}{cc} A\big(2u, u, 1+2u\big) & B\big(1+v, 2+v, 1+2v\big) \\ A\big(2\cdot 3, 3, 1+2\cdot 3\big) & B\big(1+4, 2+4, 1+2\cdot 4\big) \\ A\big(6,3,7\big) & B\big(5,6,9\big) \end{array}$$

Za pravac p sada znamo njegov vektor smjera $\vec{s}_p$ i čak dvije njegove točke A i B. Ako odaberemo točku A za istaknutu točku, kanonski oblik jednadžbe pravca p glasi

$$p \ldots \frac{x-6}{1} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z-7}{-2}.$$

Zadatak 40.

Za koju vrijednost parametra $a \in \mathbb{R}$ se sijeku pravci $p_1 \ldots \frac{x-a}{4} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{1}$ i $p_2 \ldots \frac{x+3}{-1} = \frac{y+a}{5} = \frac{z+1}{1}$? Odredite u tom slučaju jednadžbu ravnine koja sadrži pravce p_1 i p_2.

Rješenje.

Vektor smjera pravca p_1 je $\vec{s}_1 = (4,3,1)$, a vektor smjera pravca p_2 je $\vec{s}_2 = (-1,5,1)$. Vektori $\vec{s}_1$ i $\vec{s}_2$ nisu kolinearni pa zaključujemo da pravci p_1 i p_2 nisu paralelni niti za jednu vrijednost parametra $a \in \mathbb{R}$. Stoga će se pravci p_1 i p_2 sijeći ako i samo ako postoji ravnina koja sadrži oba pravca. Drugim riječima, u ovom slučaju pravci p_1 i p_2 se sijeku jedino ako su komplanarni.

Pravac p_1 prolazi točkom $T_1(a,2,0)$ i ima vektor smjera $\vec{s}_1 = (4,3,1)$ pa je

$$x_1 = a,\ y_1 = 2,\ z_1 = 0,\ \alpha_1 = 4,\ \beta_1 = 3,\ \gamma_1 = 1.$$

Pravac p_2 prolazi točkom $T_2(-3,-a,-1)$ i ima vektor smjera $\vec{s}_2 = (-1,5,1)$ pa je

$$x_2 = -3,\ y_2 = -a,\ z_2 = -1,\ \alpha_2 = -1,\ \beta_2 = 5,\ \gamma_2 = 1.$$

Primijenimo li uvjet komplanarnosti na pravce p_1 i p_2

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0$$

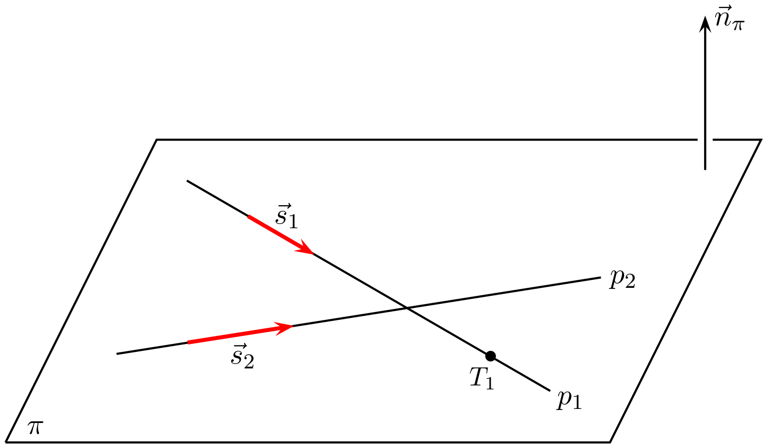
dobivamo

$$\begin{vmatrix} -3-a & -a-2 & -1 \\ 4 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

iz čega slijedi da mora biti $7a - 7 = 0$, tj. $a = 1$. Zaključujemo da se pravci p_1 i p_2 sijeku jedino za $a = 1$. U tom slučaju pravci p_1 i p_2 imaju jednadžbe

$$p_1 \ldots \frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{1}, \qquad p_2 \ldots \frac{x+3}{-1} = \frac{y+1}{5} = \frac{z+1}{1}.$$

Odredimo sada još jednadžbu ravnine π koja sadrži pravce p_1 i p_2.



Kako ravnina π sadrži oba pravca p_1 i p_2, tada sadrži i sve njihove točke. Specijalno, možemo uzeti, npr. da ravnina π prolazi istaknutom točkom T_1 u jednadžbi pravca p_1. To je točka $T_1(1, 2, 0)$. Naravno, mogli smo odabrati bilo koju drugu točku na pravcu p_1 ili pak bilo koju točku na pravcu p_2. Nadalje, vektori smjerova $\vec{s}_1 = (4, 3, 1)$ i $\vec{s}_2 = (-1, 5, 1)$ pravaca p_1 i p_2 nisu kolinearni pa razapinju ravninu π. Stoga za normalu ravnine π možemo uzeti vektor

$$\vec{n}_\pi = \vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = (-2, -5, 23).$$

Konačno, ravnina π prolazi točkom $T_1(1, 2, 0)$ i ima normalu $\vec{n}_\pi = (-2, -5, 23)$ pa dobivamo

$$\begin{gathered} A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \\ -2(x-1) - 5(y-2) + 23(z-0) = 0 \\ -2x - 5y + 23z + 12 = 0 \end{gathered}$$

Dakle, ravnina π ima jednadžbu $-2x - 5y + 23z + 12 = 0$.

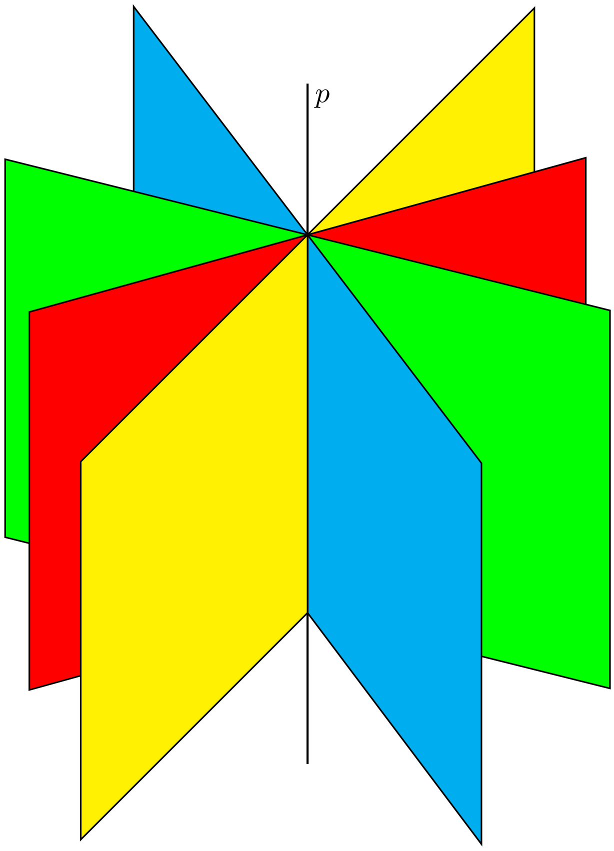
Pramen ravnina u prostoru. Pramen ravnina u prostoru je skup svih ravnina prostora koje prolaze zadanim pravcem p kojeg zovemo os pramena. Pramen ravnina se može zadati pomoću osi pramena ili pak s dvije ravnine pramena čiji je presjek pravac p. Ako je pramen ravnina zadan sa dvije ravnine

$$\begin{gathered} \pi_1 \ldots A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ \pi_2 \ldots A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0, \end{gathered}$$

onda je jednadžba bilo koje druge ravnine tog pramena linearna kombinacija jednadžbi tih dviju ravnina, tj. jednadžba pramena u tom slučaju glasi

$$\alpha(A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1) + \beta(A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2) = 0.$$

U tom slučaju se svaka ravnina pramena dobiva za neki izbor $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ pri čemu nisu istovremeno oba broja jednaka nuli, tj. $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$. Pritom, za pojedinu ravninu iz pramena brojevi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ nisu jedinstveno određeni. Naime, ako za odabrane brojeve α, β dobivamo neku ravninu iz pramena, tada tu istu ravninu dobivamo također za brojeve $k\alpha, k\beta$ za svaki $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.



Snop ravnina u prostoru. Snop ili svežanj ravnina u prostoru je skup svih ravnina prostora koje prolaze jednom točkom $T_0(x_0, y_0, z_0)$ prostora. Točku T_0 zovemo vrh snopa. Jednadžba snopa s vrhom $T_0(x_0, y_0, z_0)$ glasi

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0, \quad A, B, C \in \mathbb{R}, \quad A^2 + B^2 + C^2 \neq 0.$$

Biranjem parametara A, B, C dobivamo ravnine koje pripadaju snopu s vrhom u točki T_0. Pritom, za svaki $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ parametri kA, kB, kC daju istu ravninu iz snopa kao i parametri A, B, C.

Najčešće se vrh snopa zadaje kao presjek tri ravnine

$$\pi_1 \ldots A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$
$$\pi_2 \ldots A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$
$$\pi_3 \ldots A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$$

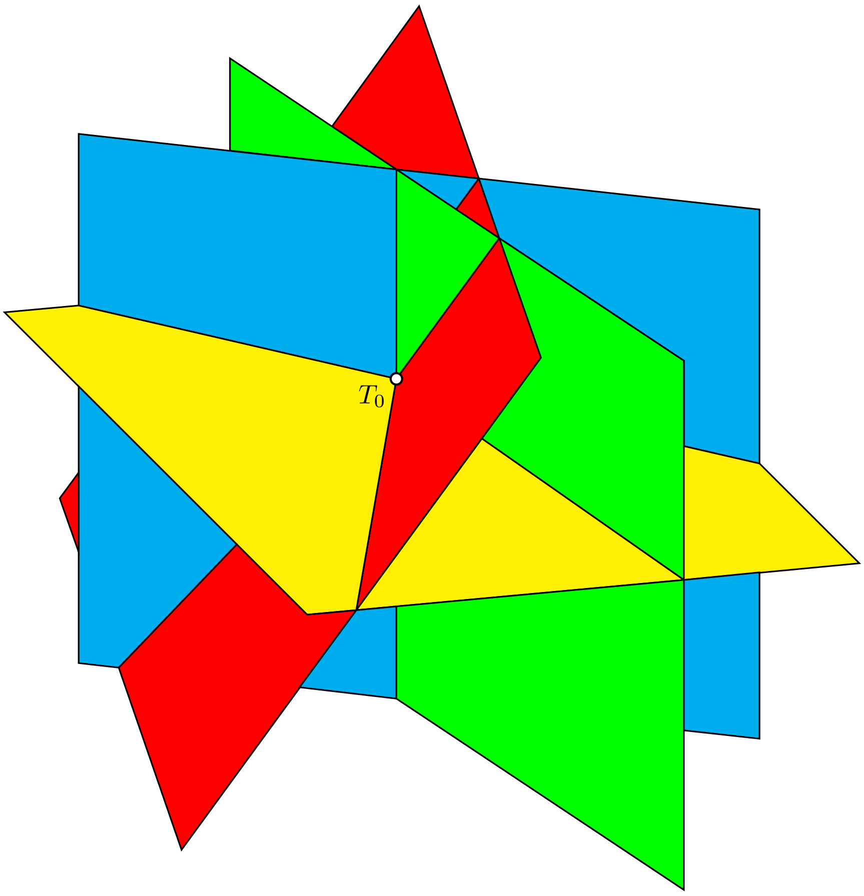
pri čemu je

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

U tom slučaju je jednadžba bilo koje druge ravnine iz snopa jednaka linearnoj kombinaciji jednadžbi tih triju ravnina, tj. jednadžba snopa tada glasi

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) + \gamma(A_3x + B_3y + C_3z + D_3) = 0.$$

Svaka ravnina iz snopa se dobiva za neki izbor $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ pri čemu nisu istovremeno sva tri broja jednaka nuli, tj. $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \neq 0$. Pritom, za pojedinu ravninu iz snopa brojevi $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ nisu jedinstveno određeni. Naime, ako za odabrane brojeve α, β, γ dobivamo neku ravninu iz snopa, tada tu istu ravninu dobivamo također za brojeve $k\alpha, k\beta, k\gamma$ za svaki $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.



Zadatak 41.
Napišite jednadžbu ravnine koja pripada pramenu određenom s ravninama $x + 5y - z - 1 = 0$, $2x + y - 6z + 3 = 0$ i prolazi polovištem dužine $\overline{AB}$ ako je $A(1, 4, 0)$ i $B(5, 2, -4)$.

Rješenje.
Zadatak ćemo riješiti na dva načina: pomoću jednadžbe pramena i bez upotrebe jednadžbe pramena.

- **1. način:** pomoću jednadžbe pramena

Neka je π tražena ravnina. Jednadžba pramena određenog s ravninama $x + 5y - z - 1 = 0$ i $2x + y - 6z + 3 = 0$ glasi

$$\alpha(x + 5y - z - 1) + \beta(2x + y - 6z + 3) = 0.$$

Kako ravnina π pripada tom pramenu, njezina jednadžba mora biti oblika

$$\pi \ldots \alpha(x + 5y - z - 1) + \beta(2x + y - 6z + 3) = 0 \qquad (\spadesuit)$$

za neke $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Nadalje, ravnina π mora prolaziti polovištem P dužine $\overline{AB}$. Kako je $A(1, 4, 0)$ i $B(5, 2, -4)$, slijedi

$$P\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2}\right)$$
$$P\left(\frac{1+5}{2}, \frac{4+2}{2}, \frac{0+(-4)}{2}\right)$$

pa je polovište dužine $\overline{AB}$ točka $P(3, 3, -2)$. Ravnina π mora prolaziti točkom P pa uvrštavanjem koordinata točke P u ($\spadesuit$) dobivamo

$$\alpha \cdot (3 + 5 \cdot 3 - (-2) - 1) + \beta \cdot (2 \cdot 3 + 3 - 6 \cdot (-2) + 3) = 0$$
$$19\alpha + 24\beta = 0$$

Jednadžba $19\alpha + 24\beta = 0$ ima beskonačno mnogo realnih rješenja, no nama je dovoljno jedno takvo rješenje koje nije trivijalno. Na primjer, $\alpha = -24$ i $\beta = 19$ je jedno takvo rješenje. Uvrstimo li $\alpha = -24$ i $\beta = 19$ u ($\spadesuit$), dobivamo

$$-24(x + 5y - z - 1) + 19(2x + y - 6z + 3) = 0$$
$$-24x - 120y + 24z + 24 + 38x + 19y - 114z + 57 = 0$$
$$14x - 101y - 90z + 81 = 0$$

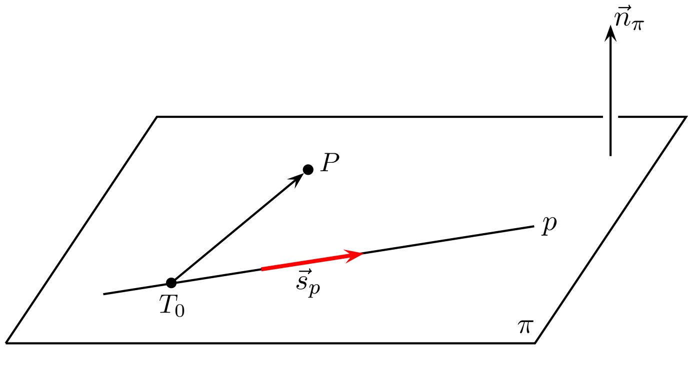
Dakle, tražena ravnina π ima jednadžbu $14x - 101y - 90z + 81 = 0$.

- **2. način:** bez upotrebe jednadžbe pramena

Neka je π tražena ravnina. Kako ravnina π pripada pramenu određenom ravninama

$$\pi_1 \ldots x + 5y - z - 1 = 0$$
$$\pi_2 \ldots 2x + y - 6z + 3 = 0,$$

ravnina π mora sadržavati presječnicu ravnina π_1 i π_2. Neka je pravac p presjek ravnina π_1 i π_2. Tada je ravnina π zapravo ravnina koja sadrži pravac p i prolazi polovištem $P(3, 3, -2)$ dužine $\overline{AB}$.



Da bismo napisali jednadžbu ravnine π, treba nam njezina normala i jedna točka kojom ona prolazi.

Točku već imamo, to je točka $P(3,3,-2)$. Nadalje, za vektor smjera $\vec{s}_p$ pravca p možemo uzeti vektorski produkt normali ravnina π_1 i π_2 (vidi zadatak 16. na stranici 15).

$$\vec{s}_p = (1,5,-1) \times (2,1,-6) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & -6 \end{vmatrix} = (-29,4,-9)$$

Neku točku T_0 na pravcu p možemo dobiti tako da odredimo jedno rješenje sustava

$$\begin{aligned} x + 5y - z - 1 &= 0 \\ 2x + y - 6z + 3 &= 0 \end{aligned}$$

Ako uzmemo, npr. $y = 0$, dobivamo

$$\begin{aligned} x - z - 1 &= 0 \\ 2x - 6z + 3 &= 0 \end{aligned}$$

iz čega slijedi $x = \frac{9}{4}$, $z = \frac{5}{4}$. Dakle, jedna točka na pravcu p je točka $T_0\left(\frac{9}{4}, 0, \frac{5}{4}\right)$. Ravnina π je u tom slučaju razapeta s vektorima $\vec{s}_p$ i $\overrightarrow{T_0P}$ (vidi gornju sliku).

$$\overrightarrow{T_0P} = \vec{r}_P - \vec{r}_{T_0} = (3,3,-2) - \left(\tfrac{9}{4}, 0, \tfrac{5}{4}\right) = \left(\tfrac{3}{4}, 3, -\tfrac{13}{4}\right),$$

Možemo uzeti da je ravnina π razapeta s vektorima $\vec{s}_p$ i $4\,\overrightarrow{T_0P}$ pa za normalu ravnine π možemo uzeti vektor $\vec{s}_p \times 4\,\overrightarrow{T_0P}$.

$$\vec{n}_\pi = \vec{s}_p \times 4\,\overrightarrow{T_0P} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -29 & 4 & -9 \\ 3 & 12 & -13 \end{vmatrix} = (56, -404, -360)$$

Konačno, ravnina π je ravnina koja prolazi točkom $P(3,3,-2)$ i ima normalu $\vec{n}_\pi = (56,-404,-360)$ pa dobivamo

$$\begin{gathered} A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0 \\ 56(x-3) - 404(y-3) - 360(z-(-2)) = 0 \\ 56x - 404y - 360z + 324 = 0 \ \big/ : 4 \\ 14x - 101y - 90z + 81 = 0 \end{gathered}$$

Dakle, tražena ravnina π ima jednadžbu $14x - 101y - 90z + 81 = 0$.

Napomena. Uočite da je u prethodnom zadatku prvi način rješavanja pomoću jednadžbe pramena puno jednostavniji i elegantniji od drugog načina rješavanja u kojemu se ne koristi jednadžba pramena. Općenito, svaki se zadatak u vezi s pramenom ravnina može riješiti bez korištenja jednadžbe pramena tako da se pronađu parametarske jednažbe pravca koji je zadan kao presjek dviju ravnina iz pramena. Nakon toga se dalje taj pravac na pogodni način iskoristiti za dobivanje traženog rješenja u zadatku. Međutim, svi zadaci ovog tipa se puno elegantnije i jednostavnije rješavaju pomoću jednadžbe pramena ravnina. U prethodnom zadatku su pokazana oba načina rješavanja kako biste mogli usporediti koji je od njih jednostavniji. U ostalim zadacima ovog tipa uvijek ćemo koristiti jednadžbu pramena, a vi ih za vježbu možete riješiti i bez korištenja jednadžbe pramena ravnina.

Zadatak 42.
Napišite jednadžbu ravnine koja pripada pramenu određenom ravninama $\pi_1 \dots 5x+11y-7z+4=0$ i $\pi_2 \dots 4x-y+8z-12=0$ i okomita je na ravninu $\pi \dots 2x-4y+3z-8=0$.

Rješenje.
Neka je Σ tražena ravnina. Jednadžba pramena određenog s ravninama π_1 i π_2 glasi

$$\alpha(5x+11y-7z+4)+\beta(4x-y+8z-12)=0.$$

Kako ravnina Σ pripada tom pramenu, njezina jednadžba mora biti oblika

$$\Sigma \dots \alpha(5x+11y-7z+4)+\beta(4x-y+8z-12)=0$$

za neke $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Nakon grupiranja uz x, y, z dobivamo

$$\Sigma \dots (5\alpha+4\beta)x+(11\alpha-\beta)y+(-7\alpha+8\beta)z+(4\alpha-12\beta)=0. \qquad (\clubsuit)$$

Kako ravnina Σ mora biti okomita na ravninu π, tada je skalarni produkt njihovih normali jednak 0, tj. $\vec{n}_\Sigma \cdot \vec{n}_\pi = 0$. Zbog $\vec{n}_\Sigma = (5\alpha+4\beta, 11\alpha-\beta, -7\alpha+8\beta)$ i $\vec{n}_\pi = (2,-4,3)$ slijedi

$$\begin{gathered}
\vec{n}_\Sigma \cdot \vec{n}_\pi = 0 \\
(5\alpha+4\beta, 11\alpha-\beta, -7\alpha+8\beta)\cdot(2,-4,3)=0 \\
(5\alpha+4\beta)\cdot 2+(11\alpha-\beta)\cdot(-4)+(-7\alpha+8\beta)\cdot 3=0 \\
-55\alpha+36\beta=0
\end{gathered}$$

Jednadžba $-55\alpha+36\beta=0$ ima beskonačno mnogo realnih rješenja, no nama je dovoljno jedno takvo rješenje koje nije trivijalno. Na primjer, $\alpha=36$ i $\beta=55$ je jedno takvo rješenje. Uvrstimo li $\alpha=36$ i $\beta=55$ u $(\clubsuit)$, dobivamo

$$\begin{gathered}
(5\cdot 36+4\cdot 55)x+(11\cdot 36-55)y+(-7\cdot 36+8\cdot 55)z+(4\cdot 36-12\cdot 55)=0 \\
400x+341y+188z-516=0
\end{gathered}$$

Dakle, ravnina Σ ima jednadžbu $400x+341y+188z-516=0$.

Zadatak 43.
Ispitajte da li ravnine $2x-y+3z-5=0$, $x+y-z+1=0$ i $3x+2y-4z-3=0$ pripadaju istom pramenu.

Rješenje.
Prve dvije ravnine određuju pramen koji ima jednadžbu

$$\alpha(2x-y+3z-5)+\beta(x+y-z+1)=0.$$

Treća ravnina pripada tom pramenu ako i samo ako postoje $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tako da vrijedi

$$3x+2y-4z-3=\alpha(2x-y+3z-5)+\beta(x+y-z+1).$$

Ako desnu stranu grupiramo po x, y i z dobivamo

$$3x + 2y - 4z - 3 = (2\alpha + \beta)x + (-\alpha + \beta)y + (3\alpha - \beta)z + (-5\alpha + \beta). \tag{$\bigstar$}$$

Kako ($\bigstar$) mora vrijediti za svaki izbor $x, y, z \in \mathbb{R}$, mora biti

$$\begin{aligned} 2\alpha + \beta &= 3 \\ -\alpha + \beta &= 2 \\ 3\alpha - \beta &= -4 \\ -5\alpha + \beta &= -3 \end{aligned}$$

Rješavanjem prve dvije jednadžbe

$$\begin{aligned} 2\alpha + \beta &= 3 \\ -\alpha + \beta &= 2 \end{aligned}$$

dobivamo $\alpha = \frac{1}{3}$, $\beta = \frac{7}{3}$. Međutim, dobiveno rješenje ne zadovoljava preostale dvije jednadžbe pa zaključujemo da zadane tri ravnine ne pripadaju istom pramenu.

Zadatak 44.
Odredite jednadžbu ravnine koja prolazi točkama $A(3, 1, -2)$, $B(0, 7, 2)$ i pripada snopu ravnina koji je zadan s ravninama $3x - 5y + 8z = 2$, $6y - 2z + 3 = 0$ i $x - 4y = 5$.

Rješenje.
Zadatak ćemo riješiti na dva načina: pomoću jednadžbe snopa i bez korištenja jednadžbe snopa.

- **1. način:** pomoću jednadžbe snopa

Jednadžba snopa zadanog s ravninama $3x - 5y + 8z = 2$, $6y - 2z + 3 = 0$ i $x - 4y = 5$ glasi

$$\alpha(3x - 5y + 8z - 2) + \beta(6y - 2z + 3) + \gamma(x - 4y - 5) = 0.$$

Neka je π tražena ravnina. Kako ona mora pripadati zadanom snopu, njezina jednadžba mora biti oblika

$$\pi \ldots \alpha(3x - 5y + 8z - 2) + \beta(6y - 2z + 3) + \gamma(x - 4y - 5) = 0 \tag{$\heartsuit$}$$

za neke $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Točke $A(3, 1, -2)$ i $B(0, 7, 2)$ moraju pripadati ravnini π pa uvrštavanjem njihovih koordinata u ($\heartsuit$) dobivamo

$$\begin{aligned} -14\alpha + 13\beta - 6\gamma &= 0 \\ -21\alpha + 41\beta - 33\gamma &= 0 \end{aligned}$$

Dobiveni homogeni sustav linearni jednadžbi ima beskonačno mnogo realnih rješenja, no nama je dovoljno jedno njegovo netrivijalno rješenje. Ako uzmemo, npr. $\alpha = 1$, dalje imamo

$$\begin{aligned} 13\beta - 6\gamma &= 14 \\ 41\beta - 33\gamma &= 21 \end{aligned}$$

što nam daje $\beta = \frac{112}{61}$ i $\gamma = \frac{301}{183}$. Sada uvrstimo $\alpha = 1$, $\beta = \frac{112}{61}$, $\gamma = \frac{301}{183}$ u ($\heartsuit$) pa imamo

$$1 \cdot (3x - 5y + 8z - 2) + \tfrac{112}{61} \cdot (6y - 2z + 3) + \tfrac{301}{183} \cdot (x - 4y - 5) = 0.$$

Nakon množenja posljednje jednakosti sa 183 i sređivanja dobivamo

$$850x - 103y + 792z - 863 = 0.$$

Dakle, ravnina π ima jednadžbu $850x - 103y + 792z - 863 = 0$.

- **2. način:** bez upotrebe jednadžbe snopa

Neka je π tražena ravnina. Kako ravnina π mora pripadati snopu određenom ravninama

$$3x - 5y + 8z = 2, \quad 6y - 2z + 3 = 0, \quad x - 4y = 5$$

zaključujemo da mora prolaziti vrhom S snopa. Točku S dobijemo kao presjek triju zadanih ravnina, što znači da moramo riješiti sustav linearnih jednadžbi

$$\begin{aligned} 3x - 5y + 8z &= 2 \\ 6y - 2z &= -3\,. \\ x - 4y &= 5 \end{aligned}$$

Cramerovim pravilom dobivamo

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 8 \\ 0 & 6 & -2 \\ 1 & -4 & 0 \end{vmatrix} = -62, \quad D_1 = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 8 \\ -3 & 6 & -2 \\ 5 & -4 & 0 \end{vmatrix} = -110,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 8 \\ 0 & -3 & -2 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 50, \qquad D_3 = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 0 & 6 & -3 \\ 1 & -4 & 5 \end{vmatrix} = 57$$

pa je

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{-110}{-62} = \frac{55}{31}, \quad y = \frac{D_2}{D} = \frac{50}{-62} = -\frac{25}{31}, \quad z = \frac{D_3}{D} = \frac{57}{-62} = -\frac{57}{62}$$

Dakle, ravnina π mora prolaziti točkom $S\left(\frac{55}{31}, -\frac{25}{31}, -\frac{57}{62}\right)$. U zadatku je zadano da ravnina π također mora prolaziti točkama $A(3, 1, -2)$ i $B(0, 7, 2)$. Sada ravninu π možemo odrediti kao ravninu kroz tri nekolinearne točke $A(3, 1, -2)$, $B(0, 7, 2)$ i $S\left(\frac{55}{31}, -\frac{25}{31}, -\frac{57}{62}\right)$. Možemo koristiti gotovu formulu ili pak tražiti normalu te ravnine (pogledajte zadatak 4. na stranici 5). Ovdje ćemo, malo za promjenu, iskoristiti gotovu formulu.

$$\begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A & z - z_A \\ x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ x_S - x_A & y_S - y_A & z_S - z_A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x - 3 & y - 1 & z + 2 \\ -3 & 6 & 4 \\ -\frac{38}{31} & -\frac{56}{31} & \frac{67}{62} \end{vmatrix} = \tfrac{425}{31}x - \tfrac{103}{62}y + \tfrac{396}{31}z - \tfrac{863}{62}$$

Stoga ravnina π ima jednadžbu $\frac{425}{31}x - \frac{103}{62}y + \frac{396}{31}z - \frac{863}{62} = 0$, odnosno nakon množenja sa 62 dobivamo $850x - 103y + 792z - 863 = 0$.