Funkcije više varijabli

– primjeri riješenih zadataka –

Zadatak 1.
Izračunajte vrijednost funkcije $f(x,y) = xy + \frac{y}{x}$ u točki $\left(\frac{1}{2}, 5\right)$.

Rješenje.
U ovom slučaju je $x = \frac{1}{2}$ i $y = 5$. Stoga je

$$f\left(\tfrac{1}{2}, 5\right) = \tfrac{1}{2} \cdot 5 + \frac{5}{\frac{1}{2}} = \tfrac{5}{2} + 10 = \tfrac{25}{2}.$$

Zadatak 2.
Izračunajte vrijednost funkcije $z = \dfrac{x^6 + 3x^4y^2 + 3x^2y^4 + y^6}{100 - x^2 - y^2}$ u točkama kružnice $x^2 + y^2 = 196$.

Rješenje.
Koristeći formulu $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ dobivamo

$$z = \frac{x^6 + 3x^4y^2 + 3x^2y^4 + y^6}{100 - x^2 - y^2} = \frac{(x^2+y^2)^3}{100 - (x^2+y^2)}.$$

Stoga je vrijednost promatrane funkcije u bilo kojoj točki kružnice $x^2 + y^2 = 196$ jednaka

$$z = \frac{196^3}{100 - 196} = -\frac{196^3}{96} = -\frac{235\,298}{3}.$$

Zaključujemo da je zadana funkcija konstantna na kružnici $x^2 + y^2 = 196$.

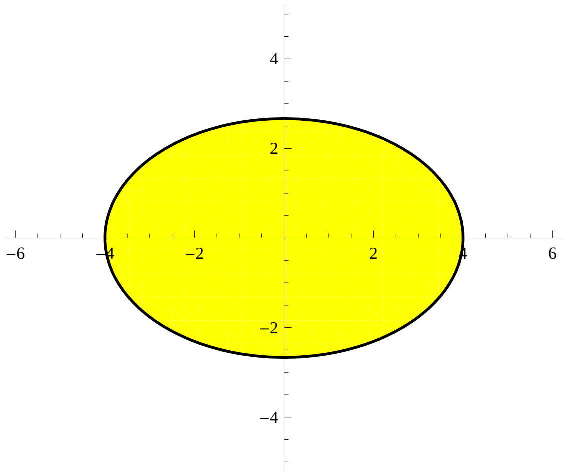
Domena funkcije. Domena ili područje definicije realne funkcije $z = f(x,y)$ dvije realne varijable je podskup od $\mathbb{R}^2$ koji je sastavljen od svih točaka (x,y) za koje se može odrediti realni broj $f(x,y)$.

Zadatak 3.
Odredite domenu funkcije $z = \sqrt{64 - 4x^2 - 9y^2}$.

Rješenje.
U domeni zadane funkcije su sve točke (x,y) za koje je izraz pod korijenom veći ili jednak od nule.

$$\begin{aligned} 64 - 4x^2 - 9y^2 &\geqslant 0 \\ 4x^2 + 9y^2 &\leqslant 64 \;\Big/ : 64 \\ \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{\frac{64}{9}} &\leqslant 1 \end{aligned}$$

Zaključujemo da su u domeni zadane funkcije sve točke koje se nalaze unutar elipse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{\frac{64}{9}} = 1$ uključujući i točke na toj elipsi.

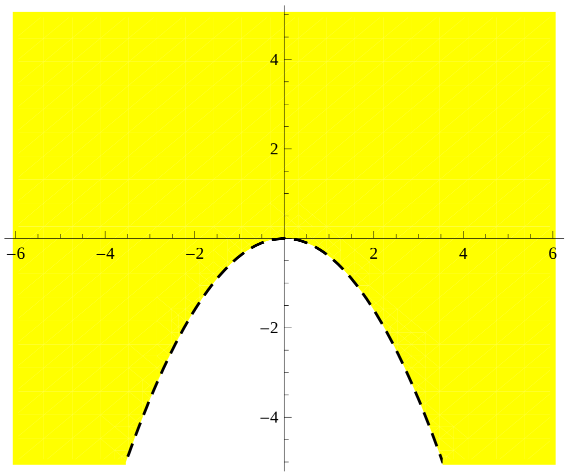


Zadatak 4.
Odredite domenu funkcije $z = \ln(2x^2 + 5y)$.

Rješenje.
U domeni su sve točke (x, y) za koje je izraz pod logaritmom veći od nule.

$$\begin{aligned} 2x^2 + 5y &> 0 \\ 5y &> -2x^2 \\ y &> -\tfrac{2}{5}x^2 \end{aligned}$$

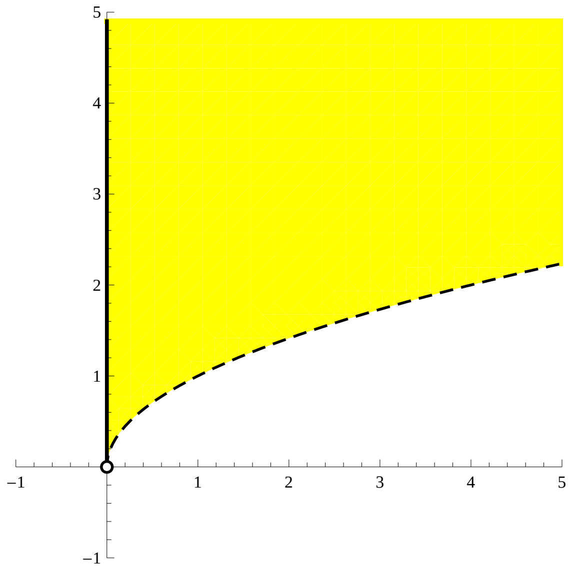
Zaključujemo da su u domeni zadane funkcije sve točke koje se nalaze izvan parabole $y = -\frac{2}{5}x^2$ ne uključujući točke na toj paraboli jer mora vrijediti stroga nejednakost.



Zadatak 5.
Odredite domenu funkcije $z = \dfrac{1}{\sqrt{y - \sqrt{x}}}$.

Rješenje.
Kako se varijabla x nalazi pod drugim korijenom, mora biti $x \geqslant 0$. Nadalje, kako se izraz $y - \sqrt{x}$ nalazi pod drugim korijenom, mora biti $y - \sqrt{x} \geqslant 0$. Međutim, izraz $y - \sqrt{x}$ se nalazi i u nazivniku

pa mora biti $y-\sqrt{x}\neq 0$. Iz toga zaključujemo da mora biti $y-\sqrt{x}\geqslant 0$ i $y-\sqrt{x}\neq 0$, što kratko možemo zapisati kao $y-\sqrt{x}>0$. Konačno, u domeni zadane funkcije su sve točke (x,y) za koje vrijedi $x\geqslant 0$ i $y>\sqrt{x}$.



To su točke koje se nalaze u prvom kvadrantu iznad krivulje $y=\sqrt{x}$ pri čemu točke na toj krivulji nisu u domeni (zbog stroge nejednakosti $y>\sqrt{x}$), a točke na pozitivnom dijelu y-osi jesu u domeni jer $x\geqslant 0$ uključuje da smije biti i $x=0$. Uočite da točka $(0,0)$ nije u domeni zadane funkcije, što je na slici naglašeno pomoću "praznog kružića".

Zadatak 6.
Odredite domenu funkcije $z(x,y)=\sqrt{(x^2+y^2-a^2)(2a^2-x^2-y^2)}$ ako je $a>0$ proizvoljna konstanta.

Rješenje.
U domeni zadane funkcije su sve točke (x,y) za koje vrijedi $\big(x^2+y^2-a^2\big)\big(2a^2-x^2-y^2\big)\geqslant 0$. Produkt dva broja je veći od nule ako su oba broja istog predznaka. Stoga razlikujemo dva slučaja.

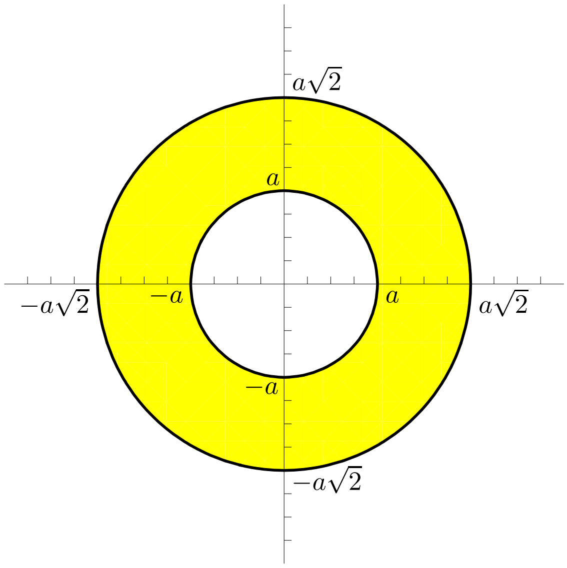
(i) $x^2+y^2-a^2\geqslant 0$ i $2a^2-x^2-y^2\geqslant 0$

Iz ovih uvjeta dobivamo $x^2+y^2\geqslant a^2$ i $x^2+y^2\leqslant 2a^2$, a ove nejednadžbe predstavljaju kružni vijenac omeđen kružnicama sa središtima u ishodištu polumjera a i $a\sqrt{2}$.

(ii) $x^2+y^2-a^2\leqslant 0$ i $2a^2-x^2-y^2\leqslant 0$

Iz ovih uvjeta dobivamo $x^2+y^2\leqslant a^2$ i $x^2+y^2\geqslant 2a^2$, a ovaj sustav nejednadžbi ne zadovoljava niti jedna točka u ravnini. Naime, kada bi postojala takva točka, tada bi ona morala biti unutar manje kružnice polumjera a sa središtem u ishodištu, a izvan veće kružnice polumjera $a\sqrt{2}$ sa središtem u ishodištu. Jasno je da je to nemoguće pa u ovom slučaju kao rješenje dobivamo prazan skup.

Konačno, unijom prvog i drugog slučaja dobivamo kružni vijenac (kružni vijenac $\cup\,\emptyset=$ kružni vijenac).



Napomena. Ukoliko trebamo u ravnini nacrtati skup točaka koji zadovoljava neku nejednadžbu, tada to radimo na sljedeći način. Najprije na promatranu nejednadžbu gledamo kao na jednakost jer u tom slučaju ta jednakost predstavlja neku krivulju u ravnini. Nacrtamo najprije tu krivulju. Ako se radi o strogoj nejednakosti, tj. u nejednakosti su znakovi $<$ ili $>$, krivulju crtamo crtkanom linijom kako bismo naglasili da točke na toj krivulji ne zadovoljavaju promatranu nejednakost. Ako pak se ne radi o strogoj nejednakosti, tj. u nejednakosti su znakovi $\leqslant$ ili $\geqslant$, krivulju crtamo punom linijom kako bismo naglasili da točke na toj krivulji zadovoljavaju promatranu nejednakost. Svaka krivulja u ravnini dijeli ravninu na dva dijela (ovo nije baš najtočnije rečeno, ali je intuitivno jasno iz gornjih zadataka što se želi reći) pa se preostala rješenja promatrane nejednadžbe nalaze na jednoj od tih dviju strana, tj. sve točke na jednoj od tih dviju strana zadovoljavaju promatranu nejednadžbu. Da bismo otkrili o kojoj se strani radi, uzmemo bilo koju unutarnju točku u nekoj od tih dviju strana i provjerimo da li njezine koordinate zadovoljavaju promatranu nejednakost. Ukoliko ju zadovoljavaju, tada smo odabrali pravu stranu, a ukoliko ju ne zadovoljavaju, tada je rješenje ona druga strana kojoj ta točka ne pripada.
Ako istovremeno mora biti zadovoljeno više nejednadžbi, tada crtamo skupove rješenja za svaku nejednadžbu zasebno, a konačno rješenje je presjek svih nacrtanih skupova.
Ako tokom rješavanja nejednadžbe razlikujemo više slučajeva, tada crtamo skupove rješenja posebno za svaki od tih slučaja, a konačno rješenje je unija svih nacrtanih skupova.

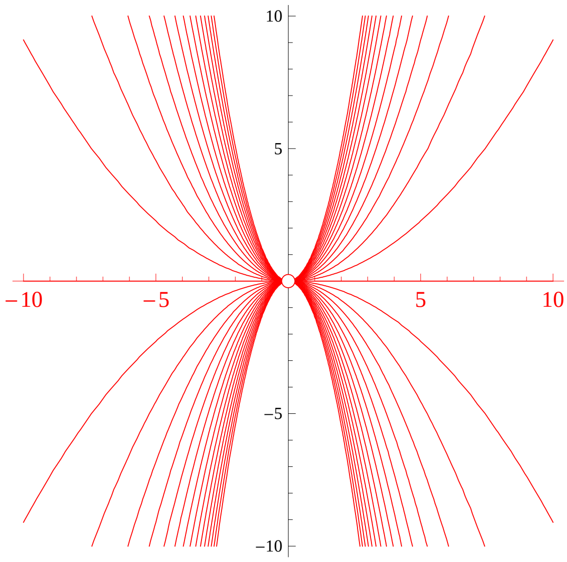
Nivo-linije. Nivo-linija funkcije $z = f(x, y)$ za vrijednost $z = z_0$ je skup svih točaka $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ za koje je $f(x, y) = z_0$. Specijalno, skup svih nultočaka funkcije f je nivo-linija za vrijednost $z = 0$. Ako funkcija f nema nultočaka, tada je nivo linija za vrijednost $z = 0$ prazan skup. Općenito je nivo-linija za vrijednost $z = z_0$ neka krivulja u ravnini. Jednostavno rečeno, duž svake nivo-linije je funkcija f konstantna. Dakle, kada tražimo nivo-linije funkcije $z = f(x, y)$, zapravo tražimo krivulje u domeni duž kojih je funkcija f konstantna.

Zadatak 7.
Odredite nivo-linije funkcije $z = \dfrac{y}{x^2}$.

Rješenje.
Domena zadane funkcije je čitava ravnina $\mathbb{R}^2$ bez točaka na y-osi. Tražimo krivulje unutar domene zadane funkcije duž kojih je ta funkcija konstantna. Neka je $C \in \mathbb{R}$ proizvoljna konstanta. Tada slijedi

$$\begin{aligned} z &= C \\ \frac{y}{x^2} &= C \\ y &= Cx^2 \end{aligned}$$

Dobivamo da je nivo-linija za vrijednost $z = C$ zapravo parabola $y = Cx^2$. U slučaju da je $C = 0$, nivo-linija je pravac $y = 0$, tj. x-os. Dakle, ova funkcija ima neprebrojivo beskonačno mnogo nultočaka i sve nultočke se nalaze na x-osi. Općenito bismo mogli reći da su nivo-linije zadane funkcije parabole $y = Cx^2$. Međutim, kako $(0, 0)$ nije u domeni zadane funkcije, preciznije bi bilo reći da su nivo-linije parabole $y = Cx^2$ bez svojeg tjemena, odnosno za $C = 0$ je nivo-linija x-os bez ishodišta.

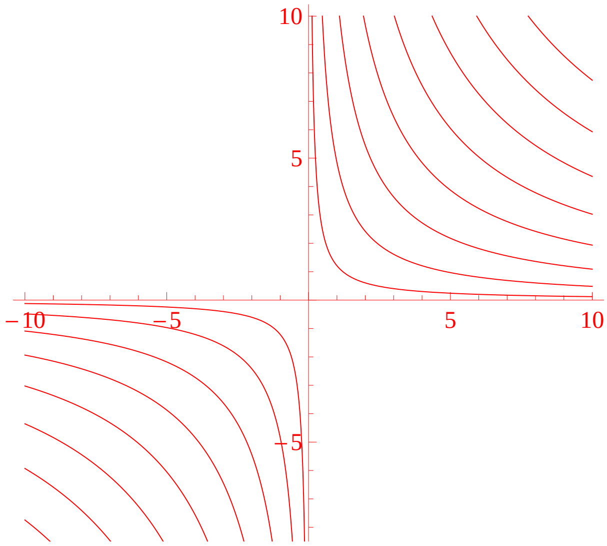


Zadatak 8.
Odredite nivo-linije funkcije $z = \sqrt{xy}$.

Rješenje.
Kako mora biti $xy \geqslant 0$, slijedi da je domena zadane funkcije prvi i treći kvadrant uključujući i koordinatne osi. Tražimo krivulje unutar domene zadane funkcije duž kojih je ta funkcija konstantna. Neka je $C \in \mathbb{R}$ proizvoljna pozitivna konstanta. Tada slijedi

$$\begin{aligned} z &= C \\ \sqrt{xy} &= C \\ y &= \frac{C^2}{x} \end{aligned}$$

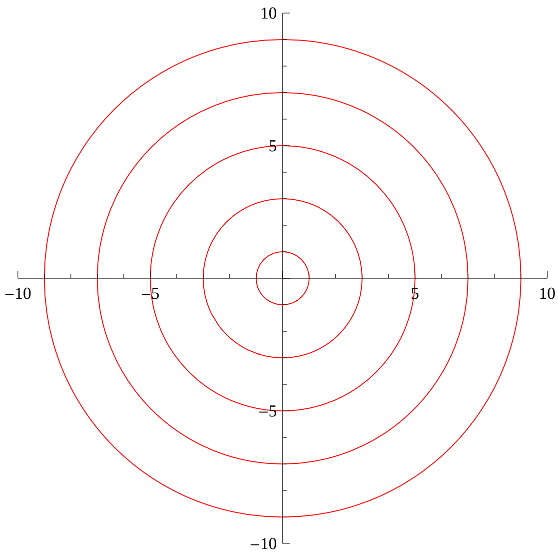
Dobivamo da je nivo-linija za vrijednost $z = C$ zapravo hiperbola $y = \frac{C^2}{x}$. Za $C = 0$ nivo-linija je unija pravaca $x = 0$ i $y = 0$. Dakle, ova funkcija ima neprebrojivo beskonačno mnogo nultočaka i sve nultočke se nalaze na koordinatnim osima. Ako je $C < 0$, nivo-linija za vrijednost $z = C$ je prazan skup jer je promatrana funkcija nenegativna zbog drugog korijena. Općenito bismo mogli reći da su nivo-linije zadane funkcije hiperbole $y = \frac{C^2}{x}$.



Zadatak 9.
Odredite nivo-linije funkcije $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Rješenje.
Domena zadane funkcije je čitava ravnina $\mathbb{R}^2$. Tražimo krivulje unutar domene zadane funkcije duž kojih je ta funkcija konstantna. Neka je $C \in \mathbb{R}$ proizvoljna pozitivna konstanta. Tada slijedi

$$\begin{aligned} z &= C \\ \sqrt{x^2 + y^2} &= C \\ x^2 + y^2 &= C^2 \end{aligned}$$



Dobivamo da je nivo-linija za vrijednost $z = C$ zapravo kružnica $x^2 + y^2 = C^2$. Za $C = 0$ nivo-linija je samo jedna točka $(0, 0)$ o kojoj bismo također mogli razmišljati kao o kružnici polumjera 0 sa središtem u ishodištu. Dakle, ova funkcija ima samo jednu nultočku. Ako je $C < 0$, nivo-linija za vrijednost $z = C$ je prazan skup jer je promatrana funkcija nenegativna zbog drugog korijena. Općenito bismo mogli reći da su nivo-linije zadane funkcije kružnice sa središtima u ishodištu.

Zadatak 10.
Odredite $z(x, y)$ ako je $z(x - y, x + y) = xy^2 + x$.

Rješenje.
Uvedemo li supstitucije

$$\begin{aligned} x - y &= s \\ x + y &= t \end{aligned}$$

rješavanjem sustava dobivamo

$$x = \frac{s+t}{2}, \quad y = \frac{t-s}{2}.$$

Iz svega navedenog slijedi

$$\begin{aligned} z(x - y, x + y) &= xy^2 + x \\ z(s, t) &= \frac{s+t}{2} \cdot \left(\frac{t-s}{2}\right)^2 + \frac{s+t}{2} \\ z(s, t) &= \frac{s+t}{2} \cdot \left[\frac{(t-s)^2}{4} + 1\right] \end{aligned}$$

Ako stavimo ponovo nove supstitucije $s = x$ i $t = y$, konačno dobivamo

$$z(x, y) = \frac{x+y}{2} \cdot \left[\frac{(y-x)^2}{4} + 1\right].$$

Gomilište skupa. Neka je $S \subseteq \mathbb{R}^2$. Kažemo da je točka $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ gomilište skupa S ako svaka okolina točke (x_0, y_0) sadrži beskonačno mnogo elemenata skupa S.

Heineova definicija limesa funkcije. Neka je $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^2$ otvoren skup, $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ funkcija, a točka (x_0, y_0) neko gomilište skupa $\mathcal{O}$. Kažemo da je $L \in \mathbb{R}$ limes funkcije f u točki (x_0, y_0) ako za svaki niz točaka $\big((x_n, y_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ u $\mathcal{O}$ koji teži točki (x_0, y_0), pripadni niz realnih brojeva $\big(f(x_n, y_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ teži prema broju L. U tom slučaju pišemo $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L$.

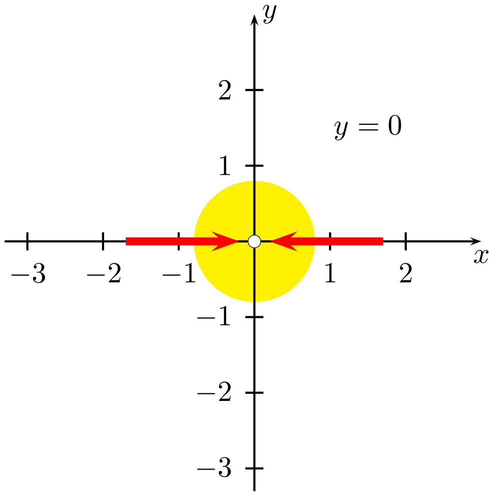
Cauchyjeva definicija limesa funkcije. Neka je $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^2$ otvoren skup, $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ funkcija, a točka (x_0, y_0) neko gomilište skupa $\mathcal{O}$. Kažemo da je $L \in \mathbb{R}$ limes funkcije f u točki (x_0, y_0) ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da za sve točke $(x, y) \in \mathcal{O}$ za koje je $0 < d\big((x, y), (x_0, y_0)\big) < \delta$ vrijedi $\big|f(x, y) - L\big| < \varepsilon$. U tom slučaju pišemo $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L$.

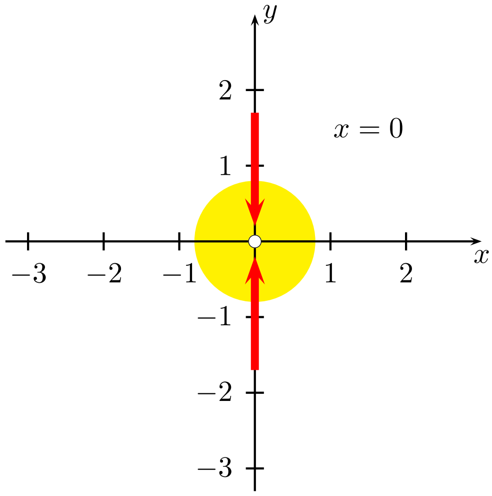
Napomena. Heineova i Cauchyjeva definicija limesa funkcije su ekvivalentne definicije. Kada želimo dokazati da funkcija u nekoj točki nema limes, dovoljno je pronaći dva različita niza koji teže prema toj točki, a da pritom pripadni funkcijski nizovi ne teže prema istom realnom broju. Intuitivno o limesu funkcije možemo razmišljati na sljedeći način. Ako funkcija ima limes u nekoj točki, tada taj limes ne smije ovisiti o putu po kojemu se približavamo toj točki. Naime, u ravnini imamo puno slobode kretanja na sve strane tako da se nekoj točki možemo približavati po nekom pravcu, ali isto tako i po nekoj krivulji. Kod realnih funkcija jedne varijable nismo imali toliko slobode jer se na pravcu nekoj točki možemo približavati samo po tom pravcu s lijeva na desno ili s desna na lijevo pa nije bilo toliko problema kod rješavanja tipičnih zadataka vezanih uz limese takvih funkcija. Kod realnih funkcija dvije varijable problemi su puno veći, a Heineova definicija upravo govori da limesi takvih funkcija ne smiju ovisiti o putu po kojemu se približavamo promatranoj točki. Stoga, ako uspijemo pronaći dva različita puta po kojima se funkcija različito ponaša kada se duž njih približavamo promatranoj točki, tada ta funkcija u promatranoj točki nema limes.

Pogledajmo na nekoliko konkretnih primjera kakve se sve čudne stvari mogu dogoditi kod realnih funkcija dvije realne varijable.

Zadatak 11.
Odredite ako postoji $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

Rješenje.
Ako u zadani razlomak uvrstimo $x=0$ i $y=0$ dobivamo $\frac{0}{0}$, što je neodređeni oblik. Dakle, u ovom slučaju ne možemo limes odrediti direktnim uvrštavanjem vrijednosti pojedinih varijabli. Ideja je da pronađemo dva različita puta po kojima se zadana funkcija različito ponaša kada se duž njih približavamo točki $(0,0)$.





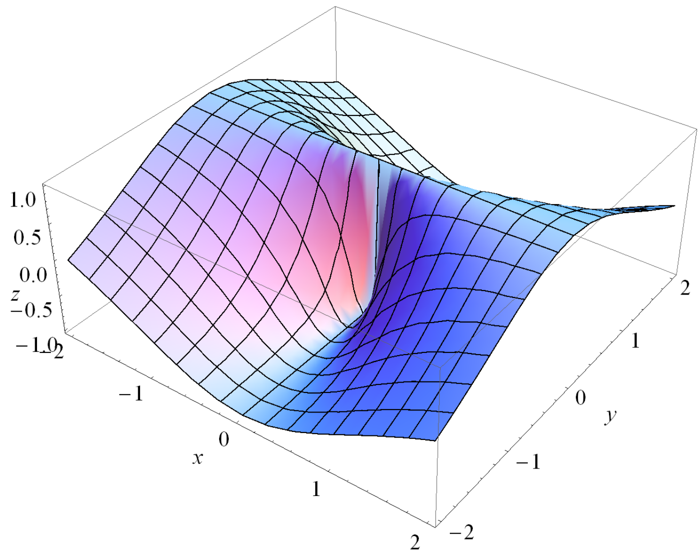
Približavamo li se točki $(0,0)$ po pravcu $y=0$, tada dobivamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-0^2}{x^2+0^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}=\lim_{x\to 0} 1 = 1.$$

Približavamo li se točki $(0,0)$ po pravcu $x=0$, tada dobivamo

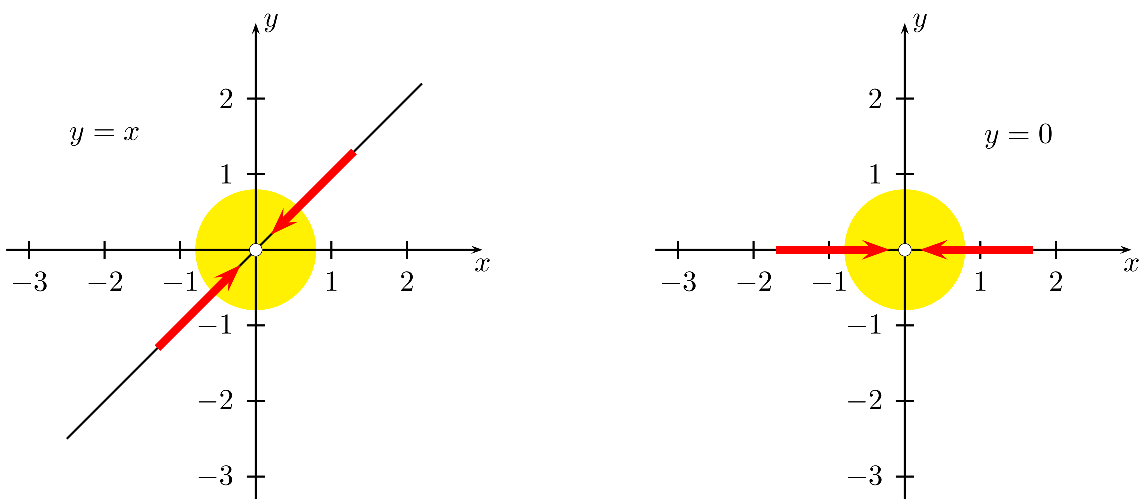
$$\lim_{y\to 0}\frac{0^2-y^2}{0^2+y^2}=\lim_{y\to 0}\frac{-y^2}{y^2}=\lim_{y\to 0} -1 = -1.$$

Ako se približavamo točki $(0,0)$ po pravcu $y = 0$, tada se zadana funkcija približava broju 1. Ako pak se približavamo točki $(0,0)$ po pravcu $x = 0$, tada se zadana funkcija približava broju -1. Dakle, pronašli smo dva različita puta po kojima se funkcija različito ponaša kada se duž tih putova približavamo točki $(0,0)$ pa zaključujemo da zadani limes ne postoji. Ovo čudno ponašanje funkcije u okolini točke $(0,0)$ možemo uočiti i na njezinom grafu.



Zadatak 12.
Odredite ako postoji $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x}{x+2y}$.

Rješenje.
Ako u zadani razlomak uvrstimo $x = 0$ i $y = 0$ dobivamo $\frac{0}{0}$, što je neodređeni oblik. Dakle, u ovom slučaju ne možemo limes odrediti direktnim uvrštavanjem vrijednosti pojedinih varijabli. Ideja je da pronađemo dva različita puta po kojima se zadana funkcija različito ponaša kada se duž njih približavamo točki $(0,0)$.



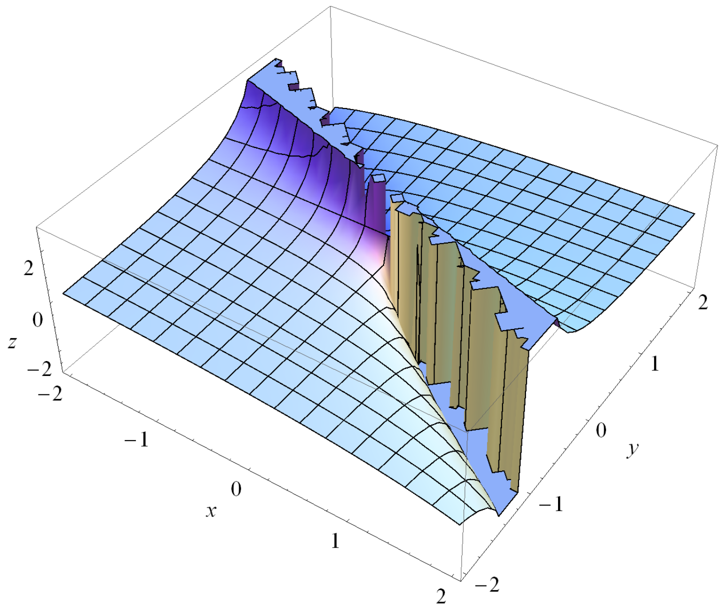
Približavamo li se točki $(0,0)$ po pravcu $y = x$, tada dobivamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{x+2x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{3x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Približavamo li se točki $(0,0)$ po pravcu $y = 0$, tada dobivamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{x+2\cdot 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = \lim_{x\to 0} 1 = 1.$$

Dakle, pronašli smo dva različita puta po kojima se funkcija različito ponaša kada se duž tih putova približavamo točki $(0,0)$ pa zaključujemo da zadani limes ne postoji. Uočite da zadana funkcija nije definirana na pravcu $x + 2y = 0$.



Zadatak 13.
Odredite ako postoji $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^5}{(y-x^2)^2+x^8}$.

Rješenje.
Ako u zadani razlomak uvrstimo $x = 0$ i $y = 0$ dobivamo $\frac{0}{0}$, što je neodređeni oblik. Dakle, u ovom slučaju ne možemo limes odrediti direktnim uvrštavanjem vrijednosti pojedinih varijabli. Ideja je da opet pronađemo dva različita puta po kojima se zadana funkcija različito ponaša kada se duž njih približavamo točki $(0,0)$.

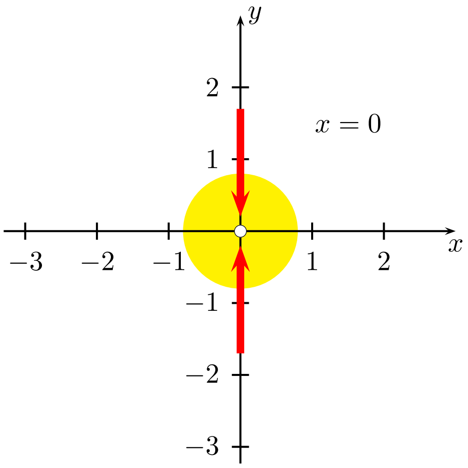
Približavamo li se točki $(0,0)$ po pravcu $x = 0$, tada dobivamo

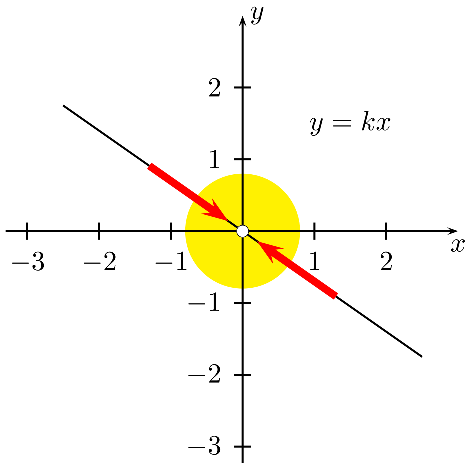
$$\lim_{y\to 0} \frac{0^5}{(y-0^2)^2+0^8} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^2} = \lim_{y\to 0} 0 = 0.$$

Približavamo li se točki $(0,0)$ po nekom pravcu $y = kx$, tada dobivamo

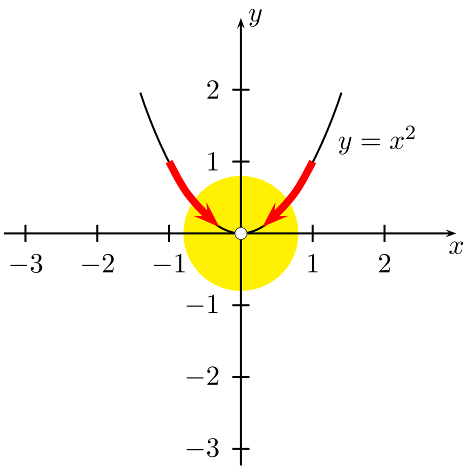
$$\lim_{x\to 0} \frac{x^5}{(kx-x^2)^2+x^8} = \lim_{x\to 0} \frac{x^5}{k^2x^2-2kx^3+x^4+x^8} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{k^2-2kx+x^2+x^6} =$$

$$= \begin{cases} \frac{0}{k^2}, & k \neq 0 \\ \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3}{x^2+x^6}, & k = 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & k \neq 0 \\ \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{1+x^4}, & k = 0 \end{cases} = 0.$$



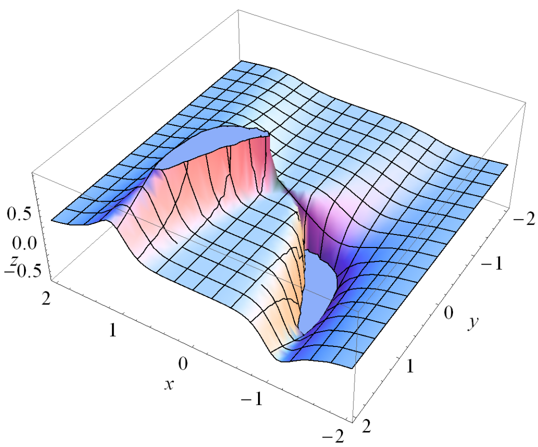


Dakle, po kojem god da se pravcu približavamo točki $(0, 0)$, zadana funkcija se uvijek približava broju 0. Međutim, još uvijek ne možemo tvrditi da je zadani limes jednak 0, iako se funkcija jednako ponaša duž beskonačno mnogo putova kada se po njima približavamo točki $(0, 0)$. Problem je u tome što nismo to ponašanje provjerili na svim mogućim putovima kroz točku $(0, 0)$. Naime, ako bismo se točki $(0, 0)$ približavali po paraboli $y = x^2$, tada bismo imali



$$\lim_{x\to 0} \frac{x^5}{(x^2 - x^2)^2 + x^8} = \lim_{x\to 0} \frac{x^5}{x^8} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3} = \pm\infty.$$

Iz svega navedenog zaključujemo da ipak ne postoji $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^5}{(y - x^2)^2 + x^8}$, iako se funkcija jednako ponaša po svim pravcima kroz $(0, 0)$, ali se ne ponaša jednako tako i na paraboli $y = x^2$.

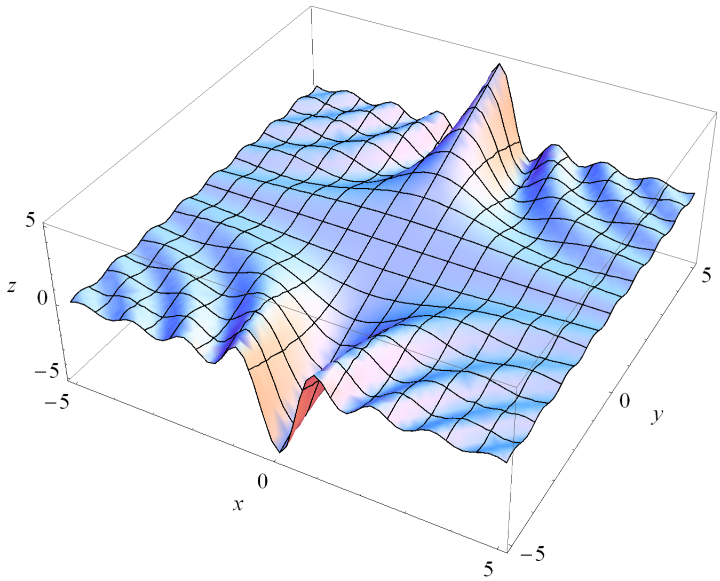


Pogledajmo nekoliko primjera računanja limesa u slučaju da limes postoji. U takvim zadacima se trebamo koristiti svojstvima limesa, tabličnim limesima i raznim trikovima. U sljedećim zadacima navodimo nekoliko takvih jednostavnijih trikova.

Zadatak 14.
Odredite ako postoji $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\sin xy}{x}$.

Rješenje.
Ako u zadani razlomak uvrstimo $x = 0$ i $y = 2$ dobivamo $\frac{0}{0}$, što je neodređeni oblik. Dakle, u ovom slučaju ne možemo limes odrediti direktnim uvrštavanjem vrijednosti pojedinih varijabli. U ovom slučaju koristit ćemo jedan poznati tablični limes $\lim\limits_{u\to 0} \frac{\sin u}{u} = 1$ i svojstvo da je limes produkta jednak produktu limesa. Stoga dobivamo

$$\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\sin xy}{x} = \lim_{(x,y)\to(0,2)} \left(\frac{\sin xy}{xy} \cdot y\right) = \lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\sin xy}{xy} \cdot \lim_{(x,y)\to(0,2)} y = 1 \cdot 2 = 2.$$

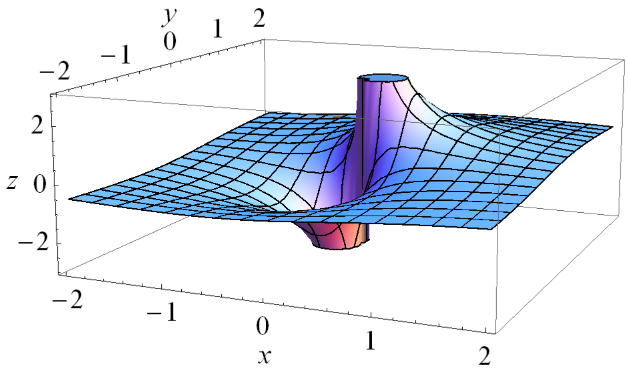


Zadatak 15.
Odredite ako postoji $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{x+y}{x^2+y^2}$.

Rješenje.
Prelazimo na polarne koordinate, tj. uvodimo supstituciju $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Ako $(x,y) \to (\infty,\infty)$, tada je jasno da mora $r \to \infty$. Stoga imamo

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{x+y}{x^2+y^2} = \lim_{r\to\infty} \frac{r(\cos\varphi+\sin\varphi)}{r^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)} = \lim_{r\to\infty} \frac{\cos\varphi+\sin\varphi}{r} = 0$$

jer je $-2 < \cos\varphi + \sin\varphi < 2$ pa je $\frac{\cos\varphi+\sin\varphi}{r}$ jako mali broj kada $r \to \infty$. Uočite na slici da se funkcija "čudno" ponaša u okolini točke $(0,0)$ i za vježbu dokažite da ne postoji $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x^2+y^2}$.



Zadatak 16.

Odredite ako postoji $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(x^2+y^2\right) \sin \frac{1}{xy}$.

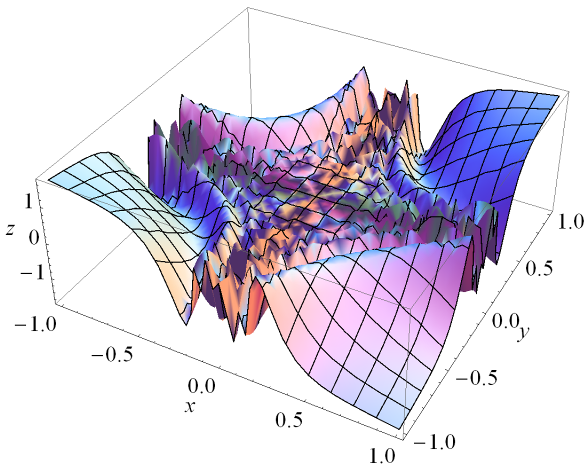
Rješenje.

Kako $x^2+y^2 \to 0$ kada $(x,y) \to (0,0)$, tada iz

$$\left|\left(x^2+y^2\right) \sin \frac{1}{xy}\right| = \left(x^2+y^2\right) \left|\sin \frac{1}{xy}\right| \leqslant x^2+y^2$$

slijedi da je $\left(x^2+y^2\right) \sin \frac{1}{xy}$ jako mali broj kada $(x,y) \to (0,0)$. Stoga je

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(x^2+y^2\right) \sin \frac{1}{xy} = 0.$$



Neprekidna funkcija. Neka je $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^2$ otvoren skup, a točka (x_0, y_0) neko gomilište skupa $\mathcal{O}$ u kojemu je funkcija f definirana. Kažemo da je funkcija f neprekidna u točki (x_0, y_0) ako vrijedi $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$. O neprekidnosti funkcije f u točki (x_0, y_0) ima smisla govoriti jedino ako je funkcija f definirana u točki (x_0, y_0) i nekoj okolini te točke. O limesu funkcije f u točki (x_0, y_0) ima smisla govoriti jedino ako je funkcija f definirana u nekoj okolini točke (x_0, y_0), ali ne mora biti nužno definirana i u točki (x_0, y_0). Intuitivno možemo reći da je funkcija f neprekidna u točki (x_0, y_0) ako je vrijednost funkcije f u toj točki jednaka njezinom limesu u toj točki.

Zadatak 17.

Odredite ako postoji $\lim\limits_{(x,y)\to(2,-3)} \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$.

Rješenje.

Kako je funkcija $f(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2}$ neprekidna u točki $(2,-3)$, tada je njezin limes u toj točki jednak vrijednosti funkcije u toj točki, tj.

$$\lim_{(x,y)\to(2,-3)} \frac{x+y}{x^2+y^2} = \frac{2+(-3)}{2^2+(-3)^2} = \frac{-1}{13}.$$

Zadatak 18.

Zadana je funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ s

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{ako je } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{ako je } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Ispitajte da li je funkcija f neprekidna u točki $(0,0)$.

Rješenje.

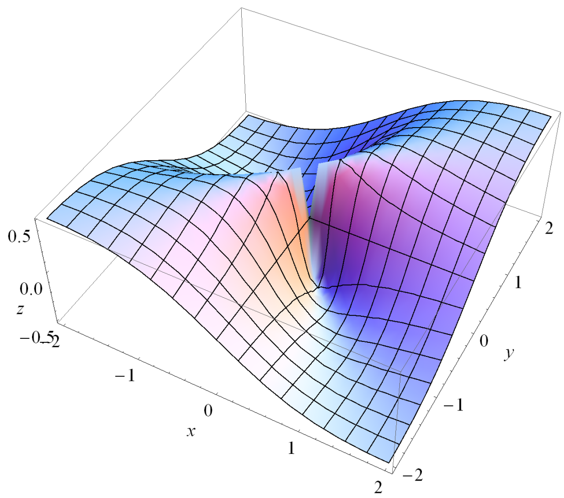
Funkcija f je neprekidna u točki $(0,0)$ ako i samo ako je $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$, tj. ako je $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = 0$. Stoga trebamo izračunati $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$. Ako je taj limes jednak 0, funkcija f je neprekidna u $(0,0)$, a u protivnom će f imati prekid u $(0,0)$. Približavamo li se točki $(0,0)$ po pravcu $y=0$, tada dobivamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cdot 0}{x^2+0^2} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^2} = \lim_{x\to 0} 0 = 0.$$

Ako pak se točki $(0,0)$ približavamo po pravcu $y=x$, dobivamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cdot x}{x^2+x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Dakle, pronašli smo dva različita puta po kojima se funkcija različito ponaša kada se duž tih putova približavamo točki $(0,0)$ pa zaključujemo da $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ ne postoji. Stoga funkcija f ima prekid u točki $(0,0)$. Štoviše, kako $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ ne postoji, nemoguće je funkciju f predefinirati u točki $(0,0)$ tako da ona bude neprekidna u toj točki. U ovom slučaju kažemo da funkcija f u točki $(0,0)$ ima neuklonjiv prekid.



Zadatak 19.

Zadana je funkcija $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ s

$$g(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & \text{ako je } (x,y) \neq (0,0) \\ 5, & \text{ako je } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Ispitajte da li je funkcija g neprekidna u točki $(0,0)$.

Rješenje.

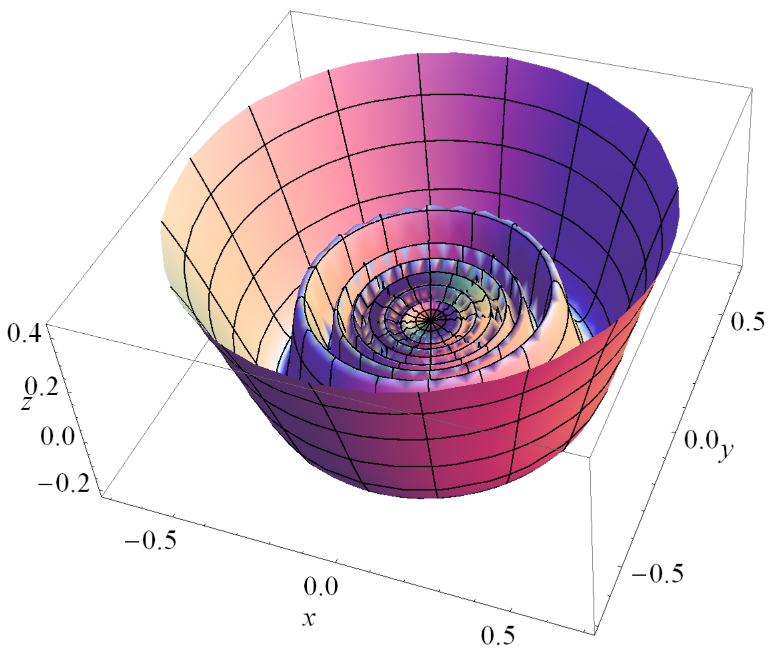
Funkcija g je neprekidna u točki $(0,0)$ ako i samo ako je $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = g(0,0)$, tj. ako je $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} = 5$. Stoga trebamo izračunati $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}$. Ako je taj limes jednak 5, funkcija g je neprekidna u $(0,0)$, a u protivnom će g imati prekid u $(0,0)$. Kako $x^2+y^2 \to 0$ kada $(x,y) \to (0,0)$, tada iz

$$\left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right| = (x^2+y^2)\left|\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right| \leqslant x^2+y^2$$

slijedi da je $(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}$ jako mali broj kada $(x,y) \to (0,0)$. Stoga je

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} = 0.$$

Promatrani limes postoji, ali on nije jednak vrijednosti funkcije g u točki $(0,0)$ pa funkcija g ima prekid u točki $(0,0)$. Međutim, kako postoji $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}$, možemo funkciju g predefinirati u točki $(0,0)$ tako da ona postane neprekidna u $(0,0)$. Trebamo staviti da je $g(0,0)$ jednako vrijednosti promatranog limesa, tj. da je $g(0,0) = 0$ pa funkcija g postaje neprekidna u točki $(0,0)$. U ovom slučaju kažemo da funkcija g u točki $(0,0)$ ima uklonjiv prekid.



Napomena. Limes $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ je takozvani višestruki limes i on se razlikuje od takozvanih uzastopnih limesa $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ i $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$. Navedena tri limesa nemaju općenito nikakve veze jedan s drugim u smislu da oni ne moraju biti međusobno jednaki, niti pak postojanje nekog od njih ne povlači postojanje preostala dva limesa. Dakle, općenito je

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) \neq \lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) \neq \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)$$

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y) \neq \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)$$

Zadatak 20.
Neka je $f : \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ zadana s $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$. Dokažite da ne postoji $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ iako je $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y) = \lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y) = 0$.

Rješenje.
Uvjerimo se najprije da su oba uzastopna limesa jednaka 0.

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\cdot 0^2}{x^2\cdot 0^2+(x-0)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{0}{x^2} = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} = \lim_{y\to 0} \frac{0^2\cdot y^2}{0^2\cdot y^2+(0-y)^2} = \lim_{y\to 0}\frac{0}{y^2} = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

Dokažimo da ne postoji $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. Ako se točki $(0,0)$ približavamo po pravcu $x = 0$, tada dobivamo

$$\lim_{y\to 0} \frac{0^2\cdot y^2}{0^2\cdot y^2+(0-y)^2} = \lim_{y\to 0}\frac{0}{y^2} = \lim_{y\to 0} 0 = 0.$$

Ako pak se točki $(0,0)$ približavamo po pravcu $y = x$, dobivamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2\cdot x^2}{x^2\cdot x^2+(x-x)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4} = \lim_{x\to 0} 1 = 1.$$

Dakle, pronašli smo dva različita puta po kojima se funkcija različito ponaša kada se duž tih putova približavamo točki $(0,0)$ pa zaključujemo da ne postoji $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Parcijalne derivacije realne funkcije dvije realne varijable. Neka je $z = f(x,y)$ realna funkcija dvije realne varijable i neka je f definirana na nekoj okolini točke (x_0,y_0). Parcijalna derivacija funkcije f po varijabli x u točki (x_0,y_0) je

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)}{\Delta x},$$

a parcijalna derivacija funkcije f po varijabli y u točki (x_0,y_0) je

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)}{\Delta y}.$$

Umjesto oznaka $\frac{\partial f}{\partial x}$ i $\frac{\partial f}{\partial y}$ često ćemo koristiti i oznake f_x i f_y. Kažemo da je funkcija f derivabilna u točki (x_0,y_0) ako u toj točki postoje obje parcijalne derivacije, tj. postoje brojevi $f_x(x_0,y_0)$ i $f_y(x_0,y_0)$.

Napomena. Ako funkciju $z = f(x, y)$ parcijalno deriviramo po varijabli x, tada na varijablu y gledamo kao na konstantu i pritom koristimo poznata pravila za deriviranje realnih funkcija jedne realne varijable. Drugim riječima, $\frac{\partial}{\partial x}(y) = 0$ i $\frac{\partial}{\partial x}\big(\varphi(y)\big) = 0$ pri čemu je φ proizvoljna derivabilna funkcija jedne realne varijable y.

Isto tako, ako funkciju $z = f(x, y)$ parcijalno deriviramo po varijabli y, tada na varijablu x gledamo kao na konstantu i pritom koristimo poznata pravila za deriviranje realnih funkcija jedne realne varijable. Drugim riječima, $\frac{\partial}{\partial y}(x) = 0$ i $\frac{\partial}{\partial y}\big(\psi(x)\big) = 0$ pri čemu je ψ proizvoljna derivabilna funkcija jedne realne varijable x.

Zadatak 21.

Odredite parcijalne derivacije sljedećih funkcija:

a) $f(x, y) = x^2 + y^2$ b) $z = \frac{y}{x}$ c) $z = \ln\left(\operatorname{tg}\frac{x}{y}\right)$

d) $z = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ e) $z = e^{\sin\frac{y}{x}}$ f) $z = x^y$

g) $z = \arcsin\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$

Rješenje.

a) $f_x(x, y) = \dfrac{\partial}{\partial x}\big(x^2\big) + \dfrac{\partial}{\partial x}\big(y^2\big) = 2x + 0 = 2x, \qquad f_y(x, y) = \dfrac{\partial}{\partial y}\big(x^2\big) + \dfrac{\partial}{\partial y}\big(y^2\big) = 0 + 2y = 2y$

b) $$z_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(y \cdot \frac{1}{x}\right) = y \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x}\right) = y \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(x^{-1}\right) = y \cdot \left(-x^{-2}\right) = -\frac{y}{x^2}$$

$$z_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x} \cdot y\right) = \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial}{\partial y}(y) = \frac{1}{x} \cdot 1 = \frac{1}{x}$$

c) $$z_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\ln\left(\operatorname{tg}\frac{x}{y}\right)\right) = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{y}} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{\cos^2\frac{x}{y}} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{y \sin\frac{x}{y}\cos\frac{x}{y}}$$

$$z_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\ln\left(\operatorname{tg}\frac{x}{y}\right)\right) = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{y}} \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{\cos^2\frac{x}{y}} \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{-x}{y^2 \sin\frac{x}{y}\cos\frac{x}{y}}$$

d) $$z_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \frac{\frac{\partial}{\partial x}(x) \cdot \sqrt{x^2+y^2} - x \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}^{\,2}} =$$

$$= \frac{1 \cdot \sqrt{x^2+y^2} - x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2} = \frac{\sqrt{x^2+y^2} - x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2x}{x^2+y^2} = \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$z_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \frac{\frac{\partial}{\partial y}(x) \cdot \sqrt{x^2+y^2} - x \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}^{\,2}} =$$

$$= \frac{0 \cdot \sqrt{x^2+y^2} - x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2} = \frac{-x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2y}{x^2+y^2} = \frac{-xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

e) $z_x = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(e^{\sin\frac{y}{x}}\right) = e^{\sin\frac{y}{x}} \cdot \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\sin\dfrac{y}{x}\right) = e^{\sin\frac{y}{x}} \cdot \cos\dfrac{y}{x} \cdot \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{y}{x}\right) = -\dfrac{y}{x^2}\, e^{\sin\frac{y}{x}} \cos\dfrac{y}{x}$

$$z_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{\sin\frac{y}{x}}\right) = e^{\sin\frac{y}{x}} \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(\sin\frac{y}{x}\right) = e^{\sin\frac{y}{x}} \cdot \cos\frac{y}{x} \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x}\, e^{\sin\frac{y}{x}} \cos\frac{y}{x}$$

f) Ako deriviramo parcijalno po varijabli x, tada na varijablu y gledamo kao na konstantu. U tom slučaju je u izrazu x^y eksponent konstantan pa kod parcijalnog deriviranja po varijabli x koristimo formulu $(x^n)' = nx^{n-1}$. Dobivamo

$$z_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^y\right) = yx^{y-1}.$$

Ako deriviramo parcijalno po varijabli y, tada na varijablu x gledamo kao na konstantu. U tom slučaju je u izrazu x^y baza konstantna, tj. radi se o eksponencijalnoj funkciji, pa kod parcijalnog deriviranja po varijabli y koristimo formulu $(a^x)' = a^x \ln a$. Dobivamo

$$z_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^y\right) = x^y \ln x.$$

g) $z_x = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\arcsin\sqrt{\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}} \cdot \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}\right) =$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{2y^2}{x^2+y^2}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{2y^2}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2\sqrt{x^2-y^2}} \cdot \frac{2x\cdot(x^2+y^2)-(x^2-y^2)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= \frac{x^2+y^2}{2\sqrt{2y^2}\sqrt{x^2-y^2}} \cdot \frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy^2}{\sqrt{2y^2}\sqrt{x^2-y^2}\,(x^2+y^2)} = \frac{x\cdot\sqrt{2y^2}^{\,2}}{\sqrt{2y^2}\sqrt{x^2-y^2}\,(x^2+y^2)} =$$

$$= \frac{x\sqrt{2y^2}}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2-y^2}} = \frac{\sqrt{2}\,x|y|}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2-y^2}}$$

$$z_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\arcsin\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}} \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{2y^2}{x^2+y^2}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}} \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{2y^2}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2\sqrt{x^2-y^2}} \cdot \frac{-2y\cdot(x^2+y^2)-(x^2-y^2)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= \frac{x^2+y^2}{2\sqrt{2y^2}\sqrt{x^2-y^2}} \cdot \frac{-4x^2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-2x^2y}{\sqrt{2y^2}\sqrt{x^2-y^2}\,(x^2+y^2)} = \frac{-2x^2y}{\sqrt{2}\sqrt{y^2}\sqrt{x^2-y^2}\,(x^2+y^2)} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{-\sqrt{2}\,x^2y}{|y|\,(x^2+y^2)\sqrt{x^2-y^2}}$$

Zadatak 22.
Izračunajte parcijalne derivacije funkcije $f(x,y)=\sqrt{xy+\frac{x}{y}}$ u točki $(2,1)$.

Rješenje.
Trebamo odrediti $f_x(2,1)$ i $f_y(2,1)$. Najprije odredimo parcijalne derivacije zadane funkcije, a nakon toga ćemo izračunati vrijednosti tih parcijalnih derivacija u točki $(2,1)$.

$$f_x(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{xy+\frac{x}{y}}\right)=\frac{1}{2\sqrt{xy+\frac{x}{y}}}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(xy+\frac{x}{y}\right)=\frac{1}{2\sqrt{xy+\frac{x}{y}}}\cdot\left(y+\frac{1}{y}\right)$$

$$f_y(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{xy+\frac{x}{y}}\right)=\frac{1}{2\sqrt{xy+\frac{x}{y}}}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(xy+\frac{x}{y}\right)=\frac{1}{2\sqrt{xy+\frac{x}{y}}}\cdot\left(x-\frac{x}{y^2}\right)$$

Konačno, vrijednosti parcijalnih derivacija u točki $(2,1)$ su

$$f_x(2,1)=\frac{1}{2\sqrt{2\cdot 1+\frac{2}{1}}}\cdot\left(1+\frac{1}{1}\right)=\frac{1}{2},\qquad f_y(2,1)=\frac{1}{2\sqrt{2\cdot 1+\frac{2}{1}}}\cdot\left(2-\frac{2}{1^2}\right)=0.$$

Parcijalne derivacije realne funkcije tri realne varijable. Neka je $u=f(x,y,z)$ realna funkcija tri realne varijable i neka je f definirana na nekoj okolini točke (x_0,y_0,z_0). Parcijalna derivacija funkcije f po varijabli x u točki (x_0,y_0,z_0) je

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0,z_0)-f(x_0,y_0,z_0)}{\Delta x}.$$

Parcijalna derivacija funkcije f po varijabli y u točki (x_0,y_0,z_0) je

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y,z_0)-f(x_0,y_0,z_0)}{\Delta y}.$$

Parcijalna derivacija funkcije f po varijabli z u točki (x_0,y_0,z_0) je

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(x_0,y_0,z_0+\Delta z)-f(x_0,y_0,z_0)}{\Delta z}.$$

Kažemo da je funkcija f derivabilna u točki (x_0,y_0,z_0) ako u toj točki postoje parcijalne derivacije $f_x(x_0,y_0,z_0)$, $f_y(x_0,y_0,z_0)$ i $f_z(x_0,y_0,z_0)$. Na analogni način se definiraju parcijalne derivacije realne funkcije n realnih varijabli.

Napomena. Ako funkciju $u=f(x,y,z)$ parcijalno deriviramo po varijabli x, tada na preostale varijable y i z gledamo kao na konstante i pritom koristimo poznata pravila za deriviranje realnih funkcija jedne realne varijable. Drugim riječima, $\frac{\partial}{\partial x}\big(\varphi(y,z)\big)=0$ pri čemu je φ proizvoljna derivabilna funkcija dvije realne varijable y i z.

Ako funkciju $u=f(x,y,z)$ parcijalno deriviramo po varijabli y, tada na varijable x i z gledamo kao na konstante i pritom koristimo poznata pravila za deriviranje realnih funkcija jedne realne varijable. Drugim riječima, $\frac{\partial}{\partial y}\big(\psi(x,z)\big)=0$ pri čemu je ψ proizvoljna derivabilna funkcija dvije realne varijable x i z.

Ako funkciju $u=f(x,y,z)$ parcijalno deriviramo po varijabli z, tada na varijable x i y gledamo kao na konstante i pritom koristimo poznata pravila za deriviranje realnih funkcija jedne realne varijable. Drugim riječima, $\frac{\partial}{\partial z}\big(\xi(x,y)\big)=0$ pri čemu je ξ proizvoljna derivabilna funkcija dvije realne varijable x i y.

Napomena. Općenito, ako realnu funkciju $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n realnih varijabli $x_1, x_2, \ldots, x_n$ parcijalno deriviramo po varijabli x_i, tada na sve preostale varijable $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ gledamo kao na konstante i pritom koristimo poznata pravila za deriviranje realnih funkcija jedne realne varijable.

Zadatak 23.
Odredite parcijalne derivacije funkcije $u = x^3y^2z + 2x - 3y + z + 5$.

Rješenje.
Radi se o funkciji tri varijable, tj. $u = u(x, y, z)$ pa kada parcijalno deriviramo po nekoj od varijabli na preostale varijable gledamo kao na konstante.

$$\begin{aligned}
u_x &= \frac{\partial}{\partial x}\left(x^3y^2z + 2x - 3y + z + 5\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(y^2z \cdot x^3\right) + \frac{\partial}{\partial x}(2x) + \frac{\partial}{\partial x}(-3y + z + 5) = \\
&= y^2z \cdot 3x^2 + 2 + 0 = 3x^2y^2z + 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_y &= \frac{\partial}{\partial y}\left(x^3y^2z + 2x - 3y + z + 5\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^3z \cdot y^2\right) + \frac{\partial}{\partial y}(2x) + \frac{\partial}{\partial y}(-3y) + \frac{\partial}{\partial y}(z + 5) = \\
&= x^3z \cdot 2y + 0 - 3 + 0 = 2x^3yz - 3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_z &= \frac{\partial}{\partial z}\left(x^3y^2z + 2x - 3y + z + 5\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(x^3y^2 \cdot z\right) + \frac{\partial}{\partial z}(2x - 3y) + \frac{\partial}{\partial z}(z) + \frac{\partial}{\partial z}(5) = \\
&= x^3y^2 + 0 + 1 + 0 = x^3y^2 + 1
\end{aligned}$$

Zadatak 24.
Odredite parcijalne derivacije funkcije $u = (xy)^z$.

Rješenje.
Radi se o funkciji tri varijable, tj. $u = u(x, y, z)$ pa kada parcijalno deriviramo po nekoj od varijabli na preostale varijable gledamo kao na konstante. Ako parcijalno deriviramo po varijabli x, tada je u izrazu $(xy)^z$ eksponent konstantan, a baza je složena funkcija. Stoga kod deriviranja koristimo formulu $(x^n)' = nx^{n-1}$ i formulu za derivaciju složene funkcije.

$$u_x = \frac{\partial}{\partial x}\Big((xy)^z\Big) = z(xy)^{z-1} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(xy) = z(xy)^{z-1} \cdot y = yz(xy)^{z-1}$$

Ako parcijalno deriviramo po varijabli y, tada je u izrazu $(xy)^z$ eksponent konstantan, a baza je složena funkcija. Stoga kod deriviranja koristimo formulu $(x^n)' = nx^{n-1}$ i formulu za derivaciju složene funkcije.

$$u_y = \frac{\partial}{\partial y}\Big((xy)^z\Big) = z(xy)^{z-1} \cdot \frac{\partial}{\partial y}(xy) = z(xy)^{z-1} \cdot x = xz(xy)^{z-1}$$

Ako parcijalno deriviramo po varijabli z, tada je u izrazu $(xy)^z$ baza konstantna, a eksponent nije konstantan pa se radi o eksponencijalnoj funkciji. Stoga kod deriviranja koristimo formulu $(a^x)' = a^x \ln a$.

$$u_z = \frac{\partial}{\partial z}\Big((xy)^z\Big) = (xy)^z \ln(xy)$$

Zadatak 25.
Dokažite da funkcija $z = \ln\left(x^2 + xy + y^2\right)$ zadovoljava parcijalnu diferencijalnu jednadžbu

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 2.$$

Rješenje.
Pronađimo najprije parcijalne derivacije funkcije z.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\ln\left(x^2 + xy + y^2\right)\Big) = \frac{1}{x^2 + xy + y^2} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + xy + y^2\right) = \frac{2x + y}{x^2 + xy + y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\ln\left(x^2 + xy + y^2\right)\Big) = \frac{1}{x^2 + xy + y^2} \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 + xy + y^2\right) = \frac{x + 2y}{x^2 + xy + y^2}$$

Stoga je

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = x \cdot \frac{2x + y}{x^2 + xy + y^2} + y \cdot \frac{x + 2y}{x^2 + xy + y^2} = \frac{2x^2 + 2xy + 2y^2}{x^2 + xy + y^2} = \frac{2(x^2 + xy + y^2)}{x^2 + xy + y^2} = 2$$

Parcijalne derivacije višeg reda. Parcijalne derivacije drugog reda funkcije $z = z(x, y)$ dobivaju se iz parcijalnih derivacija prvog reda $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$ primjenom operatora $\frac{\partial}{\partial x}$ i $\frac{\partial}{\partial y}$. U ovom slučaju imamo ukupno četiri mogućnosti

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

ili u drugim oznakama

$$z_{xx} = (z_x)_x \qquad z_{xy} = (z_x)_y \qquad z_{yx} = (z_y)_x \qquad z_{yy} = (z_y)_y.$$

Općenito, parcijalne derivacije n-tog reda funkcije $z = z(x, y)$ dobivaju se iz parcijalnih derivacija $(n-1)$-og reda primjenom operatora $\frac{\partial}{\partial x}$ i $\frac{\partial}{\partial y}$. Analogna situacija se javlja i kod realnih funkcija m realnih varijabli.

Zadatak 26.
Odredite parcijalne derivacije drugog reda funkcije $z = \ln\left(x^2 + xy + y^2\right)$.

Rješenje.
Najprije moramo pronaći parcijalne derivacije prvog reda z_x i z_y zadane funkcije.

$$z_x = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\ln\left(x^2 + xy + y^2\right)\Big) = \frac{1}{x^2 + xy + y^2} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + xy + y^2\right) = \frac{2x + y}{x^2 + xy + y^2}$$

$$z_y = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\ln\left(x^2 + xy + y^2\right)\Big) = \frac{1}{x^2 + xy + y^2} \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 + xy + y^2\right) = \frac{x + 2y}{x^2 + xy + y^2}$$

Da bismo dobili parcijalne derivacije drugog reda, svaku od dobivenih funkcija z_x i z_y trebamo parcijalno derivirati po varijablama x i y.

$$z_{xx} = (z_x)_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2x+y}{x^2+xy+y^2}\right) = \frac{\frac{\partial}{\partial x}(2x+y)\cdot(x^2+xy+y^2) - (2x+y)\cdot\frac{\partial}{\partial x}(x^2+xy+y^2)}{(x^2+xy+y^2)^2} =$$

$$= \frac{2(x^2+xy+y^2) - (2x+y)(2x+y)}{(x^2+xy+y^2)^2} = \frac{-2x^2-2xy+y^2}{(x^2+xy+y^2)^2}$$

$$z_{xy} = (z_x)_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2x+y}{x^2+xy+y^2}\right) = \frac{\frac{\partial}{\partial y}(2x+y)\cdot(x^2+xy+y^2) - (2x+y)\cdot\frac{\partial}{\partial y}(x^2+xy+y^2)}{(x^2+xy+y^2)^2} =$$

$$= \frac{1\cdot(x^2+xy+y^2) - (2x+y)(x+2y)}{(x^2+xy+y^2)^2} = \frac{-x^2-4xy-y^2}{(x^2+xy+y^2)^2}$$

$$z_{yx} = (z_y)_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x+2y}{x^2+xy+y^2}\right) = \frac{\frac{\partial}{\partial x}(x+2y)\cdot(x^2+xy+y^2) - (x+2y)\cdot\frac{\partial}{\partial x}(x^2+xy+y^2)}{(x^2+xy+y^2)^2} =$$

$$= \frac{1\cdot(x^2+xy+y^2) - (x+2y)(2x+y)}{(x^2+xy+y^2)^2} = \frac{-x^2-4xy-y^2}{(x^2+xy+y^2)^2}$$

$$z_{yy} = (z_y)_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x+2y}{x^2+xy+y^2}\right) = \frac{\frac{\partial}{\partial y}(x+2y)\cdot(x^2+xy+y^2) - (x+2y)\cdot\frac{\partial}{\partial y}(x^2+xy+y^2)}{(x^2+xy+y^2)^2} =$$

$$= \frac{2(x^2+xy+y^2) - (x+2y)(x+2y)}{(x^2+xy+y^2)^2} = \frac{x^2-2xy-2y^2}{(x^2+xy+y^2)^2}$$

Uočimo da je u ovom slučaju $z_{xy} = z_{yx}$, tj. mješovite parcijalne derivacije su jednake. To vrijedi i općenito uz neke dodatne uvjete na funkciju. Dakle, kod "lijepih" funkcija nije bitan redoslijed varijabli po kojemu ćemo vršiti parcijalna deriviranja zadane funkcije. Na primjer, ako netko kaže da "lijepu" funkciju $z = z(x, y)$ uzastopno deriviramo jedanput parcijalno po x i dvaput parcijalno po y, tada nije bitan redoslijed varijabli po kojemu ćemo obaviti parcijalna deriviranja jer ćemo uvijek dobiti isti rezultat, tj. $z_{xyy} = z_{yxy} = z_{yyx}$. Preciznije o tome govori Schwarzov teorem.

Teorem (Schwarzov teorem). *Neka je $z = f(x, y)$ funkcija koja u točki (x_0, y_0) i nekoj njezinoj okolini $\mathcal{O}$ ima parcijalne derivacije z_x i z_y. Ako na skupu $\mathcal{O}$ postoji i neprekidna je jedna od mješovitih parcijalnih derivacija, npr. z_{xy}, tada u točki (x_0, y_0) postoje obje mješovite parcijalne derivacije i one su jednake, tj. $z_{xy}(x_0, y_0) = z_{yx}(x_0, y_0)$.*

Definicija. Neka je $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n$, realna funkcija n realnih varijabli. Kažemo da je f klase C^r na $\mathcal{O}$ ako je f neprekidna na $\mathcal{O}$ i postoje sve parcijalne derivacije funkcije f do reda r koje su također neprekidne na skupu $\mathcal{O}$. Skup svih takvih funkcija označavamo s $C^r(\mathcal{O})$.

Schwarzov teorem se najčešće iskazuje u sljedećem obliku.

Teorem (Schwarzov teorem). *Neka je $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n$, realna funkcija n realnih varijabli $x_1, x_2, \ldots, x_n$ koja je klase C^2 na skupu $\mathcal{O}$. Tada za svaki $i \neq j$ je $f_{x_i x_j} = f_{x_j x_i}$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.*

Zadatak 27.
Izračunajte $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ ako je $z = \sqrt{2xy + y^2}$.

Rješenje.
Najprije moramo izračunati parcijalnu derivaciju funkcije z po varijabli x.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\sqrt{2xy+y^2}\Big) = \frac{1}{2\sqrt{2xy+y^2}} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(2xy+y^2\right) = \frac{2y}{2\sqrt{2xy+y^2}} = \frac{y}{\sqrt{2xy+y^2}}$$

Nakon toga računamo $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{\sqrt{2xy+y^2}}\right) = \frac{\frac{\partial}{\partial y}(y) \cdot \sqrt{2xy+y^2} - y \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{2xy+y^2}\right)}{\sqrt{2xy+y^2}^{\,2}} =$$

$$= \frac{1 \cdot \sqrt{2xy+y^2} - y \cdot \frac{1}{2\sqrt{2xy+y^2}} \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(2xy+y^2\right)}{2xy+y^2} = \frac{\sqrt{2xy+y^2} - y \cdot \frac{2x+2y}{2\sqrt{2xy+y^2}}}{2xy+y^2} =$$

$$= \frac{2xy+y^2 - y(x+y)}{(2xy+y^2)\sqrt{2xy+y^2}} = \frac{xy}{y(2x+y)\sqrt{2xy+y^2}} = \frac{x}{(2x+y)\sqrt{2xy+y^2}}$$

Zadatak 28.
Izračunajte $f_{xx}(0,0)$, $f_{xy}(0,0)$, $f_{yy}(0,0)$ ako je $f(x,y) = (1+x)^m(1+y)^n$.

Rješenje.
Najprije odredimo parcijalne derivacije prvog reda funkcije f.

$$f_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\Big((1+x)^m(1+y)^n\Big) = (1+y)^n \frac{\partial}{\partial x}\Big((1+x)^m\Big) = m(1+x)^{m-1}(1+y)^n$$

$$f_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\Big((1+x)^m(1+y)^n\Big) = (1+x)^m \frac{\partial}{\partial y}\Big((1+y)^n\Big) = n(1+x)^m(1+y)^{n-1}$$

Nakon toga određujemo parcijalne derivacije drugog reda.

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(m(1+x)^{m-1}(1+y)^n\Big) = m(1+y)^n \frac{\partial}{\partial x}\Big((1+x)^{m-1}\Big) = m(m-1)(1+x)^{m-2}(1+y)^n$$

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\Big(m(1+x)^{m-1}(1+y)^n\Big) = m(1+x)^{m-1} \frac{\partial}{\partial y}\Big((1+y)^n\Big) = mn(1+x)^{m-1}(1+y)^{n-1}$$

$$f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\Big(n(1+x)^m(1+y)^{n-1}\Big) = n(1+x)^m \frac{\partial}{\partial y}\Big((1+y)^{n-1}\Big) = n(n-1)(1+x)^m(1+y)^{n-2}$$

Konačno, izračunamo vrijednosti parcijalnih derivacija drugog reda u točki $(0,0)$.

$$f_{xx}(0,0) = m(m-1) \cdot (1+0)^{m-2} \cdot (1+0)^n = m(m-1)$$

$$f_{xy}(0,0) = mn \cdot (1+0)^{m-1} \cdot (1+0)^{n-1} = mn$$

$$f_{yy}(0,0) = n(n-1) \cdot (1+0)^m \cdot (1+0)^{n-2} = n(n-1)$$

Zadatak 29.
Odredite $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$ ako je $z = \sin(xy)$.

Rješenje.
Najprije odredimo $\frac{\partial z}{\partial x}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\sin(xy)\Big) = \cos(xy) \cdot \frac{\partial}{\partial x}(xy) = y\cos(xy)$$

Nakon toga odredimo $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\Big(y\cos(xy)\Big) = \frac{\partial}{\partial y}(y) \cdot \cos(xy) + y \cdot \frac{\partial}{\partial y}\Big(\cos(xy)\Big) =$$

$$= 1 \cdot \cos(xy) - y\sin(xy) \cdot \frac{\partial}{\partial y}(xy) = \cos(xy) - xy\sin(xy)$$

Na kraju odredimo $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$.

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\cos(xy) - xy\sin(xy)\Big) = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\cos(xy)\Big) - \frac{\partial}{\partial y}\Big(xy\sin(xy)\Big) =$$

$$= -\sin(xy) \cdot \frac{\partial}{\partial y}(xy) - \left[\frac{\partial}{\partial y}(xy) \cdot \sin(xy) + xy \cdot \frac{\partial}{\partial y}\Big(\sin(xy)\Big)\right] =$$

$$= -x\sin(xy) - \left[x\sin(xy) + xy\cos(xy) \cdot \frac{\partial}{\partial y}(xy)\right] = -2x\sin(xy) - x^2 y\cos(xy)$$

Zadatak 30.
Izračunajte $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$ ako je $u = x^2 y^3 z^4$.

Rješenje.
Funkcija u je realna funkcija tri realne varijable x, y i z. Najprije odredimo $\frac{\partial u}{\partial x}$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(x^2 y^3 z^4\Big) = y^3 z^4 \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\right) = 2xy^3 z^4$$

Nakon toga odredimo $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\Big(2xy^3 z^4\Big) = 2xz^4 \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(y^3\right) = 2xz^4 \cdot 3y^2 = 6xy^2 z^4$$

Na kraju izračunamo $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$.

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\Big(6xy^2 z^4\Big) = 6xy^2 \cdot \frac{\partial}{\partial z}\left(z^4\right) = 6xy^2 \cdot 4z^3 = 24xy^2 z^3$$

Zadatak 31.
Nađite sve parcijalne derivacije drugog reda funkcije $z = x^y$.

Rješenje.
Najprije odredimo parcijalne derivacije prvog reda.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\big(x^y\big) = yx^{y-1}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\big(x^y\big) = x^y \ln x$$

Nakon toga određujemo parcijalne derivacije drugog reda.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(yx^{y-1}\Big) = y \cdot \frac{\partial}{\partial x}\big(x^{y-1}\big) = y(y-1)x^{y-2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\Big(yx^{y-1}\Big) = \frac{\partial}{\partial y}(y) \cdot x^{y-1} + y \cdot \frac{\partial}{\partial y}\big(x^{y-1}\big) = x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\Big(x^y \ln x\Big) = \ln x \cdot \frac{\partial}{\partial y}\big(x^y\big) = \ln x \cdot x^y \ln x = x^y \ln^2 x$$

Iako znamo da je $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, uvjerimo se ipak još jedanput na konkretnom primjeru u istinitost Schwarzovog teorema.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(x^y \ln x\Big) = \frac{\partial}{\partial x}\big(x^y\big) \cdot \ln x + x^y \cdot \frac{\partial}{\partial x}\big(\ln x\big) = yx^{y-1}\ln x + x^{y-1}$$

Diferencijabilnost realne funkcije dvije realne varijable. Neka je $\mathcal{O}$ otvoren skup u $\mathbb{R}^2$. Kažemo da je funkcija $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ diferencijabilna u točki $(x_0, y_0) \in \mathcal{O}$ ako postoji linearni operator $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ takav da vrijedi

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - A(h,k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

Ako takav linearni operator A postoji, tada je on jedinstven i označavamo ga s $\mathrm{d}f(x_0, y_0)$ i zovemo diferencijal funkcije f u točki (x_0, y_0).

Teorem. *Neka je $\mathcal{O}$ otvoren skup u $\mathbb{R}^2$. Ako je $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ diferencijabilna u točki $(x_0, y_0) \in \mathcal{O}$, tada je ona i derivabilna u toj točki i vrijedi $\mathrm{d}f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\,\mathrm{d}x + f_y(x_0, y_0)\,\mathrm{d}y$.*

Diferencijal funkcije $z = f(x, y)$ u točki (x_0, y_0) iz domene je linearni operator $\mathrm{d}z(x_0, y_0) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ koji najbolje aproksimira prirast $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ funkcije u točki (x_0, y_0) od svih linearnih operatora $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Dakle, za jako male Δx i Δy vrijedi

$$\Delta z(x_0, y_0) \approx \mathrm{d}z(x_0, y_0)(\Delta x, \Delta y),$$

odnosno

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \approx f_x(x_0, y_0) \cdot \Delta x + f_y(x_0, y_0) \cdot \Delta y.$$

Totalni diferencijal funkcije $z = f(x, y)$ je preslikavanje $\mathrm{d}z$ koje svakoj točki (x_0, y_0) iz domene pridružuje diferencijal funkcije $z = f(x, y)$ u točki (x_0, y_0). Slikovito to možemo prikazati na sljedeći način:

$$\begin{array}{rcl} (x_0, y_0) & \xmapsto{\mathrm{d}z} & \mathrm{d}z(x_0, y_0) \\ \text{točka} & \xmapsto{\mathrm{d}z} & \text{linearni operator} \end{array}$$

Dakle, ako je $\mathrm{d}z$ totalni diferencijal funkcije $z = f(x,y)$, tada je $\mathrm{d}z(x_0,y_0)$ diferencijal funkcije $z = f(x,y)$ u točki (x_0,y_0), tj. $\mathrm{d}z(x_0,y_0)$ je linearni operator $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ koji najbolje aproksimira prirast funkcije $z = f(x,y)$ u točki (x_0,y_0). Nadalje, realni broj $\mathrm{d}z(x_0,y_0)(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)$ aproksimira prirast funkcije u točki (x_0,y_0) kada se od te točke pomaknemo duž x-osi za $\mathrm{d}x$ i duž y-osi za $\mathrm{d}y$ i na taj način dođemo u točku $(x_0+\mathrm{d}x, y_0+\mathrm{d}y)$. Ako je $\mathrm{d}x > 0$, tada smo se pomaknuli "udesno" duž x-osi (x-koordinata se poveća). Ako je $\mathrm{d}x < 0$, tada smo se pomaknuli "ulijevo" duž x-osi (x-koordinata se smanji). Ista priča također vrijedi za pomak $\mathrm{d}y$ duž y-osi.

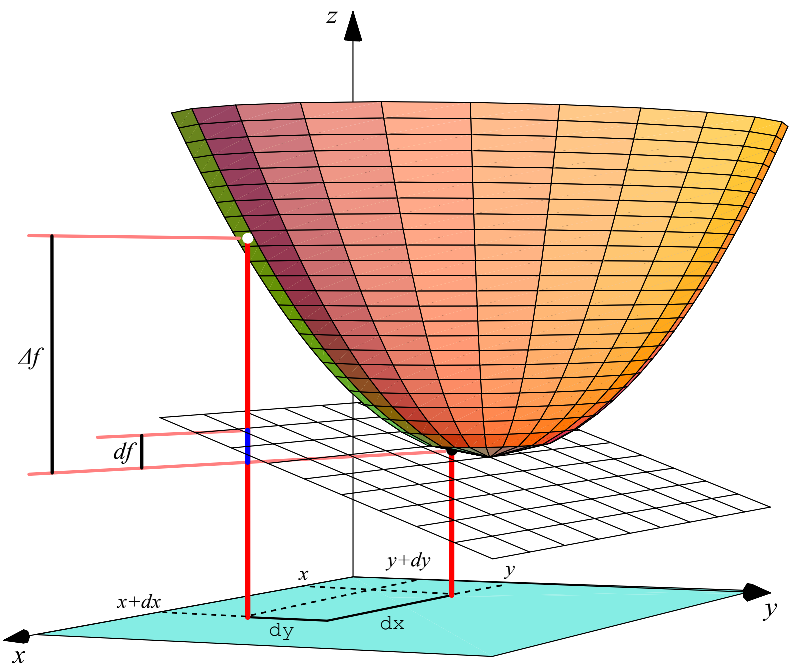
Totalni diferencijal funkcije $z = f(x,y)$ računa se po formuli

$$\mathrm{d}z = z_x\,\mathrm{d}x + z_y\,\mathrm{d}y,$$

a ukoliko želimo odrediti linearni operator koji najbolje aproksimira prirast funkcije u točki (x_0,y_0), tada samo moramo izračunati vrijednosti parcijalnih derivacija z_x i z_y u točki (x_0,y_0) pa dobivamo

$$\mathrm{d}z(x_0,y_0) = z_x(x_0,y_0)\,\mathrm{d}x + z_y(x_0,y_0)\,\mathrm{d}y. \tag{$\diamondsuit$}$$

Ukoliko želimo pomoću diferencijala aproksimirati prirast funkcije $z = f(x,y)$ u točki (x_0,y_0) uz pomake Δx i Δy, tada moramo izračunati vrijednost linearnog operatora $\mathrm{d}z(x_0,y_0)$ na vektoru $(\Delta x,\Delta y)$, tj. u formulu ($\diamondsuit$) uvrstiti $\mathrm{d}x = \Delta x$, $\mathrm{d}y = \Delta y$ i na taj način dobijemo broj $\mathrm{d}z(x_0,y_0)(\Delta x,\Delta y)$ koji aproksimira spomenuti prirast funkcije.



Zadatak 32.
Zadana je funkcija $z = x^2 + y^3$. Pomoću diferencijala aproksimirajte prirast funkcije u točki $(4,1)$ uz pomake $\Delta x = 0.5$ i $\Delta y = 0.1$. Nadalje, pomoću diferencijala aproksimirajte prirast funkcije u točki $(-2,3)$ uz pomake $\Delta x = -0.01$ i $\Delta y = 0.02$. U oba slučaja izračunajte stvarni prirast funkcije i usporedite ga s aproksimiranim prirastom pomoću diferencijala.

Rješenje.
Najprije moramo odrediti totalni diferencijal zadane funkcije po formuli

$$\mathrm{d}z = z_x\,\mathrm{d}x + z_y\,\mathrm{d}y.$$

Kako je $z_x = 2x$ i $z_y = 3y^2$, dobivamo

$$\mathrm{d}z = 2x\,\mathrm{d}x + 3y^2\,\mathrm{d}y. \tag{1}$$

Za aproksimaciju prirasta funkcije u točki $(4,1)$ trebamo odrediti diferencijal $\mathrm{d}z(4,1)$ u toj točki. Taj diferencijal ćemo dobiti tako da izračunamo vrijednosti parcijalnih derivacija z_x i z_y u točki $(4,1)$, tj. u (1) uvrstimo $x = 4$ i $y = 1$ pa dobivamo

$$\mathrm{d}z(4,1) = 8\,\mathrm{d}x + 3\,\mathrm{d}y. \tag{2}$$

Konačno, da bismo aproksimirali prirast funkcije u točki $(4,1)$ uz pomake $\Delta x = 0.5$ i $\Delta y = 0.1$, trebamo u (2) uvrstiti $\mathrm{d}x = 0.5$ i $\mathrm{d}y = 0.1$. Dobivamo

$$\mathrm{d}z(4,1)(0.5,0.1) = 8 \cdot 0.5 + 3 \cdot 0.1 = 4.3$$

pa je prirast funkcije z u točki $(4,1)$ uz pomake $\Delta x = 0.5$ i $\Delta y = 0.1$ približno jednak 4.3, tj. $\Delta z(4,1)(0.5,0.1) \approx 4.3$. Izračunajmo sada stvarni prirast funkcije u točki $(4,1)$ uz pomake $\Delta x = 0.5$ i $\Delta y = 0.1$.

$$\begin{aligned}
\Delta z(x,y)(\Delta x,\Delta y) &= z(x+\Delta x, y+\Delta y) - z(x,y)\\
\Delta z(4,1)(0.5,0.1) &= z(4+0.5, 1+0.1) - z(4,1)\\
\Delta z(4,1)(0.5,0.1) &= z(4.5,1.1) - z(4,1)\\
\Delta z(4,1)(0.5,0.1) &= \big(4.5^2 + 1.1^3\big) - \big(4^2 + 1^3\big)\\
\Delta z(4,1)(0.5,0.1) &= \big(20.25 + 1.331\big) - \big(16 + 1\big)\\
\Delta z(4,1)(0.5,0.1) &= 4.581
\end{aligned}$$

Dakle, stvarni prirast funkcije z u točki $(4,1)$ jednak je 4.581, a pomoću diferencijala smo dobili da je taj prirast približno jednak 4.3. Uočavamo da imamo grešku već na prvoj decimali, ali to je zbog toga jer su pomaci $\Delta x = 0.5$ i $\Delta y = 0.1$ veliki.

Za aproksimaciju prirasta funkcije u točki $(-2,3)$ trebamo odrediti diferencijal $\mathrm{d}z(-2,3)$ u toj točki. Taj diferencijal ćemo dobiti tako da izračunamo vrijednosti parcijalnih derivacija z_x i z_y u točki $(-2,3)$, tj. u (1) uvrstimo $x = -2$ i $y = 3$ pa dobivamo

$$\mathrm{d}z(-2,3) = -4\,\mathrm{d}x + 27\,\mathrm{d}y. \tag{3}$$

Da bismo aproksimirali prirast funkcije u točki $(-2,3)$ uz pomake $\Delta x = -0.01$ i $\Delta y = 0.02$, trebamo u (3) uvrstiti $\mathrm{d}x = -0.01$ i $\mathrm{d}y = 0.02$. Dobivamo

$$\mathrm{d}z(-2,3)(-0.01,0.02) = -4 \cdot (-0.01) + 27 \cdot 0.02 = 0.58$$

pa je prirast funkcije z u točki $(-2,3)$ uz pomake $\Delta x = -0.01$ i $\Delta y = 0.02$ približno jednak 0.58, tj. $\Delta z(-2,3)(-0.01,0.02) \approx 0.58$. Stvarni prirast funkcije z u točki $(-2,3)$ uz pomake $\Delta x = -0.01$

i $\Delta y = 0.02$ je

$$\begin{aligned}
\Delta z(x,y)(\Delta x, \Delta y) &= z(x+\Delta x, y+\Delta y) - z(x,y)\\
\Delta z(-2,3)(-0.01,0.02) &= z(-2-0.01, 3+0.02) - z(-2,3)\\
\Delta z(-2,3)(-0.01,0.02) &= z(-2.01, 3.02) - z(-2,3)\\
\Delta z(-2,3)(-0.01,0.02) &= \big((-2.01)^2 + 3.02^3\big) - \big((-2)^2 + 3^3\big)\\
\Delta z(-2,3)(-0.01,0.02) &= \big(4.0401 + 27.543608\big) - \big(4 + 27\big)\\
\Delta z(-2,3)(-0.01,0.02) &= 0.583708
\end{aligned}$$

Dakle, stvarni prirast funkcije z u točki $(-2,3)$ jednak je 0.583708, a pomoću diferencijala smo dobili da je taj prirast približno jednak 0.58. Uočavamo da imamo grešku tek na trećoj decimali, a to je zbog toga jer pomaci $\Delta x = -0.01$ i $\Delta y = 0.02$ nisu pretjerano veliki.

Zadatak 33.
Odredite totalne diferencijale sljedećih funkcija:

a) $z = x^3 + y^3 - 3xy$ b) $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ c) $z = \frac{x}{y^2}$ d) $z = \ln\big(x^2+y^2\big)$

Rješenje.
Totalni diferencijal funkcije $z = f(x,y)$ se računa po formuli $\mathrm{d}z = z_x\,\mathrm{d}x + z_y\,\mathrm{d}y$.

a) $z_x = 3x^2 - 3y, \quad z_y = 3y^2 - 3x, \quad \mathrm{d}z = \big(3x^2-3y\big)\,\mathrm{d}x + \big(3y^2-3x\big)\,\mathrm{d}y$

b) $z_x = \dfrac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \dfrac{-y}{x^2} = \dfrac{x^2}{x^2+y^2} \cdot \dfrac{-y}{x^2} = \dfrac{-y}{x^2+y^2}, \quad z_y = \dfrac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{x^2}{x^2+y^2} \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{x}{x^2+y^2}$

$\mathrm{d}z = \dfrac{-y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x + \dfrac{x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y$

c) $z_x = \dfrac{1}{y^2}, \quad z_y = \dfrac{-2x}{y^3}, \quad \mathrm{d}z = \dfrac{1}{y^2}\,\mathrm{d}x - \dfrac{2x}{y^3}\,\mathrm{d}y$

d) $z_x = \dfrac{2x}{x^2+y^2}, \quad z_y = \dfrac{2y}{x^2+y^2}, \quad \mathrm{d}z = \dfrac{2x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x + \dfrac{2y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y$

Zadatak 34.
Odredite totalni diferencijal funkcije $z = \sin(xy)$ i njezin diferencijal u točki $(\pi, 1)$.

Rješenje.
Kako je $z_x = y\cos(xy)$ i $z_y = x\cos(xy)$, slijedi da je totalni diferencijal funkcije z jednak

$$\mathrm{d}z = y\cos(xy)\,\mathrm{d}x + x\cos(xy)\,\mathrm{d}y. \tag{$\clubsuit$}$$

Da bismo odredili diferencijal funkcije z u točki $(\pi,1)$, trebamo samo u $(\clubsuit)$ uvrstiti $x=\pi$ i $y=1$ pa dobivamo

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}z(\pi,1) &= 1\cdot\cos(\pi\cdot 1)\,\mathrm{d}x + \pi\cdot\cos(\pi\cdot 1)\,\mathrm{d}y\\
\mathrm{d}z(\pi,1) &= -\,\mathrm{d}x - \pi\,\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

Zadatak 35.
Visina stošca je 30 cm, a polumjer baze 10 cm. Kako će se promijeniti volumen stošca ako povećamo visinu za 3 mm, a polumjer baze smanjimo za 1 mm? Odredite točnu promjenu volumena i približnu promjenu volumena pomoću diferencijala.

Rješenje.
Volumen stošca je funkcija dvije varijable jer ovisi o visini stošca H i polumjeru baze R, tj. preciznije $V(H,R) = \frac{\pi}{3}R^2H$. Zadatak se svodi na određivanje prirasta funkcije volumena stošca u točki (30,10) za pomake $\Delta H = 0.3$ i $\Delta R = -0.1$ (sve radimo u centimetrima, a naravno mogli smo raditi i u milimetrima). Pomak ΔH je pozitivan jer visinu povećavamo, a pomak ΔR je negativan jer polumjer baze smanjujemo. Odredimo najprije točnu promjenu volumena.

$$\begin{aligned}
\Delta V(H,R)(\Delta H,\Delta R) &= V(H+\Delta H, R+\Delta R) - V(H,R)\\
\Delta V(30,10)(0.3,-0.1) &= V(30+0.3, 10-0.1) - V(30,10)\\
\Delta V(30,10)(0.3,-0.1) &= V(30.3, 9.9) - V(30,10)\\
\Delta V(30,10)(0.3,-0.1) &= \frac{\pi}{3}\cdot 9.9^2\cdot 30.3 - \frac{\pi}{3}\cdot 10^2\cdot 30\\
\Delta V(30,10)(0.3,-0.1) &\approx -31.726944
\end{aligned}$$

Da bismo procijenili promjenu volumena pomoću diferencijala, najprije moramo odrediti totalni diferencijal funkcije V. Znamo da je

$$\mathrm{d}V = \frac{\partial V}{\partial H}\,\mathrm{d}H + \frac{\partial V}{\partial R}\,\mathrm{d}R.$$

Kako su parcijalne derivacije funkcije V jednake $\frac{\partial V}{\partial H} = \frac{\pi}{3}R^2$ i $\frac{\partial V}{\partial R} = \frac{2}{3}\pi RH$, dobivamo

$$\mathrm{d}V = \tfrac{\pi}{3}R^2\,\mathrm{d}H + \tfrac{2}{3}\pi RH\,\mathrm{d}R. \tag{$\star$}$$

Ako u ($\star$) uvrstimo $H = 30$ i $R = 10$, dobivamo diferencijal funkcije V u točki $(30,10)$.

$$\mathrm{d}V(30,10) = \tfrac{100}{3}\pi\,\mathrm{d}H + 200\pi\,\mathrm{d}R. \tag{$*$}$$

Konačno, da bismo aproksimirali promjenu volumena pomoću diferencijala, uvrstimo u ($*$) $\mathrm{d}H = 0.3$ i $\mathrm{d}R = -0.1$.

$$\mathrm{d}V(30,10)(0.3,-0.1) = \tfrac{100}{3}\pi\cdot 0.3 + 200\pi\cdot(-0.1) \approx -31.415927$$

Dakle, ukoliko stošcu visine 30 cm i polumjera baze 10 cm povećamo visinu za 3 mm i polumjer baze smanjimo za 1 mm, njegov volumen će se smanjiti za 31.726944 cm^3. Pomoću diferencijala smo dobili da će se njegov volumen približno smanjiti za 31.415927 cm^3. Iako je greška već na prvoj decimali, to i nije toliko loša aproksimacija za neku brzu i grubu procjenu u praksi.

Zadatak 36.
Pomoću diferencijala izračunajte približno $1.02^{3.01}$.

Rješenje.
Promotrimo funkciju $f(x,y) = x^y$. Naš je zadatak da izračunamo približno $f(1.02, 3.01)$. Sigurno je vrlo jednostavno izračunati $f(1,3)$ jer je $f(1,3) = 1^3 = 1$. Sada je ideja da prirast funkcije f u

točki $(1,3)$ za pomake $\Delta x = 0.02$ i $\Delta y = 0.01$ aproksimiramo pomoću diferencijala i na temelju toga odredimo koliko je približno $1.02^{3.01}$. Znamo da za male Δx i Δy vrijedi

$$\Delta f(x_0, y_0) \approx \mathrm{d}f(x_0, y_0)(\Delta x, \Delta y),$$

odnosno

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \approx f_x(x_0, y_0) \cdot \Delta x + f_y(x_0, y_0) \cdot \Delta y.$$

Iz posljednje relacije dobivamo da je

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \cdot \Delta x + f_y(x_0, y_0) \cdot \Delta y.$$

U našem slučaju je $x_0 = 1$, $y_0 = 3$, $\Delta x = 0.02$, $\Delta y = 0.01$ pa dobivamo

$$f(1.02, 3.01) \approx f(1,3) + f_x(1,3) \cdot 0.02 + f_y(1,3) \cdot 0.01.$$

Znamo da je $f(1,3) = 1$ pa slijedi

$$1.02^{3.01} \approx 1 + f_x(1,3) \cdot 0.02 + f_y(1,3) \cdot 0.01. \qquad (\triangle)$$

Preostaje nam još da odredimo parcijalne derivacije funkcije f u točki $(1,3)$. Kako je $f_x = yx^{y-1}$ i $f_y = x^y \ln x$, slijedi da je $f_x(1,3) = 3$, $f_y(1,3) = 0$. Uvrstimo li dobivene vrijednosti u $(\triangle)$, dobivamo

$$1.02^{3.01} \approx 1 + 3 \cdot 0.02 + 0 \cdot 0.01 = 1.06.$$

Dakle, dobili smo da je $1.02^{3.01} \approx 1.06$. Uočite da je dobivena aproksimacija točna na dvije decimale jer je $1.02^{3.01} \approx 1.06141816787$. Razlog tome je što su pomaci Δx i Δy bili relativno mali.

Napomena. Ako je funkcija $z = f(x,y)$ diferencijabilna u nekoj točki, tada je ona i derivabilna u toj točki. Obrnuto ipak ne vrijedi. Naime, ukoliko je funkcija $z = f(x,y)$ derivabilna u nekoj točki, ona ne mora biti nužno i diferencijabilna u toj točki. Postojanje parcijalnih derivacija funkcije $z = f(x,y)$ ne povlači diferencijabilnost te funkcije. Zašto? Naime, ako se sjetimo formule za diferencijal, $\mathrm{d}z(x_0, y_0) = z_x(x_0, y_0)\,\mathrm{d}x + z_y(x_0, y_0)\,\mathrm{d}y$, u njoj se javljaju parcijalne derivacije funkcije $z = f(x,y)$. Možemo se onda čuditi kako diferencijal ne postoji kad ga možemo izračunati po gornjoj formuli ukoliko funkcija ima parcijalne derivacije u točki (x_0, y_0). Istina je da mi uvrštavanjem vrijednosti parcijalnih derivacija u promatranu formulu dobivamo neki linearni operator, ali je pitanje da li taj linearni operator zaista jako dobro aproksimira prirast funkcije u točki (x_0, y_0) jer jedino ga u tom slučaju imamo pravo zvati diferencijalom funkcije $z = f(x,y)$ u točki (x_0, y_0). Međutim, kod funkcija dviju varijabli se može dogoditi da takav linearni operator neće dobro aproksimirati prirast funkcije usprkos tome što funkcija ima obje parcijalne derivacije. Kod realnih funkcija jedne varijable $y = f(x)$ se to ne može dogoditi, tj. derivabilnost i diferencijabilnost takvih funkcija su ekvivalentni pojmovi. Drugim riječima, ako je funkcija $y = f(x)$ derivabilna u točki x_0, tada je ona diferencijabilna u toj točki i vrijedi $\mathrm{d}y(x_0) = f'(x_0)\,\mathrm{d}x$. Neprekidnost parcijalnih derivacija funkcije $z = f(x,y)$ ipak povlači i njezinu diferencijabilnost. O tome govori sljedeći teorem.

Teorem. *Neka je $\mathcal{O}$ otvoren skup u $\mathbb{R}^2$. Neka je $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ funkcija za koju postoje obje parcijalne derivacije f_x i f_y u točki $(x_0, y_0) \in \mathcal{O}$. Ako su parcijalne derivacije f_x i f_y neprekidne u točki (x_0, y_0), tada je funkcija f diferencijabilna u točki (x_0, y_0).*

Kao i kod funkcija jedne varijable, tako je i kod funkcija dviju varijabli neprekidnost nužni uvjet za diferencijabilnost. Preciznije o tome govori sljedeći teorem.

Teorem. *Neka je $\mathcal{O}$ otvoren skup u $\mathbb{R}^2$. Ako je $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ diferencijabilna u točki $(x_0, y_0) \in \mathcal{O}$, tada je f neprekidna u točki (x_0, y_0).*

Zadatak 37.

Zadana je funkcija

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{ako je } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{ako je } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Dokažite da funkcija f ima obje parcijalne derivacije u točki $(0,0)$, ali f ipak nije diferencijabilna u točki $(0,0)$.

Rješenje.

Pokažimo najprije da funkcija zadana funkcija ima obje parcijalne derivacije u točki $(0,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,0+k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{0-0}{k} = 0$$

Dakle, funkcija f ima parcijalne derivacije u točki $(0,0)$ i vrijedi $f_x(0,0) = 0$, $f_y(0,0) = 0$. Međutim, funkcija f ipak nije diferencijabilna u točki $(0,0)$ jer ona ima prekid u toj točki prema 18. zadatku na stranici 14.

Zadatak 38.

Dokažite da funkcija $z = \sqrt[3]{xy}$ ima u točki $(0,0)$ obje parcijalne derivacije, ali ona nije diferencijabilna u toj točki. Pokažite da obje parcijalne derivacije zadane funkcije imaju prekid u točki $(0,0)$.

Rješenje.

Pokažimo najprije da funkcija z ima obje parcijalne derivacije u točki $(0,0)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{z(0+h,0) - z(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{z(h,0) - z(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{h\cdot 0} - \sqrt[3]{0\cdot 0}}{h} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{z(0,0+k) - z(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{z(0,k) - z(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{\sqrt[3]{0\cdot k} - \sqrt[3]{0\cdot 0}}{k} = 0$$

Dakle, funkcija z ima parcijalne derivacije u točki $(0,0)$ i vrijedi $z_x(0,0) = 0$, $z_y(0,0) = 0$. Kad bi funkcija z bila diferencijabilna u točki $(0,0)$, tada bi njezin diferencijal u toj točki bio jednak

$$\mathrm{d}z(0,0) = z_x(0,0)\,\mathrm{d}x + z_y(0,0)\,\mathrm{d}y$$

odnosno

$$\mathrm{d}z(0,0) = 0\cdot \mathrm{d}x + 0\cdot \mathrm{d}y.$$

Zaključujemo da ukoliko bi funkcija z bila diferencijabilna u točki $(0,0)$, tada bi njezin diferencijal u toj točki morao biti jednak nuloperatoru, tj. $\mathrm{d}z(0,0) = \mathbf{0}$. Provjerimo da li taj linearni operator dobro aproksimira prirast funkcije u točki $(0,0)$. Po definiciji diferencijabilnosti mora vrijediti

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{z(0+h,0+k) - z(0,0) - \mathrm{d}z(0,0)(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$$

Pokažimo da to ipak nije istina u ovom slučaju iz čega će slijediti da linearni operator $\mathrm{d}z(0,0) = \mathbf{0}$ ne aproksimira dobro prirast funkcije u točki $(0,0)$ pa funkcija z nije diferencijabilna u toj točki. Naime,

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{z(0+h,0+k) - z(0,0) - \mathrm{d}z(0,0)(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{z(h,k) - z(0,0) - (0\cdot h + 0\cdot k)}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\sqrt[3]{hk} - \sqrt[3]{0\cdot 0} - 0}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\sqrt[3]{hk}}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

Ako stavimo $h = 0$, dobivamo

$$\lim_{k\to 0} \frac{\sqrt[3]{0\cdot k}}{\sqrt{0^2+k^2}} = \lim_{k\to 0} 0 = 0.$$

Ako stavimo $h = k$, dobivamo

$$\lim_{k\to 0} \frac{\sqrt[3]{k\cdot k}}{\sqrt{k^2+k^2}} = \lim_{k\to 0} \frac{\sqrt[3]{k^2}}{\sqrt{2k^2}} = \lim_{k\to 0} \sqrt[6]{\frac{k^4}{8k^6}} = \lim_{k\to 0} \sqrt[6]{\frac{1}{8k^2}} = \infty.$$

Zaključujemo da $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\sqrt[3]{hk}}{\sqrt{h^2+k^2}}$ ne postoji pa funkcija z zaista nije diferencijabilna u točki $(0,0)$.

Konačno, pokažimo da obje parcijalne derivacije imaju prekid u točki $(0,0)$. Da bi funkcija $\frac{\partial z}{\partial x}$ bila neprekidna u točki $(0,0)$ mora vrijediti

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial z}{\partial x}(0,0)$$

odnosno $\big($jer smo već ranije izračunali da je $\frac{\partial z}{\partial x}(0,0) = 0\big)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = 0.$$

Pokažimo da to ipak nije tako u ovom slučaju iz čega će slijediti da funkcija $\frac{\partial z}{\partial x}$ ima prekid u točki $(0,0)$. Računanjem dobivamo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt[3]{xy}\right) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y}{3\sqrt[3]{(xy)^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{3}\cdot\sqrt[3]{\frac{y^3}{x^2y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{3}\cdot\sqrt[3]{\frac{y}{x^2}}$$

Ako stavimo $y = 0$, dobivamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{3}\cdot\sqrt[3]{\frac{0}{x^2}} = \lim_{x\to 0} 0 = 0.$$

Ako stavimo $y = x$, dobivamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{3}\cdot\sqrt[3]{\frac{x}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{3}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{x}} = \pm\infty.$$

Zaključujemo da $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial z}{\partial x}(x,y)$ ne postoji pa funkcija $\frac{\partial z}{\partial x}$ ima prekid u točki $(0,0)$.

Da bi funkcija $\frac{\partial z}{\partial y}$ bila neprekidna u točki $(0,0)$ mora vrijediti

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial z}{\partial y}(0,0)$$

odnosno $\big($jer smo već ranije izračunali da je $\frac{\partial z}{\partial y}(0,0) = 0\big)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = 0.$$

Pokažimo da to ipak nije tako u ovom slučaju iz čega će slijediti da funkcija $\frac{\partial z}{\partial y}$ ima prekid u točki $(0,0)$. Računanjem dobivamo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt[3]{xy}\right) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{3\sqrt[3]{(xy)^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{x^3}{x^2y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{x}{y^2}}$$

Ako stavimo $x = 0$, dobivamo

$$\lim_{y\to 0} \frac{1}{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{0}{y^2}} = \lim_{y\to 0} 0 = 0.$$

Ako stavimo $y = x$, dobivamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{x}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{x}} = \pm\infty.$$

Zaključujemo da $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial z}{\partial y}(x,y)$ ne postoji pa funkcija $\frac{\partial z}{\partial y}$ ima prekid u točki $(0,0)$.

Zadatak 39.
Dokažite da funkcija $z = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ ima u točki $(0,0)$ obje parcijalne derivacije, ali ona nije diferencijabilna u toj točki. Pokažite da obje parcijalne derivacije zadane funkcije imaju prekid u točki $(0,0)$.

Rješenje.
Pokažimo najprije da funkcija z ima obje parcijalne derivacije u točki $(0,0)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{z(0+h,0) - z(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{z(h,0) - z(0,0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{h^3 + 0^3} - \sqrt[3]{0^3 + 0^3}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{h^3}}{h} = 1$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{z(0,0+k) - z(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{z(0,k) - z(0,0)}{k} =$$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{\sqrt[3]{0^3 + k^3} - \sqrt[3]{0^3 + 0^3}}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{\sqrt[3]{k^3}}{k} = 1$$

Dakle, funkcija z ima parcijalne derivacije u točki $(0,0)$ i vrijedi $z_x(0,0) = 1$, $z_y(0,0) = 1$. Kad bi funkcija z bila diferencijabilna u točki $(0,0)$, tada bi njezin diferencijal u toj točki bio jednak

$$\mathrm{d}z(0,0) = z_x(0,0)\,\mathrm{d}x + z_y(0,0)\,\mathrm{d}y$$

odnosno

$$\mathrm{d}z(0,0) = 1 \cdot \mathrm{d}x + 1 \cdot \mathrm{d}y.$$

Zaključujemo da ukoliko bi funkcija z bila diferencijabilna u točki $(0,0)$, tada bi njezin diferencijal u toj točki morao biti jednak $\mathrm{d}z(0,0) = \mathrm{d}x + \mathrm{d}y$. Provjerimo da li taj linearni operator dobro aproksimira prirast funkcije u točki $(0,0)$. Po definiciji diferencijabilnosti mora vrijediti

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{z(0+h,0+k) - z(0,0) - \mathrm{d}z(0,0)(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$$

Pokažimo da to ipak nije istina iz čega će slijediti da linearni operator $\mathrm{d}z(0,0) = \mathrm{d}x + \mathrm{d}y$ ne aproksimira dobro prirast funkcije u točki $(0,0)$ pa funkcija z nije diferencijabilna u toj točki.

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{z(0+h,0+k) - z(0,0) - \mathrm{d}z(0,0)(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{z(h,k) - z(0,0) - (h+k)}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\sqrt[3]{h^3+k^3} - \sqrt[3]{0^3+0^3} - h - k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\sqrt[3]{h^3+k^3} - h - k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

Ako stavimo $h = 0$, dobivamo

$$\lim_{k\to 0} \frac{\sqrt[3]{0^3+k^3} - 0 - k}{\sqrt{0^2+k^2}} = \lim_{k\to 0} \frac{0}{\sqrt{k^2}} = 0.$$

Ako stavimo $h = k$, dobivamo

$$\lim_{k\to 0} \frac{\sqrt[3]{k^3+k^3} - k - k}{\sqrt{k^2+k^2}} = \lim_{k\to 0} \frac{\sqrt[3]{2k^3} - 2k}{\sqrt{2k^2}} = \lim_{k\to 0} \frac{\left(\sqrt[3]{2} - 2\right)k}{\sqrt{2}\,|k|} \quad \leftarrow \text{ne postoji}$$

Zaključujemo da $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\sqrt[3]{h^3+k^3}-h-k}{\sqrt{h^2+k^2}}$ ne postoji pa funkcija z zaista nije diferencijabilna u točki $(0,0)$. Konačno, pokažimo da obje parcijalne derivacije imaju prekid u točki $(0,0)$. Da bi funkcija $\frac{\partial z}{\partial x}$ bila neprekidna u točki $(0,0)$ mora vrijediti

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial z}{\partial x}(0,0)$$

odnosno $\left(\text{jer smo već ranije izračunali da je } \frac{\partial z}{\partial x}(0,0) = 1\right)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = 1.$$

Pokažimo da to ipak nije tako u ovom slučaju iz čega će slijediti da funkcija $\frac{\partial z}{\partial x}$ ima prekid u točki $(0,0)$. Računanjem dobivamo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt[3]{x^3+y^3}\right) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3+y^3)^2}}$$

Ako stavimo $x = 0$, dobivamo

$$\lim_{y\to 0} \frac{0^2}{\sqrt[3]{(0^3+y^3)^2}} = \lim_{y\to 0} 0 = 0.$$

Ako stavimo $y = x$, dobivamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3+x^3)^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sqrt[3]{4x^6}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sqrt[3]{4}x^2} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}.$$

Zaključujemo da $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial z}{\partial x}(x,y)$ ne postoji pa funkcija $\frac{\partial z}{\partial x}$ ima prekid u točki $(0,0)$.

Da bi funkcija $\frac{\partial z}{\partial y}$ bila neprekidna u točki $(0,0)$ mora vrijediti

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial z}{\partial y}(0,0)$$

odnosno (jer smo već ranije izračunali da je $\frac{\partial z}{\partial y}(0,0) = 1$)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = 1.$$

Pokažimo da to ipak nije tako u ovom slučaju iz čega će slijediti da funkcija $\frac{\partial z}{\partial y}$ ima prekid u točki $(0,0)$. Računanjem dobivamo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt[3]{x^3+y^3}\right) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{\sqrt[3]{(x^3+y^3)^2}}$$

Ako stavimo $y = 0$, dobivamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{0^2}{\sqrt[3]{(x^3+0^3)^2}} = \lim_{x\to 0} 0 = 0.$$

Ako stavimo $y = x$, dobivamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3+x^3)^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sqrt[3]{4x^6}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sqrt[3]{4}x^2} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}.$$

Zaključujemo da $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial z}{\partial y}(x,y)$ ne postoji pa funkcija $\frac{\partial z}{\partial y}$ ima prekid u točki $(0,0)$.

Napomena. Ako funkcija $z = f(x,y)$ ima neprekidne parcijalne derivacije u točki (x_0,y_0), tada je ona diferencijabilna u toj točki. Dakle, neprekidnost parcijalnih derivacija je dovoljan uvjet za diferencijabilnost, ali taj uvjet nije i nužan uvjet. Naime, moguće je da funkcija z bude diferencijabilna u točki (x_0,y_0) iako parcijalne derivacije z_x i z_y imaju prekid u točki (x_0,y_0). Drugim riječima, ako parcijalne derivacije imaju prekid u nekoj točki, to još uvijek ne znači da funkcija možda nije diferencijabilna u toj točki, jedino što to ne možemo sa sigurnošću tvrditi, nego moramo posebno provjeriti.

Zadatak 40.
Zadana je funkcija

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & \text{ako je } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{ako je } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Dokažite da funkcija f ima obje parcijalne derivacije u točki $(0,0)$ i da je diferencijabilna u točki $(0,0)$. Pokažite da obje parcijalne derivacije zadane funkcije imaju prekid u točki $(0,0)$ i da su neomeđene na svakoj okolini točke $(0,0)$.

Rješenje.

Pokažimo najprije da funkcija f ima obje parcijalne derivacije u točki $(0,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2\sin\frac{1}{h^2}}{h}=\lim_{h\to 0}\left(h\sin\frac{1}{h^2}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{k^2\sin\frac{1}{k^2}}{k}=\lim_{k\to 0}\left(k\sin\frac{1}{k^2}\right)$$

Ocijenimo sada izraz $u\sin\frac{1}{u^2}$ za male vrijednosti u.

$$\left|u\sin\frac{1}{u^2}\right|=|u|\cdot\left|\sin\frac{1}{u^2}\right|\leqslant |u|\cdot 1=|u|\to 0,\ \text{kada } u\to 0$$

Zaključujemo da je $\lim\limits_{u\to 0}\left(u\sin\frac{1}{u^2}\right)=0$ pa funkcija f ima parcijalne derivacije u točki $(0,0)$ i vrijedi $f_x(0,0)=0$, $f_y(0,0)=0$. Kad bi funkcija f bila diferencijabilna u točki $(0,0)$, tada bi njezin diferencijal u toj točki bio jednak

$$\mathrm{d}f(0,0)=f_x(0,0)\,\mathrm{d}x+f_y(0,0)\,\mathrm{d}y$$

odnosno

$$\mathrm{d}f(0,0)=0\cdot\mathrm{d}x+0\cdot\mathrm{d}y.$$

Zaključujemo da ukoliko bi funkcija f bila diferencijabilna u točki $(0,0)$, tada bi njezin diferencijal u toj točki morao biti jednak nuloperatoru, tj. $\mathrm{d}f(0,0)=\mathbf{0}$. Provjerimo da li taj linearni operator dobro aproksimira prirast funkcije u točki $(0,0)$. Po definiciji diferencijabilnosti mora vrijediti

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(0+h,0+k)-f(0,0)-\mathrm{d}f(0,0)(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}=0.$$

Pokažimo da je to istina u ovom slučaju iz čega će slijediti da linearni operator $\mathrm{d}z(0,0)=\mathbf{0}$ dobro aproksimira prirast funkcije u točki $(0,0)$ pa funkcija f jest diferencijabilna u toj točki. Naime,

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(0+h,0+k)-f(0,0)-\mathrm{d}f(0,0)(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(h,k)-f(0,0)-(0\cdot h+0\cdot k)}{\sqrt{h^2+k^2}}=$$

$$=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\left(h^2+k^2\right)\sin\frac{1}{h^2+k^2}-0-0}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\sqrt{h^2+k^2}\sin\frac{1}{h^2+k^2}$$

Nadalje, zbog

$$\left|\sqrt{h^2+k^2}\sin\frac{1}{h^2+k^2}\right|=\sqrt{h^2+k^2}\left|\sin\frac{1}{h^2+k^2}\right|\leqslant\sqrt{h^2+k^2}\to 0,\ \text{kada } (h,k)\to(0,0)$$

slijedi da je

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\sqrt{h^2+k^2}\sin\frac{1}{h^2+k^2}=0$$

pa je funkcija f zaista diferencijabilna u točki $(0,0)$. Konačno, pokažimo da su obje parcijalne derivacije neomeđene na svakoj okolini točke $(0,0)$ pa stoga imaju i prekid u toj točki.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}+\left(x^2+y^2\right)\cos\frac{1}{x^2+y^2}\cdot\frac{-1}{(x^2+y^2)^2}\cdot 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y\sin\frac{1}{x^2+y^2} + \left(x^2+y^2\right)\cos\frac{1}{x^2+y^2}\cdot\frac{-1}{(x^2+y^2)^2}\cdot 2y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y\sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2y}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}$$

Da bi funkcija $\frac{\partial f}{\partial x}$ bila neprekidna u točki $(0,0)$ mora vrijediti

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$

odnosno $\big($jer smo već ranije izračunali da je $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0\big)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0.$$

Međutim, ako u

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(2x\sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}\right)$$

stavimo $y=x$, dobivamo limes

$$\lim_{x\to 0}\left(2x\sin\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{2x^2}\right). \tag{$\bullet$}$$

Specijalno, za niz $x_n = \frac{1}{\sqrt{2n\pi}}, n\in\mathbb{N}$ vrijedi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ i vrijedi

$$\lim_{n\to\infty}\left(2x_n\sin\frac{1}{2x_n^2} - \frac{1}{x_n}\cos\frac{1}{2x_n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{2n\pi}}\sin(n\pi) - \sqrt{2n\pi}\cos(n\pi)\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{2n\pi}}\cdot 0 - \sqrt{2n\pi}\cdot(-1)^n\right) = \lim_{n\to\infty}(-1)^{n+1}\sqrt{2n\pi} = \pm\infty$$

Iz navedenih razmatranja slijedi da je funkcija $\frac{\partial f}{\partial x}$ neomeđena na svakoj okolini točke $(0,0)$ pa stoga ima i prekid u toj točki.
Da bi funkcija $\frac{\partial f}{\partial y}$ bila neprekidna u točki $(0,0)$ mora vrijediti

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

odnosno $\big($jer smo već ranije izračunali da je $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0\big)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.$$

Međutim, ako u

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(2y\sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2y}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}\right)$$

stavimo $y=x$, dobivamo ponovo isti limes kao u ($\bullet$). Stoga je funkcija $\frac{\partial f}{\partial y}$ također neomeđena na svakoj okolini točke $(0,0)$ i ima prekid u toj točki.

Gradijent realne funkcije dvije realne varijable. Neka je $\mathcal{O}$ otvoren skup u $\mathbb{R}^2$. Gradijent funkcije $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ u točki $(x_0, y_0) \in \mathcal{O}$ je vektor $\nabla f(x_0, y_0)$ čije komponente su vrijednosti parcijalnih derivacija f_x i f_y u točki (x_0, y_0), tj.

$$\nabla f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) \cdot \vec{i} + f_y(x_0, y_0) \cdot \vec{j}.$$

Najčešće samo kratko pišemo $\nabla f(x_0, y_0) = \big(f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)\big)$. Druga oznaka koja se često koristi za gradijent je grad $f(x_0, y_0)$. Veza između diferencijala i gradijenta dana je s

$$\mathrm{d}f(x_0, y_0)(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y),$$

pri čemu "točkica" označava standardni skalarni produkt vektora u $\mathbb{R}^2$.

Zadatak 41.
Zadana je funkcija $f(x, y) = \ln(x - 3y)$. Odredite gradijent i diferencijal funkcije f u točki $(7, 2)$. Pomoću diferencijala odredite približnu vrijednost funkcije f u točki $(6.94, 2.05)$. Kolika je greška kod te aproksimacije?

Rješenje.
Najprije odredimo parcijalne derivacije funkcije f.

$$f_x(x, y) = \frac{1}{x - 3y}, \qquad f_y(x, y) = \frac{-3}{x - 3y}$$

Gradijent i diferencijal funkcije f u točki $(7, 2)$ jednaki su

$$\begin{aligned} \nabla f(7, 2) &= f_x(7, 2)\vec{i} + f_y(7, 2)\vec{j} \\ \mathrm{d}f(7, 2) &= f_x(7, 2)\,\mathrm{d}x + f_y(7, 2)\,\mathrm{d}y \end{aligned}$$

Kako je $f_x(7, 2) = 1$ i $f_y(7, 2) = -3$, slijedi da je

$$\begin{aligned} \nabla f(7, 2) &= \vec{i} - 3\vec{j} \\ \mathrm{d}f(7, 2) &= \mathrm{d}x - 3\,\mathrm{d}y \end{aligned}$$

Da bismo približno odredili vrijednost funkcije f u točki $(6.94, 2.05)$, najprije izračunamo vrijednost funkcije u točki $(7, 2)$, a zatim ocijenimo prirast funkcije u točki $(7, 2)$ za pomake $\Delta x = -0.06$, $\Delta y = 0.05$ pomoću diferencijala $\mathrm{d}f(7, 2)$. Naime, znamo da za male Δx i Δy vrijedi

$$\Delta f(x_0, y_0) \approx \mathrm{d}f(x_0, y_0)(\Delta x, \Delta y),$$

odnosno

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \approx f_x(x_0, y_0) \cdot \Delta x + f_y(x_0, y_0) \cdot \Delta y.$$

Iz posljednje relacije dobivamo da je

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \cdot \Delta x + f_y(x_0, y_0) \cdot \Delta y.$$

U našem slučaju je $x_0 = 7$, $y_0 = 2$, $\Delta x = -0.06$, $\Delta y = 0.05$ pa dobivamo

$$f(6.94, 2.05) \approx f(7, 2) + f_x(7, 2) \cdot (-0.06) + f_y(7, 2) \cdot 0.05.$$

Kako je $f(7,2) = 0$, $f_x(7,2) = 1$, $f_y(7,2) = -3$, slijedi

$$f(6.94, 2.05) \approx 0 + 1 \cdot (-0.06) + (-3) \cdot 0.05 = -0.21.$$

Dakle, pomoću diferencijala smo dobili da je vrijednost funkcije f u točki $(6.94, 2.05)$ približno jednaka -0.21. Točna vrijednost funkcije u točki $(6.94, 2.05)$ je

$$f(6.94, 2.05) = \ln(6.94 - 3 \cdot 2.05) = \ln 0.79 \approx -0.23572233$$

Uočavamo da je aproksimacija točna na jednu decimalu.

Napomena. Diferencijabilnost realnih funkcija n realnih varijabli definira se na analogni način kao i diferencijabilnost realnih funkcija dvije realne varijable. Svi teoremi i napomene koje smo spomenuli za diferencijabilnost realnih funkcija dvije realne varijable analogno se prenose na realne funkcije n realnih varijabli. Na primjer, ako je $u = f(x, y, z)$ realna funkcija tri realne varijable, njezin diferencijal u točki (x_0, y_0, z_0) se računa po formuli

$$\mathrm{d}u(x_0, y_0, z_0) = u_x(x_0, y_0, z_0)\,\mathrm{d}x + u_y(x_0, y_0, z_0)\,\mathrm{d}y + u_z(x_0, y_0, z_0)\,\mathrm{d}z,$$

a gradijent u točki (x_0, y_0, z_0) je vektor

$$\nabla u(x_0, y_0, z_0) = \big(u_x(x_0, y_0, z_0),\ u_y(x_0, y_0, z_0),\ u_z(x_0, y_0, z_0)\big).$$

Teorem. *Neka je $z = f(x, y)$ realna funkcija dvije realne varijable i pretpostavimo da varijable x i y ovise o parametru t, tj. $x = x(t)$ i $y = y(t)$. Tada je*

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}.$$

Teorem. *Neka je $u = f(x, y, z)$ realna funkcija tri realne varijable i pretpostavimo da varijable x, y i z ovise o parametru t, tj. $x = x(t)$, $y = y(t)$ i $z = z(t)$. Tada je*

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}.$$

Teorem. *Neka je $z = f(x, y)$ realna funkcija dvije realne varijable i pretpostavimo da varijable x i y ovise o dva parametra u i v, tj. $x = x(u, v)$ i $y = y(u, v)$. Tada je*

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}, \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}.$$

Zadatak 42.
Izračunajte $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ ako je $u = \ln\left(\sin\frac{x}{\sqrt{y}}\right)$, gdje je $x = 3t^2$, $y = \sqrt{t^2+1}$.

Rješenje.
Zadatak ćemo riješiti korištenjem formule $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\sin\frac{x}{\sqrt{y}}}\cdot\cos\frac{x}{\sqrt{y}}\cdot\frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{y}}\operatorname{ctg}\frac{x}{\sqrt{y}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\sin\frac{x}{\sqrt{y}}}\cdot\cos\frac{x}{\sqrt{y}}\cdot\frac{-x}{2\sqrt{y^3}} = \frac{-x}{2\sqrt{y^3}}\operatorname{ctg}\frac{x}{\sqrt{y}}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 6t, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2\sqrt{t^2+1}}\cdot 2t = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$$

Uvrštavanjem u formulu $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ dobivamo

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\sqrt{y}}\operatorname{ctg}\frac{x}{\sqrt{y}}\cdot 6t + \frac{-x}{2\sqrt{y^3}}\operatorname{ctg}\frac{x}{\sqrt{y}}\cdot\frac{t}{\sqrt{t^2+1}} = \frac{t}{\sqrt{y}}\operatorname{ctg}\frac{x}{\sqrt{y}}\cdot\left(6 - \frac{x}{2y\sqrt{t^2+1}}\right).$$

Kako je $x = 3t^2$ i $y = \sqrt{t^2+1}$, slijedi

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} &= \frac{t}{\sqrt{\sqrt{t^2+1}}}\operatorname{ctg}\frac{3t^2}{\sqrt{\sqrt{t^2+1}}}\cdot\left(6 - \frac{3t^2}{2\sqrt{t^2+1}\cdot\sqrt{t^2+1}}\right)\\ &= \frac{t}{\sqrt[4]{t^2+1}}\cdot\frac{9t^2+12}{2t^2+2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{3t^2}{\sqrt[4]{t^2+1}} = \frac{9t^3+12t}{2(t^2+1)^{\frac{5}{4}}}\operatorname{ctg}\frac{3t^2}{\sqrt[4]{t^2+1}}\end{aligned}$$

Zadatak 43.
Izračunajte $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ ako je $u = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$, gdje je $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $z = H$ za neke konstante R i H.

Rješenje.
Zadatak ćemo riješiti na dva načina, pomoću formule $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ i bez korištenja te formule.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-xz}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-yz}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -R\sin t, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = R\cos t, \qquad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = 0$$

Uvrštavanjem u formulu $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ dobivamo

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{-xz}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\big(-R\sin t\big) + \frac{-yz}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot R\cos t + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 0 = \frac{xzR\sin t - yzR\cos t}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Kako je $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $z = H$, slijedi

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{R\cos t\cdot H\cdot R\sin t - R\sin t\cdot H\cdot R\cos t}{(R^2\cos^2 t + R^2\sin^2 t)^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

Drugi način na koji možemo riješiti zadatak je da odmah u funkciju $u = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$ uvrstimo $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $z = H$ nakon čega dobivamo funkciju jedne realne varijable t koju zatim deriviramo po t koristeći poznata pravila za deriviranje realnih funkcija jedne realne varijable.

$$u = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{H}{\sqrt{R^2\cos^2 t + R^2\sin^2 t}} = \frac{H}{|R|} = \text{const.} \quad \text{pa je} \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 0.$$

Zadatak 44.
Izračunajte $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$ ako je $z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ i $y = x^2$.

Rješenje.
Funkcija z je realna funkcija dvije realne varijable x i y pa oznaka $\frac{\partial z}{\partial x}$ predstavlja parcijalnu derivaciju funkcije z po varijabli x.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{-y}{x^2} = \frac{-y}{x^2+y^2}$$

Ako u funkciju $z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ uvrstimo $y = x^2$, dobit ćemo realnu funkciju jedne realne varijable x pa oznaka $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$ predstavlja derivaciju tako dobivene funkcije.

$$z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \operatorname{arctg}\frac{x^2}{x} = \operatorname{arctg} x \quad \text{pa je} \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{1+x^2}$$

Derivaciju $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$ možemo izračunati i pomoću formule $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$. Naime, relacija $y = x^2$ nam daje ovisnost varijable y o varijabli x. Međutim, tu ovisnost možemo uvođenjem nove varijable t zapisati u obliku $x = t$, $y = t^2$. Na taj način smo relaciju $y = x^2$ prilagodili za korištenje formule $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$. Kako je $x = t$, tada je $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$ pa dobivamo

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

Računanjem dobivamo

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{-y}{x^2} = \frac{-y}{x^2+y^2}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2}, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x$$

pa zbog formule $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ slijedi

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{-y}{x^2+y^2} + \frac{x}{x^2+y^2}\cdot 2x = \frac{2x^2-y}{x^2+y^2}.$$

Kako je $y = x^2$, konačno dobivamo

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{2x^2-x^2}{x^2+x^4} = \frac{x^2}{x^2(1+x^2)} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Zadatak 45.
Izračunajte $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$ ako je $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$, $x = u \sin v$, $y = u \cos v$.

Rješenje.
Zadatak ćemo riješiti na dva načina, pomoću formula

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}, \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}$$

i bez korištenja tih formula.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y}{x^2 + y^2}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \frac{-x}{y^2} = \frac{-x}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \sin v, \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = u \cos v, \qquad \frac{\partial y}{\partial u} = \cos v, \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = -u \sin v$$

Uvrštavanjem u formulu $\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}$ i korištenjem relacija $x = u \sin v$ i $y = u \cos v$ slijedi

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{y}{x^2 + y^2} \cdot \sin v + \frac{-x}{x^2 + y^2} \cdot \cos v = \frac{1}{x^2 + y^2} \big(y \sin v - x \cos v \big) =$$

$$= \frac{1}{u^2 \sin^2 v + u^2 \cos^2 v} \big(u \cos v \sin v - u \sin v \cos v \big) = 0.$$

Uvrštavanjem u formulu $\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}$ i korištenjem relacija $x = u \sin v$ i $y = u \cos v$ slijedi

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{y}{x^2 + y^2} \cdot u \cos v + \frac{-x}{x^2 + y^2} \cdot \big(-u \sin v \big) = \frac{1}{x^2 + y^2} \big(yu \cos v + xu \sin v \big) =$$

$$= \frac{u^2}{u^2 \sin^2 v + u^2 \cos^2 v} \big(\cos^2 v + \sin^2 v \big) = 1.$$

Drugi način na koji možemo riješiti zadatak je da odmah u funkciju $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$ uvrstimo $x = u \sin v$, $y = u \cos v$ nakon čega dobivamo funkciju dvije realne varijable u i v koju zatim parcijalno deriviramo po u i v koristeći poznata pravila za parcijalno deriviranje.

$$z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y} = \operatorname{arctg} \frac{u \sin v}{u \cos v} = \operatorname{arctg} (\operatorname{tg} v)$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 v} \cdot \frac{1}{\cos^2 v} = \frac{1}{1 + \frac{\sin^2 v}{\cos^2 v}} \cdot \frac{1}{\cos^2 v} = \frac{\cos^2 v}{\cos^2 v + \sin^2 v} \cdot \frac{1}{\cos^2 v} = 1$$

Zadatak 46.
Odredite $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$ ako je $z = f(u, v)$ i $u = x^2 - y^2$, $v = e^{xy}$.

Rješenje.
Prema formulama za parcijalno deriviranje složenih funkcija slijedi

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = f_u(u, v) \cdot 2x + f_v(u, v) \cdot ye^{xy} = 2x f_u(u, v) + ye^{xy} f_v(u, v)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = f_u(u, v) \cdot (-2y) + f_v(u, v) \cdot xe^{xy} = -2y f_u(u, v) + xe^{xy} f_v(u, v)$$

Zadatak 47.

Dokažite da funkcija $z = \varphi\big(x^2 + y^2\big)$ zadovoljava jednadžbu $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

Rješenje.

Uvodimo supstituciju $t = x^2 + y^2$ pa je tada $z = \varphi(t)$. Nadalje, prema formulama za parcijalno deriviranje složenih funkcija slijedi

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\partial t}{\partial x} = \varphi'(t) \cdot 2x = 2x\varphi'\big(x^2 + y^2\big)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\partial t}{\partial y} = \varphi'(t) \cdot 2y = 2y\varphi'\big(x^2 + y^2\big)$$

pa dobivamo

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = y \cdot 2x\varphi'\big(x^2 + y^2\big) - x \cdot 2y\varphi'\big(x^2 + y^2\big) = 0.$$

Derivacija implicitno zadane funkcije – slučaj jedne nezavisne varijable.

- Ako je $f(x, y) = 0$ i $f_y(x, y) \neq 0$, tada je $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{f_x(x, y)}{f_y(x, y)}$.
- Ako je $f(x, y) = 0$ i $f_x(x, y) \neq 0$, tada je $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = -\dfrac{f_y(x, y)}{f_x(x, y)}$.

Derivacija implicitno zadane funkcije – slučaj dvije nezavisne varijable.

- Ako je $F(x, y, z) = 0$ i $F_z(x, y, z) \neq 0$, tada je $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}$ i $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{F_y(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}$.
- Ako je $F(x, y, z) = 0$ i $F_y(x, y, z) \neq 0$, tada je $\dfrac{\partial y}{\partial x} = -\dfrac{F_x(x, y, z)}{F_y(x, y, z)}$ i $\dfrac{\partial y}{\partial z} = -\dfrac{F_z(x, y, z)}{F_y(x, y, z)}$.
- Ako je $F(x, y, z) = 0$ i $F_x(x, y, z) \neq 0$, tada je $\dfrac{\partial x}{\partial y} = -\dfrac{F_y(x, y, z)}{F_x(x, y, z)}$ i $\dfrac{\partial x}{\partial z} = -\dfrac{F_z(x, y, z)}{F_x(x, y, z)}$.

Zadatak 48.

Izračunajte $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ i $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ ako je $\big(x^2 + y^2\big)^3 - 3\big(x^2 + y^2\big) + 1 = 0$.

Rješenje.

Pokazat ćemo tri različita pristupa računanja $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. Prvi od tih načina je da zadanu jednakost deriviramo po x pri čemu na varijablu y gledamo kao na funkciju od x, tj. $y = y(x)$.

$$\begin{aligned}
\big(x^2 + y^2\big)^3 - 3\big(x^2 + y^2\big) + 1 &= 0 \ \Big/ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \\
3\big(x^2 + y^2\big)^2\big(2x + 2yy'\big) - 3\big(2x + 2yy'\big) &= 0 \\
\big(2x + 2yy'\big)\Big(3\big(x^2 + y^2\big)^2 - 3\Big) &= 0 \\
2yy' &= -2x \\
y' &= -\frac{x}{y}
\end{aligned}$$

Dakle, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{y}$. Drugi način na koji možemo odrediti $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ jest da izraz na lijevoj strani jednakosti shvatimo kao realnu funkciju dvije realne varijable i pritom koristimo formulu $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)}$.

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= \left(x^2+y^2\right)^3 - 3\left(x^2+y^2\right) + 1 \\
f_x(x,y) &= 3\left(x^2+y^2\right)^2 \cdot 2x - 6x = 6x \cdot \left[\left(x^2+y^2\right)^2 - 1\right] \\
f_y(x,y) &= 3\left(x^2+y^2\right)^2 \cdot 2y - 6y = 6y \cdot \left[\left(x^2+y^2\right)^2 - 1\right] \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)} = -\frac{6x \cdot \left[\left(x^2+y^2\right)^2 - 1\right]}{6y \cdot \left[\left(x^2+y^2\right)^2 - 1\right]} = -\frac{x}{y}
\end{aligned}$$

Treći način je diferenciranje zadane jednakosti, tj. računanje totalnog diferencijala korak po korak, koristeći se pravilima diferenciranja koja su analogna pravilima deriviranja.

$$\begin{gathered}
\left(x^2+y^2\right)^3 - 3\left(x^2+y^2\right) + 1 = 0 \,/\mathrm{d} \\
\mathrm{d}\Big(\left(x^2+y^2\right)^3 - 3\left(x^2+y^2\right) + 1\Big) = \mathrm{d}(0) \\
\mathrm{d}\Big(\left(x^2+y^2\right)^3\Big) - \mathrm{d}\Big(3\left(x^2+y^2\right)\Big) + \mathrm{d}(1) = 0 \\
3\left(x^2+y^2\right)^2 \mathrm{d}\left(x^2+y^2\right) - 3\,\mathrm{d}\left(x^2+y^2\right) + 0 = 0 \\
3\left(x^2+y^2\right)^2\left(2x\,\mathrm{d}x + 2y\,\mathrm{d}y\right) - 3\left(2x\,\mathrm{d}x + 2y\,\mathrm{d}y\right) = 0 \\
6x\left(x^2+y^2\right)^2 \mathrm{d}x + 6y\left(x^2+y^2\right)^2 \mathrm{d}y - 6x\,\mathrm{d}x - 6y\,\mathrm{d}y = 0 \\
6x\left[\left(x^2+y^2\right)^2 - 1\right]\mathrm{d}x + 6y\left[\left(x^2+y^2\right)^2 - 1\right]\mathrm{d}y = 0 \\
6y\left[\left(x^2+y^2\right)^2 - 1\right]\mathrm{d}y = -6x\left[\left(x^2+y^2\right)^2 - 1\right]\mathrm{d}x \\
\mathrm{d}y = -\frac{x}{y}\,\mathrm{d}x
\end{gathered}$$

Znamo da se totalni diferencijal realne funkcije $y = f(x)$ jedne realne varijable računa po formuli $\mathrm{d}y = y'\,\mathrm{d}x$ iz čega slijedi da je $y' = -\frac{x}{y}$.

Nakon što smo odredili $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ na neki od gore opisanih načina, možemo krenuti računati $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\frac{x}{y}\right) = -\frac{1 \cdot y - xy'}{y^2} = -\frac{y - x \cdot \frac{-x}{y}}{y^2} = -\frac{x^2+y^2}{y^3}$$

Zadatak 49.
Odredite $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$ ako je $x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y = 0$.

Rješenje.
Pokazat ćemo tri različita pristupa računanja $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$. Prvi od tih načina je da zadanu jednakost parcijalno deriviramo po x i y pri čemu na varijablu z gledamo kao na funkciju dvije varijable x i y, tj. $z = z(x,y)$.

$$x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y = 0 \Big/ \frac{\partial}{\partial x}$$
$$2x + 6z\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$
$$(6z-y)\frac{\partial z}{\partial x} = -2x$$
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-2x}{6z-y}$$

$$x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y = 0 \Big/ \frac{\partial}{\partial y}$$
$$-4y + 6z\frac{\partial z}{\partial y} - z - y\frac{\partial z}{\partial y} + 1 = 0$$
$$(6z-y)\frac{\partial z}{\partial y} = 4y + z - 1$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{4y+z-1}{6z-y}$$

Drugi način na koji možemo odrediti $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$ jest da izraz na lijevoj strani jednakosti shvatimo kao realnu funkciju tri realne varijable i pritom koristimo formule $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}$ i $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}$.

$$F(x,y,z) = x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y$$
$$F_x(x,y,z) = 2x, \qquad F_y(x,y,z) = -4y - z + 1, \qquad F_z(x,y,z) = 6z - y$$
$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{-2x}{6z-y}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{4y+z-1}{6z-y}$$

Treći način je diferenciranje zadane jednakosti, tj. računanje totalnog diferencijala korak po korak, koristeći se pravilima diferenciranja koja su analogna pravilima deriviranja.

$$x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y = 0 \,/\mathrm{d}$$
$$\mathrm{d}\big(x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y\big) = \mathrm{d}(0)$$
$$\mathrm{d}\big(x^2\big) - \mathrm{d}\big(2y^2\big) + \mathrm{d}\big(3z^2\big) - \mathrm{d}\big(yz\big) + \mathrm{d}y = 0$$
$$2x\,\mathrm{d}x - 4y\,\mathrm{d}y + 6z\,\mathrm{d}z - z\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}z + \mathrm{d}y = 0$$
$$(6z-y)\,\mathrm{d}z = -2x\,\mathrm{d}x + (4y+z-1)\,\mathrm{d}y$$
$$\mathrm{d}z = \frac{-2x}{6z-y}\,\mathrm{d}x + \frac{4y+z-1}{6z-y}\,\mathrm{d}y$$

Znamo da se totalni diferencijal realne funkcije $z = f(x,y)$ dvije realne varijable računa po formuli $\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\,\mathrm{d}y$ iz čega slijedi da je

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-2x}{6z-y}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{4y+z-1}{6z-y}.$$

Napomena. U prethodna dva primjera su pokazana tri različita načina računanja parcijalnih derivacija implicitno zadane funkcije. U preostalim zadacima ovog tipa nećemo više pokazivati sva tri načina, nego ćemo uglavnom koristiti drugi način koji je nekako najjednostavniji za računanje i razumijevanje. Uostalom, u sva tri spomenuta načina sve se nekako vrti oko formule za totalni diferencijal, samo je razlika u tehnici računanja koja nas dovodi do rješenja problema. Iza svake od spomenutih tehnika računanja stoji određena teorija koja garantira njihovu ispravnost, ali mi ovdje nećemo dublje ulaziti u tu teoriju.

Zadatak 50.
Neka je $F\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0$, gdje je F diferencijabilna funkcija. Dokažite da tada vrijedi $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z$.

Rješenje.
Ako stavimo $u = \frac{x}{z}$ i $v = \frac{y}{z}$, tada iz jednakosti $F\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0$ dobivamo $F(u, v) = 0$. Pritom,

- na funkciju F gledamo kao na realnu funkciju dvije varijable u i v
- na u i v gledamo kao na funkcije tri varijable x, y i z, tj. $u(x, y, z) = \frac{x}{z}$ i $v(x, y, z) = \frac{y}{z}$
- u jednadžbi $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z$ na z gledamo kao na realnu funkciju dvije varijable x i y

Funkcija z je implicitno zadana preko jednadžbe $F\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0$ pa moramo pronaći njezine parcijalne derivacije po formulama za parcijalno deriviranje implicitno zadane funkcije, tj.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}.$$

Da bismo izračunali F_x, F_y i F_z, koristimo formule za parcijalno deriviranje složene funkcije.

$$\begin{aligned}
F_x &= \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = F_u \cdot \frac{1}{z} + F_v \cdot 0 = \frac{1}{z}F_u \\
F_y &= \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = F_u \cdot 0 + F_v \cdot \frac{1}{z} = \frac{1}{z}F_v \\
F_z &= \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} = F_u \cdot \frac{-x}{z^2} + F_v \cdot \frac{-y}{z^2} = -\frac{x}{z^2}F_u - \frac{y}{z^2}F_v
\end{aligned}$$

Stoga je

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{\frac{1}{z}F_u}{-\frac{x}{z^2}F_u - \frac{y}{z^2}F_v} = \frac{zF_u}{xF_u + yF_v} \\
\frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{\frac{1}{z}F_v}{-\frac{x}{z^2}F_u - \frac{y}{z^2}F_v} = \frac{zF_v}{xF_u + yF_v}
\end{aligned}$$

pa slijedi

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xzF_u}{xF_u + yF_v} + \frac{yzF_v}{xF_u + yF_v} = \frac{z(xF_u + yF_v)}{xF_u + yF_v} = z.$$

Zadatak 51.
Dokažite da je $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$ ako je $2\sin(x + 2y - 3z) = x + 2y - 3z$.

Rješenje.
Funkcija z je implicitno zadana jednadžbom

$$2\sin(x + 2y - 3z) = x + 2y - 3z.$$

Ako prebacimo sve članove na lijevu stranu, dobivamo

$$2\sin(x + 2y - 3z) - x - 2y + 3z = 0.$$

Definiramo funkciju $F(x, y, z) = 2\sin(x + 2y - 3z) - x - 2y + 3z$ i pronađemo njezine parcijalne derivacije.

$$F_x = 2\cos(x + 2y - 3z) - 1, \quad F_y = 4\cos(x + 2y - 3z) - 2, \quad F_z = -6\cos(x + 2y - 3z) + 3$$

Parcijalne derivacije funkcije z su tada jednake

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{1 - 2\cos(x + 2y - 3z)}{3 - 6\cos(x + 2y - 3z)}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{2 - 4\cos(x + 2y - 3z)}{3 - 6\cos(x + 2y - 3z)}$$

Konačno dobivamo

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1 - 2\cos(x + 2y - 3z)}{3 - 6\cos(x + 2y - 3z)} + \frac{2 - 4\cos(x + 2y - 3z)}{3 - 6\cos(x + 2y - 3z)} = \frac{3 - 6\cos(x + 2y - 3z)}{3 - 6\cos(x + 2y - 3z)} = 1.$$

Zadatak 52.
Nađite $\mathrm{d}z$ ako je $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Rješenje.
Primijenimo operator diferenciranja d na obje strane zadane jednadžbe.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= a^2 \;/\mathrm{d} \\ \mathrm{d}\big(x^2 + y^2 + z^2\big) &= \mathrm{d}\big(a^2\big) \\ 2x\,\mathrm{d}x + 2y\,\mathrm{d}y + 2z\,\mathrm{d}z &= 0 \\ 2z\,\mathrm{d}z &= -2x\,\mathrm{d}x - 2y\,\mathrm{d}y \;/ : 2z \\ \mathrm{d}z &= -\frac{x}{z}\,\mathrm{d}x - \frac{y}{z}\,\mathrm{d}y \end{aligned}$$

Drugi način je da se sjetimo formule za računanje totalnog diferencijala realne funkcije dvije varijable.

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\,\mathrm{d}y \qquad (\heartsuit)$$

Međutim, funkcija z je zadana implicitno jednadžbom $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. Prebacimo li sve članove na lijevu stranu, dobivamo $x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$. Definiramo funkciju $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2$. Njezine parcijalne derivacije su

$$F_x = 2x, \qquad F_y = 2y, \qquad F_z = 2z.$$

Prema formulama za parcijalno deriviranje implicitno zadane funkcije slijedi

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{2x}{2z} = -\frac{x}{z}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{2y}{2z} = -\frac{y}{z}$$

pa uvrštavanjem dobivenih parcijalnih derivacija u $(\heartsuit)$ dobivamo

$$\mathrm{d}z = -\frac{x}{z}\,\mathrm{d}x - \frac{y}{z}\,\mathrm{d}y.$$

Zadatak 53.
Odredite $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial y}{\partial z}$ ako vrijedi $x^3 - xy^2 + y\sin z - x\sqrt[3]{z}\ln y + 2 = 0$.

Rješenje.
Definiramo funkciju $F(x, y, z) = x^3 - xy^2 + y\sin z - x\sqrt[3]{z}\ln y + 2$ i odredimo njezine parcijalne derivacije.

$$F_x = 3x^2 - y^2 - \sqrt[3]{z}\ln y, \quad F_y = -2xy + \sin z - \frac{x}{y}\sqrt[3]{z}, \quad F_z = y\cos z - \frac{1}{3}xz^{-\frac{2}{3}}\ln y$$

Prema formulama za parcijalno deriviranje implicitno zadanih funkcija dobivamo

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{3x^2 - y^2 - \sqrt[3]{z}\ln y}{y\cos z - \frac{1}{3}xz^{-\frac{2}{3}}\ln y} = \frac{y^2 + \sqrt[3]{z}\ln y - 3x^2}{y\cos z - \frac{1}{3}xz^{-\frac{2}{3}}\ln y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{-2xy + \sin z - \frac{x}{y}\sqrt[3]{z}}{y\cos z - \frac{1}{3}xz^{-\frac{2}{3}}\ln y} = \frac{2xy - \sin z + \frac{x}{y}\sqrt[3]{z}}{y\cos z - \frac{1}{3}xz^{-\frac{2}{3}}\ln y}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{3x^2 - y^2 - \sqrt[3]{z}\ln y}{-2xy + \sin z - \frac{x}{y}\sqrt[3]{z}} = \frac{y^2 + \sqrt[3]{z}\ln y - 3x^2}{-2xy + \sin z - \frac{x}{y}\sqrt[3]{z}}$$

$$\frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{F_z}{F_y} = -\frac{y\cos z - \frac{1}{3}xz^{-\frac{2}{3}}\ln y}{-2xy + \sin z - \frac{x}{y}\sqrt[3]{z}} = \frac{-y\cos z + \frac{1}{3}xz^{-\frac{2}{3}}\ln y}{-2xy + \sin z - \frac{x}{y}\sqrt[3]{z}}$$

Teorem. *Ako derivabilna funkcija $z = f(x, y)$ ima lokalni ekstrem u točki (x_0, y_0), tada su obje parcijalne derivacije f_x i f_y u točki (x_0, y_0) jednake 0, tj. $\nabla f(x_0, y_0) = \vec{0}$.*

Postupak traženja lokalnih ekstrema realne funkcije dvije varijable. Neka je $z = f(x, y)$ realna funkcija dvije varijable kojoj tražimo lokalne ekstreme. Pretpostavljamo da je funkcija derivabilna na svojoj domeni jer je moguće da funkcija u nekoj točki ima lokalni ekstrem, a da u toj točki nije derivabilna pa onda takav lokalni ekstrem ne možemo "uhvatiti" pomoću dolje opisanog algoritma. Točke iz domene u kojima funkcija nije derivabilna treba posebno ispitati. Međutim, u zadacima koje ćemo raditi, naše funkcije će uglavnom biti derivabilne na svojoj domeni, ali uvijek treba imati na umu i točke u kojima funkcija nije derivabilna.

(i) Najprije odredimo parcijalne derivacije f_x i f_y funkcije f, a nakon toga riješimo sustav

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases}$$

Rješenja tog sustava zovemo stacionarnim točkama, a te točke su upravo kandidati za lokalne ekstreme.

(ii) Odredimo parcijalne derivacije drugog reda f_{xx}, f_{xy}, f_{yy} i formiramo Hesseovu determinantu

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{xy}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{vmatrix}.$$

(iii) Pomoću Hesseove determinante ispitujemo karakter stacionarnih točaka. Neka je (x_0, y_0) stacionarna točka funkcije f.

- Ako je $H(x_0, y_0) < 0$, tada funkcija f u točki (x_0, y_0) nema lokalnih ekstrema, tj. (x_0, y_0) je sedlasta točka funkcije f.
- Ako je $H(x_0, y_0) > 0$, tada funkcija f u točki (x_0, y_0) ima lokalni ekstrem, i to
  - lokalni minimum, ako je $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$,
  - lokalni maksimum, ako je $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$.
- Ako je $H(x_0, y_0) = 0$, tada opisani postupak ne daje odgovor pa treba provesti daljnja ispitivanja. Neke od tih ispitivanja ćemo pokazati na konkretnim zadacima.

Zadatak 54.
Odredite lokalne ekstreme funkcije $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$.

Rješenje.
Najprije odredimo parcijalne derivacije funkcije z.

$$\begin{aligned} z_x &= 4x^3 - 4x + 4y \\ z_y &= 4y^3 + 4x - 4y \end{aligned}$$

Nakon toga izjednačimo parcijalne derivacije s nulom

$$4x^3 - 4x + 4y = 0 \tag{1}$$
$$4y^3 + 4x - 4y = 0 \tag{2}$$

i rješavamo dobiveni sustav. Zanimaju nas samo realna rješenja. Zbrajanjem jednadžbi dobivamo

$$\begin{aligned} 4x^3 + 4y^3 &= 0 \\ y^3 &= -x^3 \\ y^3 &= (-x)^3 \\ y &= -x \end{aligned}$$

Uvrstimo li $y = -x$ u (1), dobivamo

$$\begin{aligned} 4x^3 - 4x + 4 \cdot (-x) &= 0 \,\big/ : 4 \\ x^3 - x - x &= 0 \\ x^3 - 2x &= 0 \\ x\big(x^2 - 2\big) &= 0 \end{aligned}$$

pa imamo tri rješenja $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{2}$, $x_3 = -\sqrt{2}$. Kako je $y = -x$, slijedi da je $y_1 = 0$, $y_2 = -\sqrt{2}$, $y_3 = \sqrt{2}$. Dobivena rješenja zadovoljavaju također i jednadžbu (2) pa imamo ukupno tri stacionarne točke

$$\big(\overset{x_1}{0}\,,\,\overset{y_1}{0}\big)\,, \quad \big(\overset{x_2}{\sqrt{2}}, \overset{y_2}{-\sqrt{2}}\,\big), \quad \big(\overset{x_3}{-\sqrt{2}}, \overset{y_3}{\sqrt{2}}\,\big).$$

Dobivene stacionarne točke su kandidati za lokalne ekstreme. Odredimo parcijalne derivacije drugog reda funkcije z.

$$z_{xx} = 12x^2 - 4, \quad z_{xy} = 4, \quad z_{yy} = 12y^2 - 4$$

Nakon toga računamo vrijednosti Hesseove determinante

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} z_{xx}(x,y) & z_{xy}(x,y) \\ z_{xy}(x,y) & z_{yy}(x,y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12x^2 - 4 & 4 \\ 4 & 12y^2 - 4 \end{vmatrix}$$

u stacionarnim točkama. Kako je

$$H\big(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\,\big) = \begin{vmatrix} \boxed{20} & 4 \\ 4 & 20 \end{vmatrix} = 384 > 0 \;\text{ i }\; z_{xx}\big(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\,\big) = 20 > 0,$$

funkcija z u točki $\big(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\,\big)$ ima lokalni minimum koji iznosi

$$z\big(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\,\big) = \sqrt{2}^{\,4} + \big(-\sqrt{2}\,\big)^4 - 2 \cdot \sqrt{2}^{\,2} + 4 \cdot \sqrt{2} \cdot \big(-\sqrt{2}\,\big) - 2 \cdot \big(-\sqrt{2}\,\big)^2 = -8.$$

Nadalje, zbog

$$H\big(-\sqrt{2},\sqrt{2}\big)=\begin{vmatrix}\boxed{20} & 4\\ 4 & 20\end{vmatrix}=384>0 \;\text{ i }\; z_{xx}\big(-\sqrt{2},\sqrt{2}\big)=20>0,$$

funkcija z u točki $\big(\sqrt{2},-\sqrt{2}\big)$ također ima lokalni minimum koji iznosi

$$z\big(-\sqrt{2},\sqrt{2}\big)=\big(-\sqrt{2}\big)^4+\sqrt{2}^4-2\cdot\big(-\sqrt{2}\big)^2+4\cdot\big(-\sqrt{2}\big)\cdot\sqrt{2}-2\cdot\sqrt{2}^2=-8.$$

Za stacionarnu točku $(0,0)$ u ovom slučaju imamo problem jer je

$$H(0,0)=\begin{vmatrix}-4 & 4\\ 4 & -4\end{vmatrix}=0$$

pa ovaj postupak ne daje odgovor o karakteru stacionarne točke $(0,0)$. Stoga treba provesti daljnja ispitivanja. Vrijednost funkcije u točki $(0,0)$ jednaka je $z(0,0)=0$. Ako bi u točki $(0,0)$ funkcija z imala lokalni minimum, tada bi morala postojati okolina oko točke $(0,0)$ na kojoj bi funkcija bila $\geqslant z(0,0)=0$. Ako pak bi u točki $(0,0)$ funkcija z imala lokalni maksimum, tada bi morala postojati okolina oko točke $(0,0)$ na kojoj bi funkcija bila $\leqslant z(0,0)=0$. Pokažimo da u oba slučaja takva okolina ipak ne postoji iz čega će slijediti da je $(0,0)$ sedlasta točka funkcije z.

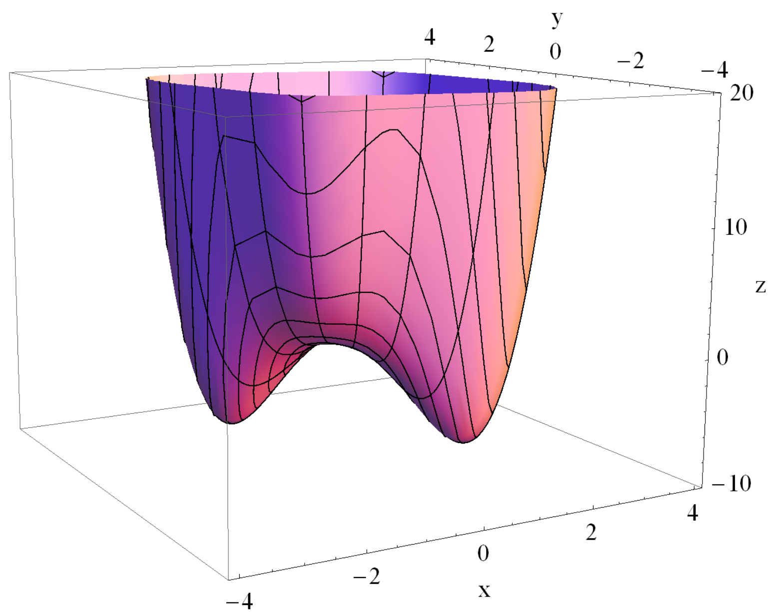
Ako smo jako blizu točke $(0,0)$, npr. na pravcu $y=x$, tada je

$$z(x,x)=x^4+x^4-2x^2+4x\cdot x-2x^2=2x^4\geqslant 0$$

iz čega zaključujemo da funkcija z u točki $(0,0)$ nema lokalni maksimum. Ako smo jako blizu točke $(0,0)$, npr. na pravcu $y=-x$, tada je

$$z(x,-x)=x^4+(-x)^4-2x^2+4x\cdot(-x)-2\cdot(-x)^2=2x^4-8x^2=2x^2(x^2-4)\leqslant 0$$

zbog toga što je $x^2-4\leqslant 0$ kada je x blizu 0. Zaključujemo da funkcija z u točki $(0,0)$ nema niti lokalni minimum. Kako funkcija z u stacionarnoj točki $(0,0)$ nema niti lokalni minimum, niti lokalni maksimum, slijedi da je $(0,0)$ sedlasta točka funkcije z.



Zadatak 55.
Odredite lokalne ekstreme funkcije $f(x,y) = e^{x-y}\big(x^2 - 2y^2\big)$.

Rješenje.
Najprije odredimo parcijalne derivacije funkcije f.

$$\begin{aligned}
f_x(x,y) &= e^{x-y}\big(x^2 - 2y^2\big) + e^{x-y} \cdot 2x = e^{x-y}\big(x^2 - 2y^2 + 2x\big) \\
f_y(x,y) &= -e^{x-y}\big(x^2 - 2y^2\big) + e^{x-y} \cdot (-4y) = e^{x-y}\big(-x^2 + 2y^2 - 4y\big)
\end{aligned}$$

Nakon toga izjednačimo parcijalne derivacije s nulom i rješavamo sustav

$$\begin{aligned}
e^{x-y}\big(x^2 - 2y^2 + 2x\big) &= 0 \\
e^{x-y}\big(-x^2 + 2y^2 - 4y\big) &= 0
\end{aligned}$$

Kako je uvijek $e^{x-y} \neq 0$, podijelimo obje jednadžbe s e^{x-y} i dobivamo

$$\begin{aligned}
x^2 - 2y^2 + 2x &= 0 \qquad (3)\\
-x^2 + 2y^2 - 4y &= 0 \qquad (4)
\end{aligned}$$

Zbrajanjem jednadžbi (3) i (4) dobivamo

$$\begin{aligned}
2x - 4y &= 0 \\
2x &= 4y \\
x &= 2y
\end{aligned}$$

Uvrštavanjem $x = 2y$ u jednadžbu (3) slijedi

$$\begin{aligned}
\big(2y\big)^2 - 2y^2 + 2 \cdot 2y &= 0 \\
4y^2 - 2y^2 + 4y &= 0 \\
2y^2 + 4y &= 0 \\
2y(y+2) &= 0
\end{aligned}$$

pa je $y_1 = 0$, $y_2 = -2$. Zbog $x = 2y$ mora biti $x_1 = 0$, $x_2 = -4$. Dobili smo dvije stacionarne točke

$$(\overset{x_1}{0}, \overset{y_1}{0}), \quad (\overset{x_2}{-4}, \overset{y_2}{-2}).$$

Dobivene stacionarne točke su kandidati za lokalne ekstreme. Odredimo parcijalne derivacije drugog reda funkcije f.

$$\begin{aligned}
f_{xx}(x,y) &= e^{x-y}\big(x^2 - 2y^2 + 2x\big) + e^{x-y}\big(2x + 2\big) = e^{x-y}\big(x^2 - 2y^2 + 4x + 2\big) \\
f_{xy}(x,y) &= -e^{x-y}\big(x^2 - 2y^2 + 2x\big) + e^{x-y} \cdot \big(-4y\big) = e^{x-y}\big(-x^2 + 2y^2 - 2x - 4y\big) \\
f_{yy}(x,y) &= -e^{x-y}\big(-x^2 + 2y^2 - 4y\big) + e^{x-y}\big(4y - 4\big) = e^{x-y}\big(x^2 - 2y^2 + 8y - 4\big)
\end{aligned}$$

Nakon toga računamo vrijednosti Hesseove determinante

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{xy}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{vmatrix}$$

u stacionarnim točkama. Kako je

$$H(0,0) = \begin{vmatrix} f_{xx}(0,0) & f_{xy}(0,0) \\ f_{xy}(0,0) & f_{yy}(0,0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -8 < 0,$$

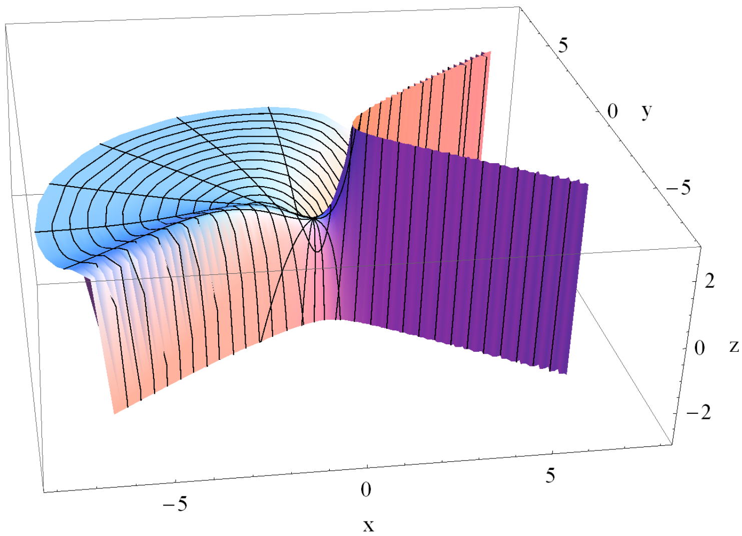
slijedi da funkcija f u točki $(0,0)$ ima sedlo. Nadalje, zbog

$$H(-4,-2) = \begin{vmatrix} f_{xx}(-4,-2) & f_{xy}(-4,-2) \\ f_{xy}(-4,-2) & f_{yy}(-4,-2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boxed{-6e^{-2}} & 8e^{-2} \\ 8e^{-2} & -12e^{-2} \end{vmatrix} = 8e^{-4} > 0$$

$$f_{xx}(-4,-2) = -6e^{-2} < 0$$

slijedi da funkcija f u točki $(-4,-2)$ ima lokalni maksimum koji iznosi

$$f(-4,-2) = e^{-4-(-2)}\big((-4)^2 - 2\cdot(-2)^2\big) = 8e^{-2}.$$



Zadatak 56.
Nađite lokalne ekstreme funkcije $f(x,y) = x^4 + y^4$.

Rješenje.
Parcijalne derivacije funkcije f su $f_x(x,y) = 4x^3$, $f_y(x,y) = 4y^3$. Izjednačimo li parcijalne derivacije s nulom, dobivamo sustav

$$4x^3 = 0$$
$$4y^3 = 0$$

koji ima samo jedno rješenje $x = 0$, $y = 0$. Dakle, dobili smo samo jednu stacionarnu točku $(0,0)$. Parcijalne derivacije drugog reda funkcije f jednake su

$$f_{xx}(x,y) = 12x^2, \quad f_{xy}(x,y) = 0, \quad f_{yy}(x,y) = 12y^2$$

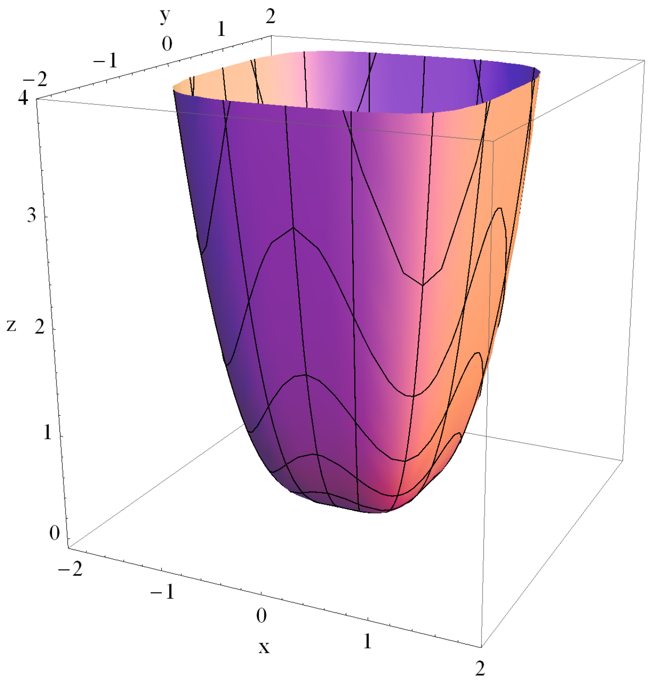
pa je Hesseova determinanta jednaka

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{xy}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{vmatrix}.$$

Kako je u stacionarnoj točki $(0,0)$ vrijednost Hesseove determinante

$$H(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

treba provesti daljnja ispitivanja. Uočimo da je $f(0,0) = 0$ i $f(x,y) = x^4 + y^4 > 0$ za svaki $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ pa u $(0,0)$ funkcija f ima strogi lokalni minimum koji je ujedno i njezin globalni minimum.



Zadatak 57.
Nađite lokalne ekstreme funkcije $f(x,y) = x^2$.

Rješenje.
Parcijalne derivacije funkcije f su $f_x(x,y) = 2x$, $f_y(x,y) = 0$. Izjednačimo li parcijalne derivacije s nulom, dobivamo sustav

$$\begin{aligned} 2x &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

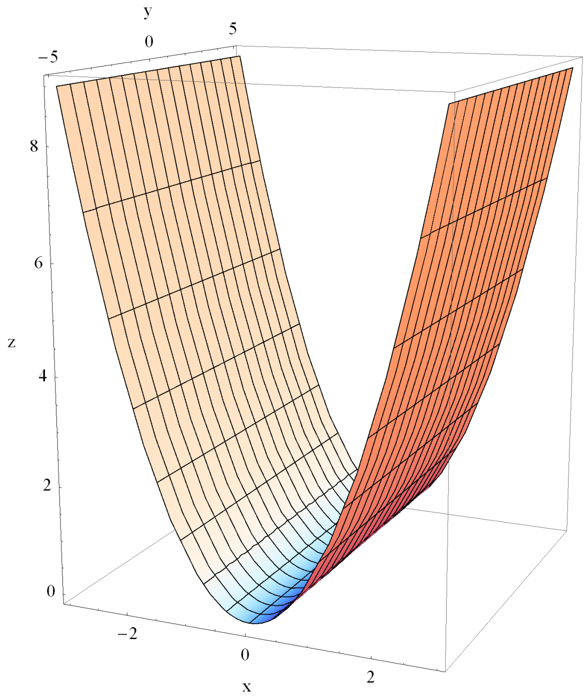
koji ima beskonačno mnogo rješenja: $x = 0$, $y \in \mathbb{R}$. Dakle, dobili smo beskonačno mnogo stacionarnih točaka $(0,y)$, gdje je $y \in \mathbb{R}$. Parcijalne derivacije drugog reda funkcije f jednake su

$$f_{xx}(x,y) = 2, \quad f_{xy}(x,y) = 0, \quad f_{yy}(x,y) = 0$$

pa je Hesseova determinanta jednaka

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{xy}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Specijalno, u svakoj stacionarnoj točki $(0, y)$ je $H(0, y) = 0$ pa treba provesti daljnja ispitivanja za svaku stacionarnu točku $(0, y)$. Kako je $f(0, y) = 0$ i $f(x, y) = x^2 \geqslant 0$ za svaki $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, slijedi da u svim točkama $(0, y)$ funkcija f ima lokalne minimume koji su ujedno i njezini globalni minimumi, ali ti minimumi nisu strogi.



Zadatak 58.
Odredite lokalne ekstreme funkcije $g(x, y) = \big(e^y + 1\big)\cos x - ye^y$.

Rješenje.
Parcijalne derivacije funkcije g jednake su

$$\begin{aligned} g_x(x, y) &= -\big(e^y + 1\big)\sin x \\ g_y(x, y) &= e^y \cos x - e^y - ye^y = e^y\big(\cos x - y - 1\big) \end{aligned}$$

Izjednačimo parcijalne derivacije s nulom i dobivamo sustav

$$\begin{aligned} -\big(e^y + 1\big)\sin x &= 0 \\ e^y\big(\cos x - y - 1\big) &= 0 \end{aligned}$$

Kako je uvijek $e^y + 1 \neq 0$ i $e^y \neq 0$, promatrani sustav je ekvivalentan sa sustavom

$$\begin{aligned} \sin x &= 0 \\ \cos x - y - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Iz prve jednadžbe dobivamo $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Uvrstimo li $x = k\pi$ u drugu jednadžbu, dobivamo

$$\begin{aligned} \cos k\pi - y - 1 &= 0 \\ (-1)^k - y - 1 &= 0 \\ y &= (-1)^k - 1 \end{aligned}$$

Dobili smo beskonačno mnogo stacionarnih točaka oblika

$$\big(k\pi, (-1)^k - 1\big), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Kako bismo lakše odredili karakter stacionarnih točaka, podijelit ćemo ih u dvije grupe u ovisnosti o tome da li je k paran ili neparan cijeli broj. Naime, vrijedi

$$(-1)^k - 1 = \begin{cases} 0, & \text{ako je } k \text{ paran broj} \\ -2, & \text{ako je } k \text{ neparan broj} \end{cases}$$

pa dobivamo dvije skupine stacionarnih točaka

$$\big(2k\pi, 0\big), \quad \big((2k+1)\pi, -2\big), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Parcijalne derivacije drugog reda funkcije g jednake su

$$g_{xx}(x,y) = -\big(e^y + 1\big)\cos x, \qquad g_{xy}(x,y) = -e^y \sin x$$
$$g_{yy}(x,y) = e^y\big(\cos x - y - 1\big) + e^y \cdot (-1) = e^y\big(\cos x - y - 2\big)$$

pa je Hesseova determinanta jednaka

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} -\big(e^y+1\big)\cos x & -e^y \sin x \\ -e^y \sin x & e^y\big(\cos x - y - 2\big) \end{vmatrix}.$$

Kako je

$$H(2k\pi, 0) = \begin{vmatrix} -\big(e^0+1\big)\cos(2k\pi) & -e^0 \sin(2k\pi) \\ -e^0 \sin(2k\pi) & e^0\big(\cos(2k\pi) - 0 - 2\big) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boxed{-2} & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 > 0$$

$$g_{xx}(2k\pi, 0) = -2 < 0$$

slijedi da funkcija g u svim točkama $\big(2k\pi, 0\big)$ ima lokalne maksimume za svaki $k \in \mathbb{Z}$.

$$g(2k\pi, 0) = \big(e^0 + 1\big)\cos(2k\pi) - 0 \cdot e^0 = 2$$

Dakle, u svim točkama $\big(2k\pi, 0\big)$ lokalni maksimumi su jednaki 2. Nadalje, zbog

$$H\big((2k+1)\pi, -2\big) = \begin{vmatrix} -\big(e^{-2}+1\big)\cos\big((2k+1)\pi\big) & -e^{-2}\sin\big((2k+1)\pi\big) \\ -e^{-2}\sin\big((2k+1)\pi\big) & e^{-2}\big(\cos\big((2k+1)\pi\big) - (-2) - 2\big) \end{vmatrix} =$$

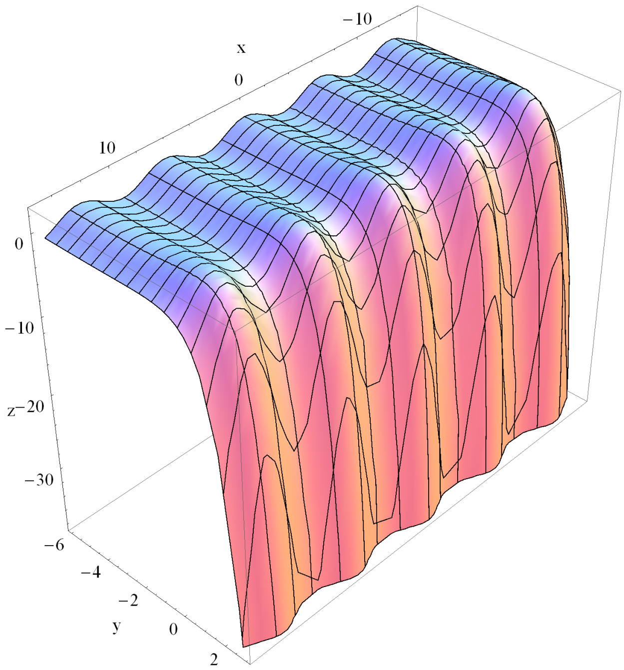
$$= \begin{vmatrix} e^{-2}+1 & 0 \\ 0 & -e^{-2} \end{vmatrix} = -e^{-2}\big(e^{-2}+1\big) < 0$$

slijedi da su točke $\big((2k+1)\pi, -2\big)$ sedlaste točke funkcije g za svaki $k \in \mathbb{Z}$.

Konačno, zaključujemo da funkcija g ima beskonačno mnogo lokalnih maksimuma, ali isto tako i beskonačno mnogo sedlastih točki. Nacrtamo li graf zadane funkcije u `Mathematici` na malo većoj domeni pomoću naredbe

```
Plot3D[(E^y + 1) Cos[x] - y E^y, {x, -15, 15}, {y, -6, 3},
 AxesLabel -> {"x", "y", "z"},
 PlotRange -> {Automatic, Automatic, {-39, 3}},
 BoxRatios -> {2, 1, 1.5}, ClippingStyle -> None]
```

dobivamo sliku

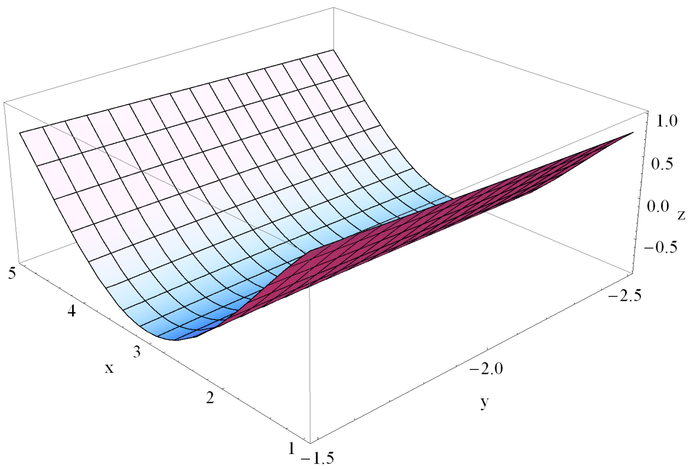


na kojoj možemo uočiti lokalne maksimume u točkama $\big(2k\pi, 0\big)$, ali sedlaste točke $\big((2k+1)\pi, -2\big)$ nisu tako uočljive. Štoviše, gledajući gornju sliku, čak bismo se usudili reći da osim točaka $\big(2k\pi, 0\big)$ postoji još točaka u kojima funkcija g ima lokalne ekstreme, a da sedlastih točaka uopće nema. No, moramo biti oprezni jer nas slika može prevariti.

Nacrtamo li graf zadane funkcije u `Mathematici` u okolini sedlaste točke $(\pi, -2)$ pomoću naredbe

```
Plot3D[(E^y + 1) Cos[x] - y E^y, {x, 1, 5}, {y, -2.5, -1.5},
                                        AxesLabel -> {"x", "y", "z"}]
```

dobivamo sliku



na temelju koje možemo donijeti još gori zaključak. Naime, ta slika nas jako podsjeća na sliku iz prethodnog zadatka u kojemu smo promatrali funkciju $f(x, y) = x^2$ pa bismo na temelju gornje slike mogli donijeti pogrešan zaključak da funkcija g ima beskonačno mnogo lokalnih minimuma koji nisu strogi minimumi.

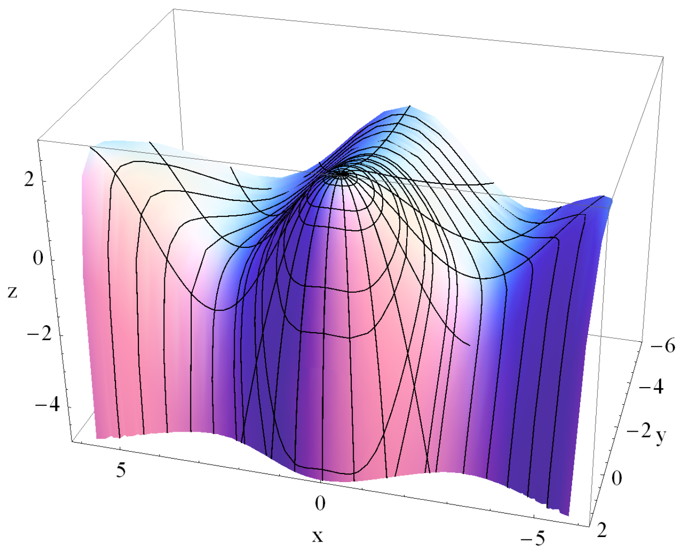
Prijeđemo li na parametarski oblik preko polarnih koordinata $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$, dobivamo da ploha zadana eksplicitno sa $z = \left(e^y + 1\right)\cos x - ye^y$ ima parametarske jednadžbe

$$x = r\cos\phi, \quad y = r\sin\phi, \quad z = \left(e^{r\sin\phi} + 1\right)\cos\left(r\cos\phi\right) - re^{r\sin\phi}\sin\phi.$$

Koristeći dobivene parametarske jednadžbe, nacrtamo u `Mathematici` graf funkcije g pomoću naredbe

```
ParametricPlot3D[{r Cos[\[Phi]], r Sin[\[Phi]],
  (1 + E^(r Sin[\[Phi]])) Cos[r Cos[\[Phi]]]-E^(r Sin[\[Phi]]) r Sin[\[Phi]]},
     {r, 0, 6}, {\[Phi], 0, 2 Pi},  AxesLabel -> {"x", "y", "z"},
                         PlotRange -> {Automatic, {-6, 2}, {-5, 3}}]
```

i dobivamo sliku



na kojoj ipak možemo jasnije uočiti sedlaste točke $\left(-\pi, -2\right)$ i $\left(\pi, -2\right)$ ili barem naslutiti da na grafu funkcije g postoje sedlaste točke.

Poanta ovog malo duljeg razmatranja je da se slikama ne smije vjerovati u potpunosti. Mi smo najprije egzaktnim matematičkim postupkom došli do lokalnih ekstrema i sedlastih točaka funkcije g, a zatim smo pokušali raznim trikovima te ekstreme i sedlaste točke što vjernije vizualizirati. Vidjeli smo da nije svaka vizualizacija opisivala vjerno stvarnu situaciju, a to nije ovisilo samo o funkciji i domeni na kojoj smo ju crtali, već i o načinu crtanja (u ovom primjeru smo koristili trik sa polarnim koordinatama i prelazak na parametarski oblik). Nije uvijek jednostavno odabrati pravi trik kojim ćemo dobiti što vjerniju sliku, a pogotovo nije dobro da sa slike donosimo neki zaključak bez stroge matematičke provjere ili dokaza. Slike nam mogu pomoći u donošenju zaključaka, ali nas isto tak u mnogim situacijama mogu jako prevariti. Stoga uvijek moramo najprije provesti strogi matematički postupak koji će nas dovesti do ispravnog zaključka, a tek nakon toga, kada smo sigurni kakva je stvarna situacija, tražiti trikove kojima ćemo dobiti što je moguće vjerniju sliku.

Zadatak 59.
Odredite lokalne ekstreme funkcije $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2y^2}}$.

Rješenje.
Kako bismo što lakše računali parcijalne derivacije, a pogotovo parcijalne derivacije drugog reda, umjesto funkcije f promatrat ćemo funkciju

$$g(x,y) = x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2y^2}.$$

Naime, funkcije f i g, ukoliko imaju lokalnih ekstrema, postižu te ekstreme u istim točkama jer drugi korijen je maksimalan (minimalan) akko je izraz pod drugim korijenom maksimalan (minimalan). Uočimo da u našim oznakama vrijedi

$$f(x,y) = \sqrt{g(x,y)}.$$

Tražimo lokalne ekstreme funkcije g. Njezine parcijalne derivacije jednake su

$$g_x(x,y) = 2x - \frac{2}{x^3y^2}, \qquad g_y(x,y) = 2y - \frac{2}{x^2y^3}.$$

Izjednačimo li parcijalne derivacije s nulom, dobivamo sustav

$$\begin{aligned} 2x - \frac{2}{x^3y^2} &= 0 \\ 2y - \frac{2}{x^2y^3} &= 0 \end{aligned}$$

Svođenjem na zajednički nazivnik dobivamo

$$\begin{aligned} \frac{x^4y^2 - 1}{x^3y^2} &= 0 \\ \frac{x^2y^4 - 1}{x^2y^3} &= 0 \end{aligned}$$

iz čega slijedi da mora biti

$$\begin{aligned} x^4y^2 - 1 &= 0 \\ x^2y^4 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

odnosno

$$x^4y^2 = 1 \tag{5}$$

$$x^2y^4 = 1 \tag{6}$$

Oduzimanjem posljednjih jednadžbi dobivamo

$$x^4y^2 - x^2y^4 = 0,$$

a nakon izlučivanja

$$x^2y^2\left(x^2 - y^2\right) = 0.$$

Kako je produkt realnih brojeva jednak nula jedino ako je barem jedan od tih brojeva jednak nula, zaključujemo da imamo ukupno tri slučaja:

(i) $x = 0$

Ovaj slučaj otpada jer sve točke (x, y) kod kojih je $x = 0$ nisu u domeni funkcije g, niti u domeni funkcije f.

(ii) $y = 0$

Ovaj slučaj otpada jer sve točke (x, y) kod kojih je $y = 0$ nisu u domeni funkcije g, niti u domeni funkcije f.

(iii) $x^2 - y^2 = 0$

U ovom slučaju dobivamo da je $x^2 = y^2$, odnosno $x = \pm y$. Stoga razlikujemo dva podslučaja.

- $x = y$

  Uvrstimo li $x = y$ u (5), dobivamo $y^6 = 1$ iz čega slijedi da je $y_1 = 1$, $y_2 = -1$. Kako je $x = y$, mora biti $x_1 = 1$, $x_2 = -1$. Stoga dobivamo dvije stacionarne točke

$$(\overset{x_1}{1}, \overset{y_1}{1}), \quad (\overset{x_2}{-1}, \overset{y_2}{-1}).$$

- $x = -y$

  Uvrstimo li $x = -y$ u (5), dobivamo $y^6 = 1$ iz čega slijedi da je $y_3 = 1$, $y_4 = -1$. Kako je $x = -y$, mora biti $x_3 = -1$, $x_4 = 1$. Stoga opet dobivamo još dvije stacionarne točke

$$(\overset{x_3}{-1}, \overset{y_3}{1}), \quad (\overset{x_4}{1}, \overset{y_4}{-1}).$$

Dakle, dobili smo ukupno četiri kandidata za lokalne ekstreme funkcije g:

$$(\overset{x_1}{1}, \overset{y_1}{1}), \quad (\overset{x_2}{-1}, \overset{y_2}{-1}), \quad (\overset{x_3}{-1}, \overset{y_3}{1}), \quad (\overset{x_4}{1}, \overset{y_4}{-1}).$$

Parcijalne derivacije drugog reda funkcije g jednake su

$$g_{xx}(x, y) = 2 + \frac{6}{x^4 y^2}, \qquad g_{xy}(x, y) = \frac{4}{x^3 y^3}, \qquad g_{yy}(x, y) = 2 + \frac{6}{x^2 y^4}$$

pa je Hesseova determinanta jednaka

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} 2 + \frac{6}{x^4 y^2} & \frac{4}{x^3 y^3} \\ \frac{4}{x^3 y^3} & 2 + \frac{6}{x^2 y^4} \end{vmatrix}.$$

Pomoću Hesseove determinante ispitujemo karakter stacionarnih točaka.

$$H(1, 1) = \begin{vmatrix} \boxed{8} & 4 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 48 > 0, \quad g_{xx}(1, 1) = 8 > 0$$

$$H(-1, -1) = \begin{vmatrix} \boxed{8} & 4 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 48 > 0, \quad g_{xx}(-1, -1) = 8 > 0$$

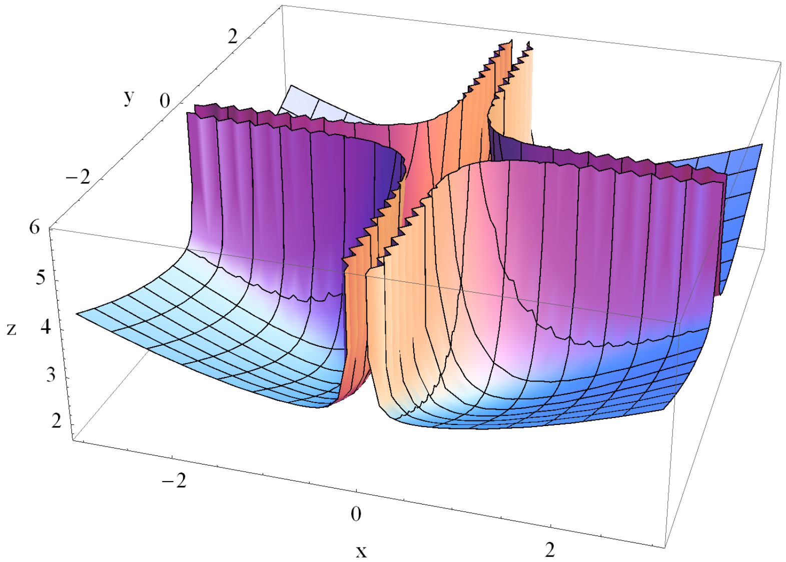
$$H(-1, 1) = \begin{vmatrix} \boxed{8} & -4 \\ -4 & 8 \end{vmatrix} = 48 > 0, \quad g_{xx}(-1, 1) = 8 > 0$$

$$H(1, -1) = \begin{vmatrix} \boxed{8} & -4 \\ -4 & 8 \end{vmatrix} = 48 > 0, \quad g_{xx}(1, -1) = 8 > 0$$

Zaključujemo da funkcija g u svim stacionarnim točkama $(1,1),(-1,-1),(-1,1),(1,-1)$ poprima lokalne minimume i svi lokalni minimumi su jednaki $g(1,1)=g(-1,-1)=g(-1,1)=g(1,-1)=3$. Zbog $f(x,y)=\sqrt{g(x,y)}$ i početne napomene, funkcija f također poprima lokalne minimume u točkama $(1,1),(-1,-1),(-1,1),(1,-1)$ i svi njezini lokalni minimumi su jednaki

$$f(1,1)=f(-1,-1)=f(-1,1)=f(1,-1)=\sqrt{3}.$$

Na donjoj slici je prikazan graf funkcije f.



Zadatak 60.
Zadana je funkcija $f(x,y)=xe^{-(x^2+y^2)}$.

a) Odredite lokalne ekstreme funkcije f.

b) Odredite gradijent funkcije f u točki $(0,1)$.

Rješenje.
a) Parcijalne derivacije funkcije f jednake su

$$f_x(x,y)=e^{-(x^2+y^2)}+xe^{-(x^2+y^2)}\cdot(-2x)=\left(1-2x^2\right)e^{-(x^2+y^2)}$$
$$f_y(x,y)=xe^{-(x^2+y^2)}\cdot(-2y)=-2xye^{-(x^2+y^2)}$$

Izjednačimo li parcijalne derivacije s nulom, dobivamo sustav

$$\left(1-2x^2\right)e^{-(x^2+y^2)}=0$$
$$-2xye^{-(x^2+y^2)}=0$$

Kako je uvijek $e^{-(x^2+y^2)}\neq 0$, prethodni sustav je ekvivalentan sa sustavom

$$1-2x^2=0$$
$$xy=0$$

Iz prve jednadžbe odmah dobivamo da je $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Uvrstimo li dobivena rješenja u drugu jednadžbu, slijedi $y_1 = 0$ i $y_2 = 0$. Dakle, dobili smo ukupno dvije stacionarne točke

$$\Big(\overset{x_1}{\tfrac{\sqrt{2}}{2}}, \overset{y_1}{0}\Big), \qquad \Big(\overset{x_2}{-\tfrac{\sqrt{2}}{2}}, \overset{y_2}{0}\Big).$$

Parcijalne derivacije drugog reda funkcije f jednake su

$$f_{xx}(x,y) = -4xe^{-(x^2+y^2)} + \big(1-2x^2\big)e^{-(x^2+y^2)} \cdot (-2x) = \big(4x^3-6x\big)e^{-(x^2+y^2)}$$

$$f_{xy}(x,y) = \big(1-2x^2\big)e^{-(x^2+y^2)} \cdot (-2y) = \big(4x^2y-2y\big)e^{-(x^2+y^2)}$$

$$f_{yy}(x,y) = -2xe^{-(x^2+y^2)} - 2xye^{-(x^2+y^2)} \cdot (-2y) = \big(4xy^2-2x\big)e^{-(x^2+y^2)}$$

pa je Hesseova determinanta jednaka

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} \big(4x^3-6x\big)e^{-(x^2+y^2)} & \big(4x^2y-2y\big)e^{-(x^2+y^2)} \\ \big(4x^2y-2y\big)e^{-(x^2+y^2)} & \big(4xy^2-2x\big)e^{-(x^2+y^2)} \end{vmatrix}.$$

Kako je

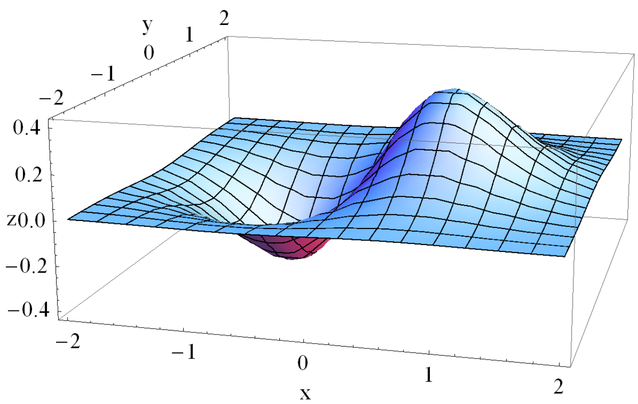
$$H\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) = \begin{vmatrix} \boxed{-2\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}}} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}} \end{vmatrix} = 4e^{-1} > 0, \quad f_{xx}\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) = -2\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}} < 0$$

funkcija f u točki $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ poprima lokalni maksimum koji je jednak $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}}$.

Nadalje, zbog

$$H\left(-\tfrac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) = \begin{vmatrix} \boxed{2\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}}} & 0 \\ 0 & \sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}} \end{vmatrix} = 4e^{-1} > 0, \quad f_{xx}\left(-\tfrac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) = 2\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}} > 0$$

funkcija f u točki $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ poprima lokalni minimum koji je jednak $f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}}$.



b) Gradijent funkcije f u točki $(0,1)$ jednak je $\nabla f(0,1) = f_x(0,1)\,\vec{i} + f_y(0,1)\,\vec{j}$. Kako je

$$f_x(0,1) = \big(1 - 2\cdot 0^2\big)\cdot e^{-(0^2+1^2)} = \frac{1}{e}$$

$$f_y(0,1) = -2\cdot 0\cdot 1\cdot e^{-(0^2+1^2)} = 0$$

slijedi da je gradijent funkcije f u točki $(0,1)$ jednak $\nabla f(0,1) = \frac{1}{e}\vec{i}$ ili kratko $\nabla f(0,1) = \left(\frac{1}{e}, 0\right)$.

Zadatak 61.
Zadana je funkcija $f(x,y) = 3xe^y - x^3 - e^{3y}$.

a) Odredite lokalne ekstreme i sedlaste točke funkcije f.

b) Odredite gradijent i diferencijal funkcije f u točki $(0,0)$.

Rješenje.
a) Parcijalne derivacije funkcije f jednake su

$$f_x(x,y) = 3e^y - 3x^2, \quad f_y(x,y) = 3xe^y - 3e^{3y}.$$

Izjednačimo li parcijalne derivacije s nulom, dobivamo sustav

$$\begin{aligned} 3e^y - 3x^2 &= 0 \\ 3xe^y - 3e^{3y} &= 0 \end{aligned}$$

odnosno, nakon što obje jednadžbe podijelimo s brojem 3,

$$e^y - x^2 = 0 \tag{7}$$

$$xe^y - e^{3y} = 0 \tag{8}$$

Iz jednadžbe (7) slijedi $e^y = x^2$ pa ako tu relaciju uvrstimo u jednadžbu (8), slijedi

$$\begin{aligned} xe^y - \left(e^y\right)^3 &= 0 \\ x \cdot x^2 - \left(x^2\right)^3 &= 0 \\ x^3 - x^6 &= 0 \\ x^3\left(1 - x^3\right) &= 0 \end{aligned}$$

Kako je produkt dva broja jednak nula ako je barem jedan od tih brojeva jednak nula, razlikujemo dva slučaja.

- $x^3 = 0$

U ovom slučaju dobivamo $x = 0$. Kako je $e^y = x^2$, slijedi $e^y = 0$, što je nemoguće. Stoga ovaj slučaj otpada.

- $1 - x^3 = 0$

U ovom slučaju dobivamo $x = 1$. Iz $e^y = x$ slijedi $e^y = 1$ pa je $y = 0$. Dakle, dobivamo samo jednu stacionarnu točku $(1,0)$.

Parcijalne derivacije drugog reda funkcije f jednake su

$$f_{xx}(x,y) = -6x, \qquad f_{xy}(x,y) = 3e^y, \qquad f_{yy}(x,y) = 3xe^y - 9e^{3y}$$

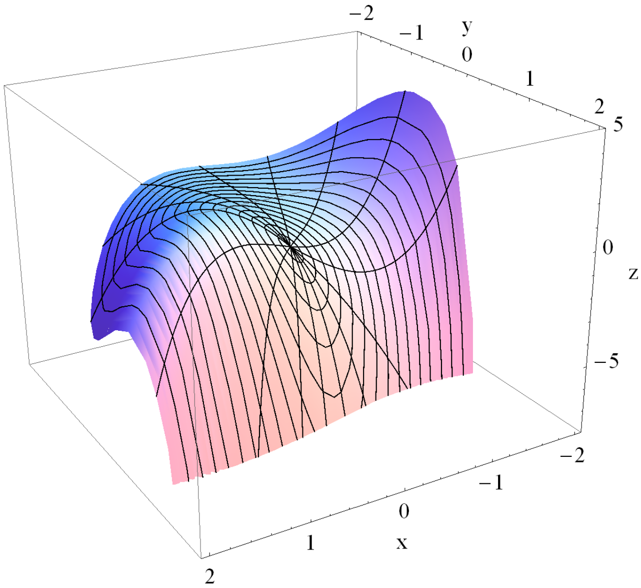
pa je Hesseova determinanta jednaka

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} -6x & 3e^y \\ 3e^y & 3xe^y - 9e^{3y} \end{vmatrix}.$$

Kako je

$$H(1,0) = \begin{vmatrix} \boxed{-6} & 3 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = 27 > 0, \quad f_{xx}(1,0) = -6 < 0$$

slijedi da funkcija f u točki $(1,0)$ poprima lokalni maksimum koji iznosi $f(1,0) = 1$.



b) Gradijent i diferencijal funkcije f u točki $(0,0)$ računaju se po formulama

$$\nabla f(0,0) = f_x(0,0)\,\vec{i} + f_y(0,0)\,\vec{j}$$
$$\mathrm{d}f(0,0) = f_x(0,0)\,\mathrm{d}x + f_y(0,0)\,\mathrm{d}y$$

Kako je $f_x(0,0) = 3$ i $f_y(0,0) = -3$, slijedi

$$\nabla f(0,0) = 3\vec{i} - 3\vec{j}$$
$$\mathrm{d}f(0,0) = 3\,\mathrm{d}x - 3\,\mathrm{d}y$$

Zadatak 62.
Zadana je funkcija $f(x,y) = xy^2 + x^3y - xy$.

a) Odredite kritične točke funkcije f.

b) Klasificirajte kritične točke.

Rješenje.
a) Parcijalne derivacije funkcije f su

$$f_x(x,y) = y^2 + 3x^2y - y, \qquad f_y(x,y) = 2xy + x^3 - x.$$

Izjednačimo li parcijalne derivacije s nulom, dobivamo sustav

$$y^2 + 3x^2y - y = 0$$
$$2xy + x^3 - x = 0$$

odnosno nakon izlučivanja

$$y\big(y+3x^2-1\big)=0 \tag{9}$$
$$x\big(2y+x^2-1\big)=0 \tag{10}$$

Iz jednadžbe (9) slijedi da imamo dva slučaja.

- $y=0$

  Uvrstimo li $y=0$ u jednadžbu (10), dobivamo

  $$\begin{aligned} x\big(2\cdot 0+x^2-1\big)&=0\\ x\big(x^2-1\big)&=0 \end{aligned}$$

  pa imamo tri rješenja $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=-1$. Stoga smo u ovom slučaju dobili ukupno tri stacionarne točke

  $$(\overset{x_1}{0},\overset{y}{0}),\quad (\overset{x_2}{1},\overset{y}{0}),\quad (\overset{x_3}{-1},\overset{y}{0}).$$

- $y+3x^2-1=0$

  U ovom slučaju je $y=-3x^2+1$. Uvrstimo li $y=-3x^2+1$ u jednadžbu (10), dobivamo

  $$\begin{aligned} x\Big(2\cdot\big(-3x^2+1\big)+x^2-1\Big)&=0\\ x\big(-6x^2+2+x^2-1\big)&=0\\ x\big(-5x^2+1\big)&=0 \end{aligned}$$

  pa imamo tri nova rješenja $x_4=0$, $x_5=\frac{1}{\sqrt{5}}$, $x_6=-\frac{1}{\sqrt{5}}$. Kako je $y=-3x^2+1$, slijedi

  $$\begin{aligned} y_4&=-3\cdot 0^2+1=1\\ y_5&=-3\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2+1=\frac{2}{5}\\ y_6&=-3\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2+1=\frac{2}{5} \end{aligned}$$

  pa u ovom slučaju dobivamo još tri nove stacionarne točke

  $$(\overset{x_4}{0},\overset{y_4}{1}),\quad \Big(\overset{x_5}{\tfrac{1}{\sqrt{5}}},\overset{y_5}{\tfrac{2}{5}}\Big),\quad \Big(\overset{x_6}{-\tfrac{1}{\sqrt{5}}},\overset{y_6}{\tfrac{2}{5}}\Big).$$

Zaključujemo da funkcija f ima ukupno šest stacionarnih ili kritičnih točaka.

$$(0,0),\quad (1,0),\quad (-1,0),\quad (0,1),\quad \Big(\tfrac{1}{\sqrt{5}},\tfrac{2}{5}\Big),\quad \Big(-\tfrac{1}{\sqrt{5}},\tfrac{2}{5}\Big)$$

b) Klasifikaciju kritičnih točaka radimo pomoću Hesseove determinante. Parcijalne derivacije drugog reda funkcije f jednake su

$$f_{xx}(x,y)=6xy,\qquad f_{xy}(x,y)=2y+3x^2-1,\qquad f_{yy}(x,y)=2x$$

pa je Hesseova determinanta jednaka

$$H(x,y)=\begin{vmatrix} 6xy & 2y+3x^2-1\\ 2y+3x^2-1 & 2x \end{vmatrix}.$$

Kako je

$$H(0,0)=\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1<0, \qquad H(1,0)=\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4<0$$

$$H(-1,0)=\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -4<0, \qquad H(0,1)=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1<0$$

točke $(0,0)$, $(1,0)$, $(-1,0)$, $(0,1)$ su sedlaste točke funkcije f. Nadalje, kako je

$$H\left(\tfrac{1}{\sqrt{5}},\tfrac{2}{5}\right)=\begin{vmatrix} \boxed{\frac{12}{5\sqrt{5}}} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{vmatrix} = \tfrac{4}{5}>0, \quad f_{xx}\left(\tfrac{1}{\sqrt{5}},\tfrac{2}{5}\right)=\tfrac{12}{5\sqrt{5}}>0$$

funkcija f u točki $\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{5}\right)$ ima lokalni minimum koji je jednak

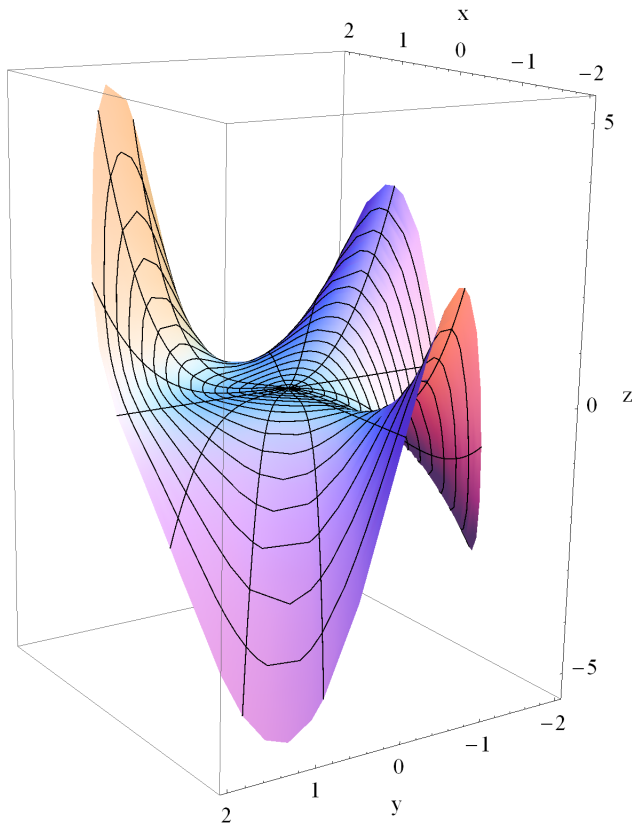
$$f\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{5}\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^3\cdot\frac{2}{5}-\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{2}{5}=\frac{4}{25\sqrt{5}}+\frac{2}{25\sqrt{5}}-\frac{2}{5\sqrt{5}}=-\frac{4}{25\sqrt{5}}.$$

Konačno, kako je

$$H\left(-\tfrac{1}{\sqrt{5}},\tfrac{2}{5}\right)=\begin{vmatrix} \boxed{-\frac{12}{5\sqrt{5}}} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{vmatrix} = \tfrac{4}{5}>0, \quad f_{xx}\left(-\tfrac{1}{\sqrt{5}},\tfrac{2}{5}\right)=-\tfrac{12}{5\sqrt{5}}<0$$

funkcija f u točki $\left(-\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{5}\right)$ ima lokalni maksimum koji je jednak

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{5}\right)=-\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^3\cdot\frac{2}{5}-\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\cdot\frac{2}{5}=-\frac{4}{25\sqrt{5}}-\frac{2}{25\sqrt{5}}+\frac{2}{5\sqrt{5}}=\frac{4}{25\sqrt{5}}.$$



Zadatak 63.
Odredite lokalne ekstreme i sedlaste točke funkcije $f(x,y) = x + y + \frac{x^2}{x^2+y^2}$.

Rješenje.
Parcijalne derivacije funkcije f jednake su

$$f_x(x,y) = 1 + \frac{2x(x^2+y^2) - x^2 \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = 1 + \frac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_y(x,y) = 1 + \frac{0 \cdot (x^2+y^2) - x^2 \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = 1 - \frac{2x^2y}{(x^2+y^2)^2}$$

Izjednačimo li parcijalne derivacije s nulom, dobivamo sustav

$$1 + \frac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2} = 0 \tag{11}$$

$$1 - \frac{2x^2y}{(x^2+y^2)^2} = 0 \tag{12}$$

Ako od jednadžbe (11) oduzmemo jednadžbu (12), dobivamo

$$\left(1 + \frac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2}\right) - \left(1 - \frac{2x^2y}{(x^2+y^2)^2}\right) = 0$$

$$\frac{2xy^2 + 2x^2y}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

$$2xy^2 + 2x^2y = 0 \big/ : 2$$

$$xy(x+y) = 0$$

pa razlikujemo tri slučaja:

- $x = 0$

  Uvrstimo li $x = 0$ u jednadžbu (11), dobivamo $1 = 0$, što je nemoguće pa ovaj slučaj otpada.

- $y = 0$

  Uvrstimo li $y = 0$ u jednadžbu (11), dobivamo $1 = 0$, što je nemoguće pa ovaj slučaj otpada.

- $x + y = 0$

  U ovom slučaju je $y = -x$ pa ako to uvrstimo u jednadžbu (11), dobivamo

$$1 + \frac{2x \cdot (-x)^2}{(x^2+(-x)^2)^2} = 0$$

$$1 + \frac{2x^3}{4x^4} = 0$$

$$1 + \frac{1}{2x} = 0$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

  Kako je $y = -x$, slijedi da mora biti $y = \frac{1}{2}$. Dobiveno rješenje $x = -\frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$ zadovoljava također i jednadžbu (12) pa smo dobili jednu stacionarnu točku $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Dakle, funkcija f ima samo jednu stacionarnu točku $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Parcijalne derivacije drugog reda funkcije f jednake su

$$f_{xx}(x,y) = \frac{2y^2(x^2+y^2)^2 - 2xy^2 \cdot 2(x^2+y^2)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^4} = \frac{(x^2+y^2)\big(2y^2(x^2+y^2) - 8x^2y^2\big)}{(x^2+y^2)^4}$$

$$f_{xx}(x,y) = \frac{2y^4 - 6x^2y^2}{(x^2+y^2)^3}$$

$$f_{xy}(x,y) = \frac{4xy(x^2+y^2)^2 - 2xy^2 \cdot 2(x^2+y^2)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^4} = \frac{(x^2+y^2)\big(4xy(x^2+y^2) - 8xy^3\big)}{(x^2+y^2)^4}$$

$$f_{xy}(x,y) = \frac{4x^3y - 4xy^3}{(x^2+y^2)^3}$$

$$f_{yy}(x,y) = \frac{-2x^2(x^2+y^2)^2 - (-2x^2y)\cdot 2(x^2+y^2)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^4} = \frac{(x^2+y^2)\big(-2x^2(x^2+y^2) + 8x^2y^2\big)}{(x^2+y^2)^4}$$

$$f_{yy}(x,y) = \frac{6x^2y^2 - 2x^4}{(x^2+y^2)^3}$$

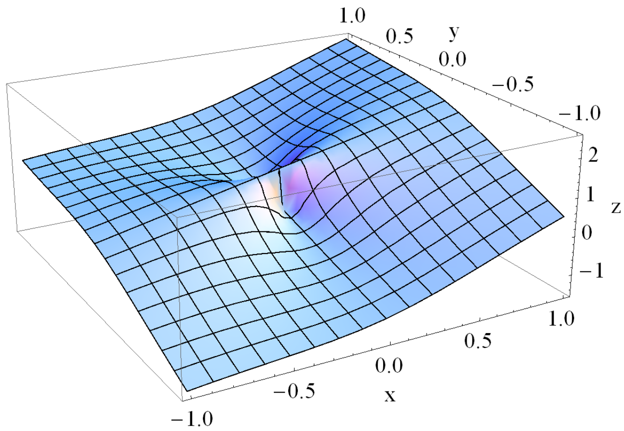
pa je Hesseova determinanta jednaka

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{2y^4-6x^2y^2}{(x^2+y^2)^3} & \frac{4x^3y-4xy^3}{(x^2+y^2)^3} \\ \frac{4x^3y-4xy^3}{(x^2+y^2)^3} & \frac{6x^2y^2-2x^4}{(x^2+y^2)^3} \end{vmatrix}.$$

Kako je

$$H\left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4 < 0$$

funkcija f u točki $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ima sedlo.



Do sada smo tražili lokalne ekstreme funkcije na čitavoj domeni. U primjenama je često potrebno pronaći ekstreme funkcije na nekom podskupu S domene. Jedan od takvih slučajeva su uvjetni ekstremi kod kojih je skup S zadan preko jedne ili više jednadžbi koje zovemo uvjetima. U sljedeća dva teorema dani su nužni uvjeti za postojanje uvjetnih ekstrema uz jedan ili više zadanih uvjeta.

Teorem. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup, neka su $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ funkcije klase C^1, neka je za $k \in \mathbb{R}$ zadan skup $S = \{P \in \Omega : g(P) = k\}$ te neka vrijedi $\nabla g(P) \neq \mathbf{0}$ za svaki $P \in S$. Ako je $P_0 \in S$ točka lokalnog ekstrema za $f|_S$, tada postoji $\lambda \in \mathbb{R}$ sa svojstvom $\nabla f(P_0) = \lambda \nabla g(P_0)$.*

Teorem. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup i $f, g_1, \dots, g_m : \Omega \to \mathbb{R}$ funkcije klase C^1 pri čemu je $m < n$. Neka je $S = \{P \in \Omega : g_i(P) = 0, \forall i = 1, \dots, m\}$ te neka je $\{\nabla g_1(P), \dots, \nabla g_m(P)\}$ linearno nezavisan skup za svaki $P \in S$. Ako je $P_0 \in S$ točka lokalnog ekstrema za $f|_S$, tada postoje brojevi $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ takvi da vrijedi $\nabla f(P_0) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(P_0)$.*

Napomena. Traženje ekstrema realne funkcije $f = f(x_1, \dots, x_n)$ uz uvjete

$$g_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \; g_2(x_1, \dots, x_n) = 0, \; \dots, \; g_m(x_1, \dots, x_n) = 0$$

je ekvivalentno sa traženjem običnih ekstrema tzv. **Lagrangeove funkcije**

$$L(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(x_1, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x_1, \dots, x_n).$$

Kako ćemo se mi zadržati samo na traženju uvjetnih ekstrema realnih funkcija dvije ili tri varijable, nama neće spomenuti teoremi trebati u tolikoj općenitosti. Stoga ćemo svaki od slučajeva, koje ćemo koristiti u zadacima, opisati zasebno sa nužnim i dovoljnim uvjetima za postojanje uvjetnih ekstrema. Na taj način ćemo izbjeći preduboko ulaženje u teoriju.

Postupak traženja uvjetnih ekstrema realne funkcije dvije varijable uz jedan uvjet. Neka je $z = f(x, y)$ realna funkcija dvije varijable i pretpostavimo da tražimo njezine lokalne ekstreme uz uvjet $g(x, y) = 0$.

(i) Najprije formiramo Lagrangeovu funkciju $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$ i pronađemo njezine parcijalne derivacije L_x, L_y, L_λ.

(ii) Nakon toga rješavamo sustav

$$\begin{cases} L_x(x, y, \lambda) = 0 \\ L_y(x, y, \lambda) = 0 \\ L_\lambda(x, y, \lambda) = 0 \end{cases}$$

Rješenja tog sustava zovemo stacionarnim točkama, a te točke su upravo kandidati za lokalne uvjetne ekstreme.

(iii) Pronađemo parcijalne derivacije L_{xx}, L_{xy}, L_{yy}, g_x, g_y i formiramo determinantu

$$\Delta(x, y, \lambda) = - \begin{vmatrix} 0 & g_x(x, y) & g_y(x, y) \\ g_x(x, y) & L_{xx}(x, y, \lambda) & L_{xy}(x, y, \lambda) \\ g_y(x, y) & L_{xy}(x, y, \lambda) & L_{yy}(x, y, \lambda) \end{vmatrix}.$$

(iv) Neka je (x_0, y_0, λ_0) stacionarna točka.

- Ako je $\Delta(x_0, y_0, \lambda_0) > 0$, tada funkcija f u točki (x_0, y_0) ima lokalni uvjetni minimum.
- Ako je $\Delta(x_0, y_0, \lambda_0) < 0$, tada funkcija f u točki (x_0, y_0) ima lokalni uvjetni maksimum.
- Ako je $\Delta(x_0, y_0, \lambda_0) = 0$, tada ovaj postupak ne daje odgovor.

Postupak traženja uvjetnih ekstrema realne funkcije tri varijable uz jedan uvjet. Neka je $u = f(x, y, z)$ realna funkcija tri varijable i pretpostavimo da tražimo njezine lokalne ekstreme uz uvjet $g(x, y, z) = 0$.

(i) Najprije formiramo Lagrangeovu funkciju $L(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z)$ i pronađemo njezine parcijalne derivacije L_x, L_y, L_z, L_λ.

(ii) Nakon toga rješavamo sustav

$$\begin{cases} L_x(x, y, z, \lambda) = 0 \\ L_y(x, y, z, \lambda) = 0 \\ L_z(x, y, z, \lambda) = 0 \\ L_\lambda(x, y, z, \lambda) = 0 \end{cases}$$

Rješenja tog sustava zovemo stacionarnim točkama, a te točke su upravo kandidati za lokalne uvjetne ekstreme.

(iii) Pronađemo parcijalne derivacije L_{xx}, L_{xy}, L_{xz}, L_{yy}, L_{yz}, L_{zz}, g_x, g_y, g_z i formiramo determinante

$$\Delta_1(x, y, z, \lambda) = -\begin{vmatrix} 0 & g_x(x, y, z) & g_y(x, y, z) \\ g_x(x, y, z) & L_{xx}(x, y, z, \lambda) & L_{xy}(x, y, z, \lambda) \\ g_y(x, y, z) & L_{xy}(x, y, z, \lambda) & L_{yy}(x, y, z, \lambda) \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2(x, y, z, \lambda) = -\begin{vmatrix} 0 & g_x(x, y, z) & g_y(x, y, z) & g_z(x, y, z) \\ g_x(x, y, z) & L_{xx}(x, y, z, \lambda) & L_{xy}(x, y, z, \lambda) & L_{xz}(x, y, z, \lambda) \\ g_y(x, y, z) & L_{xy}(x, y, z, \lambda) & L_{yy}(x, y, z, \lambda) & L_{yz}(x, y, z, \lambda) \\ g_z(x, y, z) & L_{xz}(x, y, z, \lambda) & L_{yz}(x, y, z, \lambda) & L_{zz}(x, y, z, \lambda) \end{vmatrix}$$

(iv) Neka je $(x_0, y_0, z_0, \lambda_0)$ stacionarna točka.

- Ako je $\Delta_2(x_0, y_0, z_0, \lambda_0) > 0$, tada funkcija f u točki (x_0, y_0, z_0)
  - ima lokalni uvjetni minimum ako je $\Delta_1(x_0, y_0, z_0, \lambda_0) > 0$
  - ima lokalni uvjetni maksimum ako je $\Delta_1(x_0, y_0, z_0, \lambda_0) < 0$
  - nema lokalni uvjetni ekstrem ako je $\Delta_1(x_0, y_0, z_0, \lambda_0) = 0$
- Ako je $\Delta_2(x_0, y_0, z_0, \lambda_0) < 0$, tada funkcija f u točki (x_0, y_0, z_0) nema lokalni uvjetni ekstrem.
- Ako je $\Delta_2(x_0, y_0, z_0, \lambda_0) = 0$, tada ovaj postupak ne daje odgovor.

Postupak traženja uvjetnih ekstrema realne funkcije tri varijable uz dva uvjeta. Neka je $u = f(x, y, z)$ realna funkcija tri varijable i pretpostavimo da tražimo njezine lokalne ekstreme uz uvjete $g(x, y, z) = 0$, $h(x, y, z) = 0$.

(i) Najprije formiramo Lagrangeovu funkciju

$$L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = f(x, y, z) + \lambda_1 g(x, y, z) + \lambda_2 h(x, y, z)$$

i pronađemo njezine parcijalne derivacije L_x, L_y, L_z, L_{λ_1}, L_{λ_2}.

(ii) Nakon toga rješavamo sustav

$$\begin{cases} L_x(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) &= 0 \\ L_y(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) &= 0 \\ L_z(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) &= 0 \\ L_{\lambda_1}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) &= 0 \\ L_{\lambda_2}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) &= 0 \end{cases}$$

Rješenja tog sustava zovemo stacionarnim točkama, a te točke su upravo kandidati za lokalne uvjetne ekstreme.

(iii) Pronađemo parcijalne derivacije L_{xx}, L_{xy}, L_{xz}, L_{yy}, L_{yz}, L_{zz}, g_x, g_y, g_z, h_x, h_y, h_z i formiramo determinantu

$$\Delta(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & g_x(x,y,z) & g_y(x,y,z) & g_z(x,y,z) \\ 0 & 0 & h_x(x,y,z) & h_y(x,y,z) & h_z(x,y,z) \\ g_x(x,y,z) & h_x(x,y,z) & L_{xx}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) & L_{xy}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) & L_{xz}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) \\ g_y(x,y,z) & h_y(x,y,z) & L_{xy}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) & L_{yy}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) & L_{yz}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) \\ g_z(x,y,z) & h_z(x,y,z) & L_{xz}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) & L_{yz}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) & L_{zz}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) \end{vmatrix}$$

(iv) Neka je $(x_0, y_0, z_0, \lambda_1, \lambda_2)$ stacionarna točka.

- Ako je $\Delta(x_0, y_0, z_0, \lambda_1, \lambda_2) > 0$, tada funkcija f u točki (x_0, y_0, z_0) ima lokalni uvjetni minimum.
- Ako je $\Delta(x_0, y_0, z_0, \lambda_1, \lambda_2) < 0$, tada funkcija f u točki (x_0, y_0, z_0) ima lokalni uvjetni maksimum.
- Ako je $\Delta(x_0, y_0, z_0, \lambda_1, \lambda_2) = 0$, tada ovaj postupak ne daje odgovor.

Definicija. Omeđen i zatvoren skup u $\mathbb{R}^n$ zovemo kompaktan skup.

Teorem. *Neka je $K \subset \mathbb{R}^n$ kompaktan skup. Svaka neprekidna funkcija $f : K \to \mathbb{R}$ poprima na skupu K globalni minimum i globalni maksimum.*

Napomena. Ukoliko tražimo uvjetne ekstreme na kompaktnom skupu, tada u većini situacija nije potrebno ispitivati karakter stacionarnih točaka pomoću gore spomenutih determinanti jer nam prethodni teorem osigurava postojanje minimuma i maksimuma. Najčešće u takvim situacijama dobivamo dva kandidata za ekstreme pa prema prethodnom teoremu jedan od tih kandidata mora biti globalni minimum, a drugi globalni maksimum.

Zadatak 64.
Odredite ekstreme funkcije $z = 2x - 3y + 7$ na skupu $x^2 + y^2 = 1$.

Rješenje.
Radi se zapravo o uvjetnim ekstremima, tj. tražimo ekstreme funkcije $z = 2x - 3y + 7$ uz uvjet $x^2 + y^2 - 1 = 0$. Stoga najprije definiramo Lagrangeovu funkciju

$$L(x,y,\lambda) = 2x - 3y + 7 + \lambda\big(x^2 + y^2 - 1\big).$$

Parcijalne derivacije Lagrangeove funkcije jednake su

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2 + 2\lambda x, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = -3 + 2\lambda y, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 1.$$

Izjednačimo li parcijalne derivacije s nulom, dobivamo sustav

$$\begin{aligned} 2 + 2\lambda x &= 0 \\ -3 + 2\lambda y &= 0 \\ x^2 + y^2 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Uočimo da mora biti $\lambda \neq 0$ jer u protivnom prve dvije jednadžbe neće biti zadovoljene. Stoga iz prve i druge jednadžbe slijedi

$$x = -\frac{1}{\lambda}, \quad y = \frac{3}{2\lambda}$$

pa uvrštavanjem u treću jednadžbu dobivamo

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 1 &= 0 \\ \left(-\tfrac{1}{\lambda}\right)^2 + \left(\tfrac{3}{2\lambda}\right)^2 - 1 &= 0 \\ \frac{1}{\lambda^2} + \frac{9}{4\lambda^2} &= 1 \Big/ \cdot 4\lambda^2 \\ 4 + 9 &= 4\lambda^2 \\ \lambda^2 &= \frac{13}{4} \end{aligned}$$

Stoga je $\lambda_1 = \frac{\sqrt{13}}{2}$, $\lambda_2 = -\frac{\sqrt{13}}{2}$ pa slijedi

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{1}{\lambda_1} = -\frac{2}{\sqrt{13}}, \qquad & y_1 &= \frac{3}{2\lambda_1} = \frac{3}{\sqrt{13}} \\ x_2 &= -\frac{1}{\lambda_2} = \frac{2}{\sqrt{13}}, \qquad & y_2 &= \frac{3}{2\lambda_2} = -\frac{3}{\sqrt{13}} \end{aligned}$$

Dobili smo ukupno dvije stacionarne točke

$$\Big(\overset{x_1}{-\tfrac{2}{\sqrt{13}}}, \overset{y_1}{\tfrac{3}{\sqrt{13}}}, \overset{\lambda_1}{\tfrac{\sqrt{13}}{2}}\Big), \quad \Big(\overset{x_2}{\tfrac{2}{\sqrt{13}}}, \overset{y_2}{-\tfrac{3}{\sqrt{13}}}, \overset{\lambda_2}{-\tfrac{\sqrt{13}}{2}}\Big).$$

Kako je kružnica $x^2+y^2 = 1$ kompaktan skup u $\mathbb{R}^2$, neprekidna funkcija z poprima globalni minimum i globalni maksimum na toj kružnici. Kako smo dobili ukupno dva kandidata za ekstreme, u jednom od tih kandidata funkcija z poprima globalni minimum, a u drugom kandidatu globalni maksimum. Preciznije, u točkama

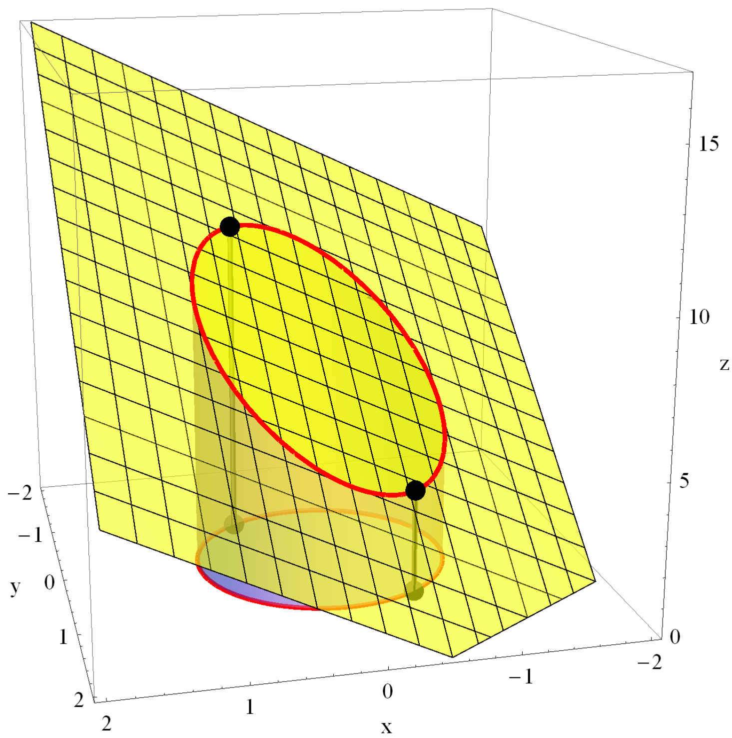
$$\Big(\overset{x_1}{-\tfrac{2}{\sqrt{13}}}, \overset{y_1}{\tfrac{3}{\sqrt{13}}}\Big), \quad \Big(\overset{x_2}{\tfrac{2}{\sqrt{13}}}, \overset{y_2}{-\tfrac{3}{\sqrt{13}}}\Big)$$

funkcija z poprima globalne uvjetne ekstreme. Računanjem dobivamo

$$\begin{aligned} z\left(\frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{3}{\sqrt{13}}\right) &= \frac{4}{\sqrt{13}} + \frac{9}{\sqrt{13}} + 7 = \frac{13}{\sqrt{13}} + 7 \\ z\left(-\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}\right) &= -\frac{4}{\sqrt{13}} - \frac{9}{\sqrt{13}} + 7 = -\frac{13}{\sqrt{13}} + 7 \end{aligned}$$

pa zaključujemo da funkcija z u točki $\left(\frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{3}{\sqrt{13}}\right)$ poprima globalni uvjetni maksimum koji je jednak $\frac{13}{\sqrt{13}} + 7$, a u točki $\left(-\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}\right)$ poprima globalni uvjetni minimum koji je jednak $-\frac{13}{\sqrt{13}} + 7$.

Uočite da je graf funkcije $z = 2x - 3y + 7$ zapravo ravnina i stoga je jasno da funkcija z nema ekstrema na svojoj prirodnoj domeni. Međutim, mi smo zapravo tražili ekstreme ove funkcije samo na kružnici $x^2 + y^2 = 1$. Kada se u xy-ravnini šećemo po kružnici $x^2 + y^2 = 1$, tada se na grafu funkcije z šećemo po crveno označenoj krivulji (u ovom slučaju je to elipsa) kako je prikazano na donjoj slici. Gledajući samo donju sliku jasno je da na toj krivulji funkcija z ima najveću i najmanju vrijednost, a to smo dobili i egzaktnim računom. Dakle, uvjetom $x^2+y^2 = 1$ smo ograničili kretanje po domeni funkcije, tako da funkciju z nismo promatrali na njezinoj prirodnoj domeni, nego smo promatrali njezino ponašanje samo duž kružnice $x^2 + y^2 = 1$ i dobili da na toj kružnici funkcija z poprima globalni minimum i globalni maksimum.



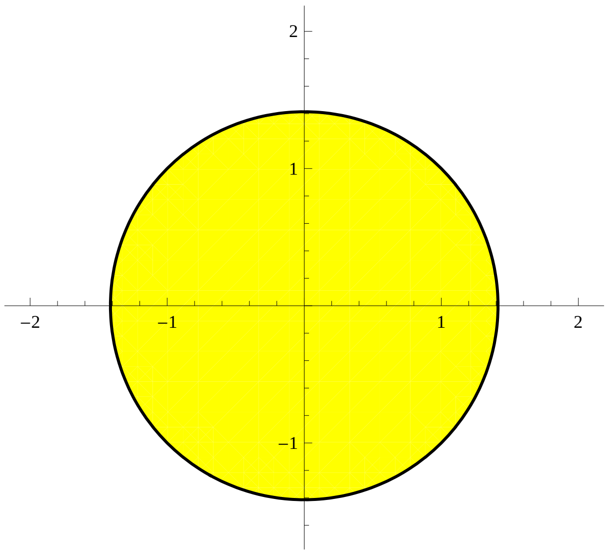
Zadatak 65.
Zadana je funkcija $f(x, y) = x + y$ i skup $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 2\}$.

a) Objasnite zašto funkcija f postiže minimum i maksimum na skupu D.

b) Odredite ekstreme funkcije f na skupu D.

Rješenje.
a) Skup D je zapravo krug polumjera $\sqrt{2}$ sa središtem u ishodištu. Skup D je omeđen i zatvoren pa je kompaktan skup. Kako svaka neprekidna funkcija na kompaktnom skupu postiže minimum i maksimum, slijedi da funkcija f (koja jest neprekidna) postiže minimum i maksimum na skupu D.

b) Prije nego krenemo tražiti ekstreme funkcije f na skupu D, objasnimo koja je bitna razlika između ovog i prethodnog zadatka. U prethodnom zadatku smo tražili ekstreme funkcije na skupu koji je bio zadan preko jednadžbe pa se to direktno svelo na uvjetne ekstreme. U ovom zadatku tražimo ekstreme funkcije na skupu koji je zadan preko nejednadžbe pa se to neće odmah direktno svesti na uvjetne ekstreme. Naime, posebno tražimo ekstreme u interioru skupa D, a posebno onda još nakon toga provjeravamo rub skupa D. Ekstreme u interioru skupa D tražimo na isti način kao i obične ekstreme funkcije s time da iz razmatranja odbacimo sve one stacionarne točke koje eventualno ne pripadaju skupu D. Provjeravanje ruba skupa D će se svesti na uvjetne ekstreme. Krenimo redom. Pogledajmo najprije da li funkcija f ima lokalnih ekstrema u interioru skupa D.



Parcijalne derivacije funkcije f jednake su $f_x(x, y) = 1$ i $f_y(x, y) = 1$. Izjednačimo li parcijalne derivacije s nulom, dobivamo sustav

$$\begin{aligned} 1 &= 0 \\ 1 &= 0 \end{aligned}$$

koji nema rješenja. Zaključujemo da funkcija f nema ekstrema u interioru skupa D pa se ekstremi postižu na rubu skupa D. Rub skupa D je kružnica $x^2 + y^2 = 2$. Stoga se traženje ekstrema funkcije f na rubu skupa D svodi na traženje ekstrema funkcije $f(x, y) = x + y$ uz uvjet $x^2 + y^2 - 2 = 0$. Definiramo Lagrangeovu funkciju

$$L(x, y, \lambda) = x + y + \lambda\big(x^2 + y^2 - 2\big)$$

i pronađemo njezine parcijalne derivacije.

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 1 + 2\lambda x, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 1 + 2\lambda y, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 2$$

Izjednačimo li parcijalne derivacije s nulom, dobivamo sustav

$$\begin{aligned} 1 + 2\lambda x &= 0 \\ 1 + 2\lambda y &= 0 \\ x^2 + y^2 - 2 &= 0 \end{aligned}$$

Uočimo da mora biti $\lambda \neq 0$ jer u protivnom prve dvije jednadžbe neće biti zadovoljene. Stoga iz prve i druge jednadžbe slijedi

$$x = -\frac{1}{2\lambda}, \quad y = -\frac{1}{2\lambda}$$

pa uvrštavanjem u treću jednadžbu dobivamo

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2 &= 0 \\ \left(-\tfrac{1}{2\lambda}\right)^2 + \left(-\tfrac{1}{2\lambda}\right)^2 - 2 &= 0 \\ \frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} &= 2 \Big/ \cdot 4\lambda^2 \\ 8\lambda^2 &= 2 \\ \lambda^2 &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Stoga je $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$ pa slijedi

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{1}{2\lambda_1} = -1, \qquad & y_1 &= -\frac{1}{2\lambda_1} = -1 \\ x_2 &= -\frac{1}{2\lambda_2} = 1, \qquad & y_2 &= -\frac{1}{2\lambda_2} = 1 \end{aligned}$$

Dobili smo ukupno dvije stacionarne točke

$$\Big(\overset{x_1}{-1},\ \overset{y_1}{-1},\ \overset{\lambda_1}{\tfrac{1}{2}}\Big), \quad \Big(\overset{x_2}{1},\ \overset{y_2}{1},\ \overset{\lambda_2}{-\tfrac{1}{2}}\Big).$$

Kako smo već ranije zaključili da funkcija f postiže ekstreme na rubu skupa D, u jednoj od dobivenih stacionarnih točaka funkcija f postiže minimum, a u drugoj maksimum. Preciznije, u točkama

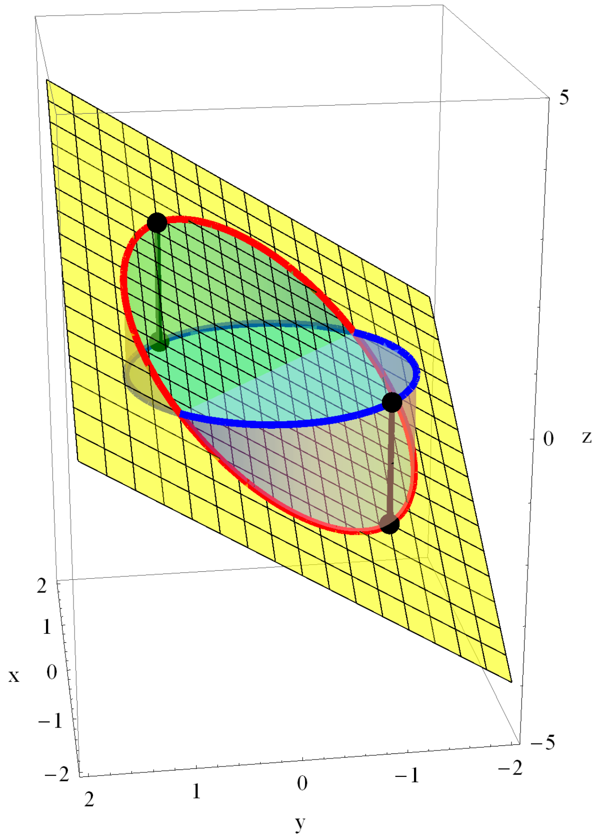
$$\Big(\overset{x_1}{-1},\ \overset{y_1}{-1}\Big), \quad \Big(\overset{x_2}{1},\ \overset{y_2}{1}\Big).$$

funkcija f postiže globalne ekstreme na skupu D. Računanjem dobivamo

$$f(-1,-1) = -1 + (-1) = -2, \qquad f(1,1) = 1 + 1 = 2$$

pa zaključujemo da funkcija f na skupu D u točki $(-1,-1)$ postiže globalni minimum koji je jednak -2, a u točki $(1,1)$ postiže globalni maksimum koji je jednak 2.

Uočite da je graf funkcije $f(x,y) = x+y$ ravnina pa je jasno da funkcija f nema ekstrema na svojoj prirodnoj domeni. Međutim, mi smo tražili ekstreme ove funkcije samo unutar kruga $x^2 + y^2 \leqslant 2$. Kada se u xy-ravnini šećemo unutar kruga $x^2+y^2 \leqslant 2$ (unutar plave kružnice na donjoj slici), tada se na grafu funkcije f šećemo unutar crvene krivulje (u ovom slučaju je to elipsa) kako je prikazano na donjoj slici. Gledajući samo donju sliku jasno je da na skupu D funkcija f ima najveću i najmanju vrijednost i da bi se te vrijednosti trebale postizati na rubu skupa D, a to smo dobili i egzaktnim računom.



Napomena (ekstremi funkcije na kompaktnom skupu). U prethodna dva zadatka smo zapravo tražili ekstreme neprekidnih funkcija na kompaktnim skupovima. Opisane metode u rješenjima tih zadataka zapravo se analogno primjenjuju za traženje ekstrema bilo koje neprekidne funkcije na bilo kojem kompaktnom skupu. Dakle, kod traženja ekstrema neprekidne funkcije $f : K \to \mathbb{R}$ na kompaktnom skupu K treba provesti sljedeće korake:

(i) Ako skup K ima neprazni interior, treba pronaći lokalne ekstreme u interioru skupa K. Njih tražimo na isti način kao i lokalne ekstreme funkcije f na prirodnoj domeni, jedino što u obzir uzimamo samo one stacionarne točke koje pripadaju skupu K. Ostale stacionarne točke koje ne pripadaju skupu K, ukoliko takvih ima, izbacujemo iz daljnjih razmatranja. Naravno, moguće je da funkcija f nema uopće stacionarnih točaka u interioru skupa K kako se to dogodilo u zadatku 65.

(ii) Treba ispitati postojanje ekstrema funkcije f na rubu skupa K. To ispitivanje se uglavnom svodi na računanje uvjetnih ekstrema funkcije f, a uvjet je u tom slučaju jednadžba ruba skupa K. U prethodna dva zadatka su to bile jednadžbe kružnica. Ako se rub skupa K sastoji od više različitih krivulja, tada na svakoj od tih krivulja zasebno provodimo računanje uvjetnih ekstrema funkcije f.

(iii) Uzmemo u obzir sve dobivene točke lokalnih ekstrema funkcije f iz koraka (i) i (ii). Funkcija f postiže globalni maksimum na skupu K u onoj točki u kojoj ima najveću vrijednost. Funkcija f postiže globalni minimum na skupu K u onoj točki u kojoj ima najmanju vrijednost. Moguće je da funkcija f poprima globalni minimum i maksimum u više različitih točaka skupa K.

Uočite da u zadatku 64. nismo provodili korak (i) jer je u tom zadatku kompaktan skup K bio kružnica, a kružnica ima prazni interior (intuitivno rečeno, nema unutrašnjost).

Zadatak 66.
Odredite ekstreme funkcije $z = xy$ uz uvjet $x + 2y = 1$.

Rješenje.
Zadatak ćemo riješiti na dva različita načina.

1. način: Pomoću Lagrangeove funkcije

Tražimo ekstreme funkcije $z = xy$ uz uvjet $g(x, y) = x + 2y - 1$. Definiramo Lagrangeovu funkciju

$$L(x, y, \lambda) = xy + \lambda(x + 2y - 1).$$

Njezine parcijalne derivacije su

$$L_x = y + \lambda, \qquad L_y = x + 2\lambda, \qquad L_\lambda = x + 2y - 1.$$

Izjednačavanjem parcijalnih derivacija s nulom, dobivamo sustav

$$\begin{aligned} y + \lambda &= 0 \\ x + 2\lambda &= 0 \\ x + 2y - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Iz prve dvije jednadžbe dobivamo $y = -\lambda$, $x = -2\lambda$ pa uvrštavanjem u treću jednadžbu slijedi

$$\begin{aligned} x + 2y - 1 &= 0 \\ -2\lambda + 2 \cdot (-\lambda) &= 1 \\ -4\lambda &= 1 \\ \lambda &= -\tfrac{1}{4} \end{aligned}$$

Stoga je $x = \frac{1}{2}$ i $y = \frac{1}{4}$. Dobili smo samo jednu stacionarnu točku $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$. Da bismo saznali da li funkcija z u točki $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ poprima uvjetni ekstrem, moramo provesti daljnja ispitivanja. Uočite da jednadžba $x + 2y = 1$ predstavlja pravac u ravnini, a pravac nije kompaktan skup jer nije omeđen. Stoga se u ovom slučaju ne možemo pozvati na teorem o ekstremima neprekidne funkcije na kompaktnom skupu. Kako je

$$L_{xx} = 0, \quad L_{xy} = 1, \quad L_{yy} = 0, \quad g_x = 1, \quad g_y = 2$$

dobivamo

$$\Delta(x, y, \lambda) = -\begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{xy} & L_{yy} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Nas zanima vrijednost determinante Δ u stacionarnoj točki $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$. Kako je

$$\Delta\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, -\tfrac{1}{4}\right) = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -4 < 0,$$

zaključujemo da funkcija z u točki $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ postiže lokalni uvjetni maksimum koji je jednak $\frac{1}{8}$.

2. način: Uvrštavanje uvjeta u funkciju

Kako je uvjet $x + 2y = 1$ jako jednostavan, moguće je iz njega, npr. varijablu x izraziti pomoću varijable y i taj izraz uvrstiti u funkciju $z = xy$ čije uvjetne ekstreme tražimo. Dakle, iz uvjeta $x + 2y = 1$ slijedi $x = 1 - 2y$. Uvrstimo li $x = 1 - 2y$ u funkciju $z = xy$, dobivamo

$$z = xy = (1 - 2y)y = y - 2y^2.$$

Uočavamo da smo dobili funkciju jedne varijable $f(y) = y - 2y^2$ i sada tražimo njezine ekstreme bez ikakvih uvjeta. Derivacija funkcije f jednaka je $f'(y) = 1 - 4y$. Stacionarne točke funkcije f dobivamo rješavanjem jednadžbe $1 - 4y = 0$ pa je $y = \frac{1}{4}$ stacionarna točka funkcije f. Iz $f''(y) = -4$ slijedi da je $f''\left(\frac{1}{4}\right) = -4 < 0$ pa funkcija f postiže lokalni maksimum u točki $y = \frac{1}{4}$ koji je jednak

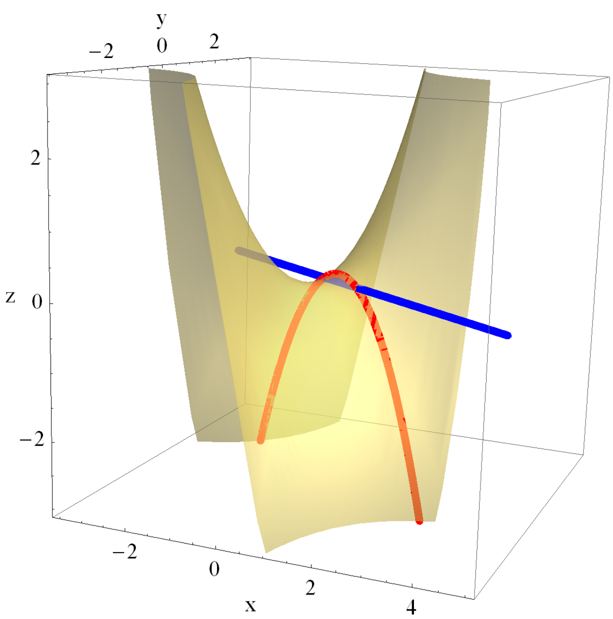
$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} - 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{8}.$$

Nadalje, iz $x = 1 - 2y$ slijedi da je

$$x = 1 - 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

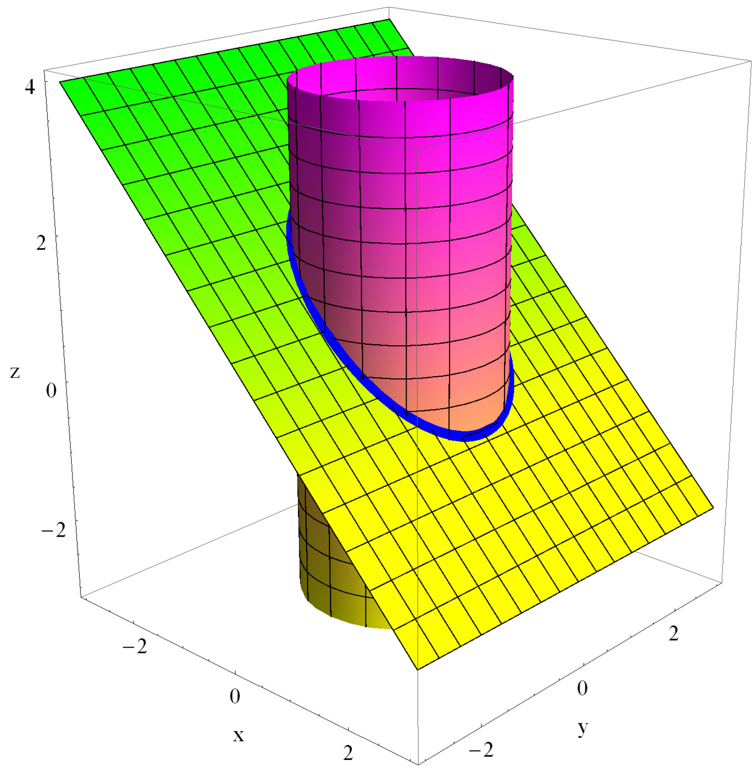
pa zaključujemo da funkcija $z = xy$ postiže u točki $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ lokalni uvjetni maksimum koji iznosi $\frac{1}{8}$.

Ako na donjoj slici pogledamo graf funkcije $z = xy$, jasno nam je da funkcija z nema ekstrema na svojoj prirodnoj domeni. Međutim, mi smo tražili ekstreme ove funkcije samo duž pravca $x+2y = 1$. Kada se u xy-ravnini šećemo po pravcu $x + 2y = 1$ (plavi pravac na donjoj slici), tada se na grafu funkcije z šećemo po crvenoj krivulji kako je prikazano na donjoj slici. Gledajući samo donju sliku jasno nam je da na pravcu $x + 2y = 1$ funkcija z ima najveću vrijednost, ali nema najmanju vrijednost. U ovom slučaju smo također naš zor opravdali egzaktnim računom čak na dva različita načina.



Zadatak 67.
Odredite ekstreme funkcije $f(x,y,z) = x+y+z$ uz uvjete $x^2+y^2 = 2,\ x+z = 1$.

Rješenje.
Tražimo ekstreme funkcije f uz dva uvjeta $g(x,y,z) = x^2+y^2-2$ i $h(x,y,z) = x+z-1$. Uočimo da u ovom zadatku zapravo tražimo ekstreme neprekidne funkcije f na kompaktnom skupu. Naime, $x^2+y^2 = 2$ je jednadžba kružnog cilindra, a $x+z = 1$ jednadžba ravnine u prostoru. Obje jednadžbe zajedno tada predstavljaju njihov presjek. Presjek kružnog cilindra i ravnine je općenito elipsa (ukoliko je presjek neprazan), a elipsa jest kompaktan skup u $\mathbb{R}^3$. Dakle, tražimo ekstreme funkcije f na elipsi koja je zadana kao presjek dvije plohe.



Najprije definiramo Lagrangeovu funkciju

$$L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = x+y+z+\lambda_1\big(x^2+y^2-2\big)+\lambda_2\big(x+z-1\big).$$

Parcijalne derivacije Lagrangeove funkcije jednake su

$$L_x = 1+2\lambda_1 x+\lambda_2, \quad L_y = 1+2\lambda_1 y, \quad L_z = 1+\lambda_2, \quad L_{\lambda_1} = x^2+y^2-2, \quad L_{\lambda_2} = x+z-1.$$

Izjednačavanjem parcijalnih derivacija s nulom dobivamo sustav

$$\begin{aligned} 1+2\lambda_1 x+\lambda_2 &= 0 \\ 1+2\lambda_1 y &= 0 \\ 1+\lambda_2 &= 0 \\ x^2+y^2-2 &= 0 \\ x+z-1 &= 0 \end{aligned}$$

Iz treće jednadžbe odmah dobivamo $\lambda_2 = -1$. Uvrstimo li $\lambda_2 = -1$ u prvu jednadžbu, dobivamo $2\lambda_1 x = 0$ iz čega slijedi $\lambda_1 = 0$ ili $x = 0$. Mogućnost $\lambda_1 = 0$ otpada jer bi u tom slučaju druga jednadžba vodila na kontradikciju $1 = 0$. Stoga mora biti $x = 0$. Uvrstimo li $x = 0$ u petu jednadžbu, dobivamo $z = 1$. Nadalje, ako uvrstimo $x = 0$ u četvrtu jednadžbu, dobivamo $y = \pm\sqrt{2}$. Konačno, ako uvrstimo $y = \pm\sqrt{2}$ u drugu jednadžbu, dobivamo $\lambda_1 = \mp\frac{1}{2\sqrt{2}}$. Dobili smo ukupno dvije stacionarne točke

$$\left(0, \sqrt{2}, 1, \frac{-1}{2\sqrt{2}}, -1\right), \quad \left(0, -\sqrt{2}, 1, \frac{1}{2\sqrt{2}}, -1\right).$$

Kako tražimo ekstreme funkcije f na kompaktnom skupu, tada funkcija f mora u točkama $\left(0, \sqrt{2}, 1\right)$ i $\left(0, -\sqrt{2}, 1\right)$ poprimati globalne ekstreme. Računanjem dobivamo

$$f\left(0, \sqrt{2}, 1\right) = \sqrt{2} + 1, \quad f\left(0, -\sqrt{2}, 1\right) = -\sqrt{2} + 1$$

pa zaključujemo da funkcija f u točki $\left(0, \sqrt{2}, 1\right)$ ima globalni uvjetni maksimum koji iznosi $\sqrt{2} + 1$, a u točki $\left(0, -\sqrt{2}, 1\right)$ ima globalni uvjetni minimum koji iznosi $-\sqrt{2} + 1$.

Zadatak 68.

Pozitivni broj a rastavite na tri pozitivna pribrojnika tako da njihov umnožak bude maksimalan.

Rješenje.

Tražimo zapravo ekstreme funkcije $f(x, y, z) = xyz$ uz uvjet $x + y + z = a$ i pritom uzimamo samo u obzir pozitivne vrijednosti varijabli x, y, z, tj. $x, y, z > 0$. Zadatak ćemo riješiti na dva načina.

1. način: Pomoću Lagrangeove funkcije

Definiramo Lagrangeovu funkciju

$$L(x, y, z, \lambda) = xyz + \lambda(x + y + z - a).$$

Njezine parcijalne derivacije su

$$L_x = yz + \lambda, \qquad L_y = xz + \lambda, \qquad L_z = xy + \lambda, \qquad L_\lambda = x + y + z - a.$$

Izjednačavanjem parcijalnih derivacija s nulom, dobivamo sustav

$$\begin{aligned} yz + \lambda &= 0 \\ xz + \lambda &= 0 \\ xy + \lambda &= 0 \\ x + y + z - a &= 0 \end{aligned}$$

Iz prve dvije jednadžbe dobivamo $yz = xz$ pa zbog $z \neq 0$ mora biti $x = y$. Slično, iz druge i treće jednadžbe slijedi $xz = xy$ pa zbog $x \neq 0$ mora biti $y = z$. Iz $x = y$ i $y = z$ slijedi $x = y = z$. Uvrstimo li $x = y = z$ u četvrtu jednadžbu, dobivamo $x = \frac{a}{3}$, $y = \frac{a}{3}$, $z = \frac{a}{3}$. Nakon toga, npr. iz prve jednadžbe, slijedi da mora biti $\lambda = -\frac{a^2}{9}$. Dakle, dobili smo samo jednu stacionarnu točku $\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}, \frac{a}{3}, -\frac{a^2}{9}\right)$. Stavimo li $g(x, y, z) = x + y + z - a$, slijedi

$$L_{xx} = 0, \quad L_{xy} = z, \quad L_{xz} = y, \quad L_{yy} = 0, \quad L_{yz} = x, \quad L_{zz} = 0, \quad g_x = 1, \quad g_y = 1, \quad g_z = 1.$$

Nakon toga formiramo determinante

$$\Delta_1(x,y,z,\lambda) = -\begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{xy} & L_{yy} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z \\ 1 & z & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2(x,y,z,\lambda) = -\begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y & g_z \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} & L_{xz} \\ g_y & L_{xy} & L_{yy} & L_{yz} \\ g_z & L_{xz} & L_{yz} & L_{zz} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z & y \\ 1 & z & 0 & x \\ 1 & y & x & 0 \end{vmatrix}$$

Odredimo vrijednosti tih determinanti u dobivenoj stacionarnoj točki pa zbog $a > 0$ vrijedi

$$\Delta_1\left(\tfrac{a}{3}, \tfrac{a}{3}, \tfrac{a}{3}, -\tfrac{a^2}{9}\right) = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{a}{3} \\ 1 & \frac{a}{3} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{2}{3}a < 0$$

$$\Delta_2\left(\tfrac{a}{3}, \tfrac{a}{3}, \tfrac{a}{3}, -\tfrac{a^2}{9}\right) = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{a}{3} & \frac{a}{3} \\ 1 & \frac{a}{3} & 0 & \frac{a}{3} \\ 1 & \frac{a}{3} & \frac{a}{3} & 0 \end{vmatrix} = \frac{a^2}{3} > 0$$

Zaključujemo da funkcija f u točki $\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)$ ima uvjetni maksimum. Drugim riječima, želimo li pozitivni broj a rastaviti na tri pozitivna pribrojnika tako da njihov produkt bude maksimalan, tada to možemo napraviti samo na jedan način $a = \frac{a}{3} + \frac{a}{3} + \frac{a}{3}$.

2. način: Uvrštavanje uvjeta u funkciju

Kako je uvjet $x+y+z = a$ jednostavan, moguće je iz njega, npr. varijablu z izraziti pomoću varijabli x i y pa dobivamo $z = a - x - y$. Uvrstimo li to u funkciju $f(x,y,z) = xyz$ čije uvjetne ekstreme tražimo, slijedi

$$f(x,y,a-x-y) = xy(a-x-y) = axy - x^2y - xy^2.$$

Dobili smo realnu funkciju dvije varijable $h(x,y) = axy - x^2y - xy^2$ i sada tražimo ekstreme funkcije h bez ikakvih uvjeta (jedino zbog prirode problema mora biti $x, y, z > 0$). Parcijalne derivacije funkcije h jednake su

$$h_x(x,y) = ay - 2xy - y^2$$
$$h_y(x,y) = ax - x^2 - 2xy$$

Izjednačavanjem parcijalnih derivacija s nulom dobivamo sustav

$$ay - 2xy - y^2 = 0 \tag{13}$$
$$ax - x^2 - 2xy = 0 \tag{14}$$

Oduzmemo li od jednadžbe (13) jednadžbu (14), slijedi

$$a(y-x) - \left(y^2 - x^2\right) = 0$$
$$a(y-x) - (y-x)(y+x) = 0$$
$$(y-x)(a-y-x) = 0$$

Kako je produkt dva realna broja jednak nula akko je barem jedan od tih brojeva jednak nula, razlikujemo dva slučaja:

- $y - x = 0$

  U ovom slučaju je $y = x$ pa ako to uvrstimo u jednadžbu (14), slijedi

$$\begin{aligned} ax - x^2 - 2x^2 &= 0 \\ ax - 3x^2 &= 0 \\ x(a - 3x) &= 0 \end{aligned}$$

  pa je $x = 0$ ili $x = \frac{a}{3}$. Mogućnost $x = 0$ otpada jer mora biti $x > 0$. Stoga preostaje jedino $x = \frac{a}{3}$. Kako je $y = x$, mora biti $y = \frac{a}{3}$.

- $a - y - x = 0$

  U ovom slučaju je $x + y = a$. Zbog uvjeta $x + y + z = a$, tada slijedi $z = 0$ pa taj slučaj otpada jer mora biti $z > 0$.

Dakle, dobili smo samo jednu stacionarnu točku $\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)$ funkcije h. Parcijalne derivacije drugog reda funkcije h jednake su

$$h_{xx}(x, y) = -2y, \quad h_{xy}(x, y) = a - 2x - 2y, \quad h_{yy}(x, y) = -2x$$

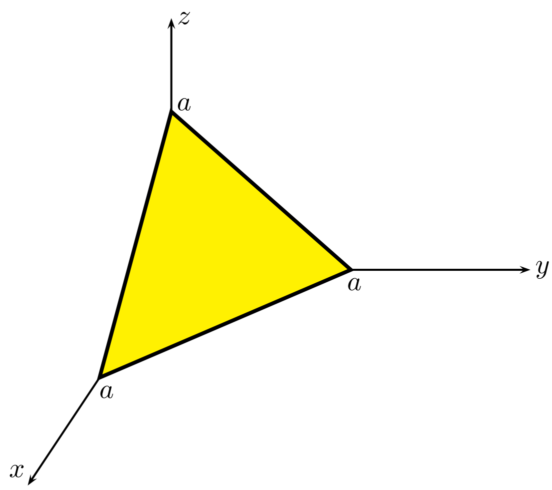
pa je Hesseova determinanta jednaka

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} h_{xx}(x, y) & h_{xy}(x, y) \\ h_{xy}(x, y) & h_{yy}(x, y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2y & a - 2x - 2y \\ a - 2x - 2y & -2x \end{vmatrix}.$$

Kako je $a > 0$, slijedi

$$H\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right) = \begin{vmatrix} -\frac{2}{3}a & -\frac{a}{3} \\ -\frac{a}{3} & -\frac{2}{3}a \end{vmatrix} = \frac{a^2}{3} > 0, \qquad h_{xx}\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right) = -\frac{2}{3}a < 0$$

pa funkcija h u točki $\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)$ poprima lokalni maksimum. Iz $x + y + z = a$ slijedi da je $z = \frac{a}{3}$ pa funkcija f u točki $\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)$ poprima uvjetni maksimum.

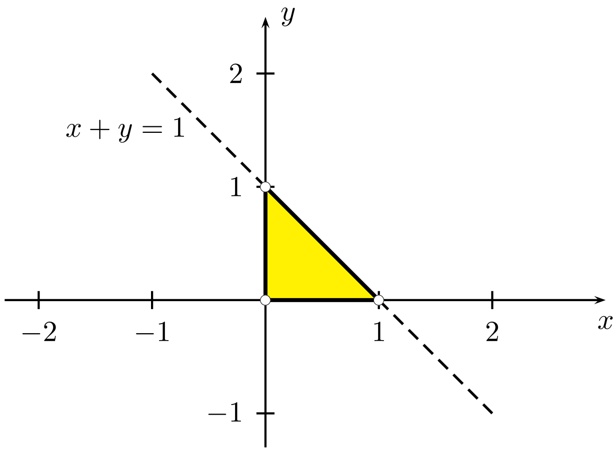


Napomena. Uočite da uvjet $x + y + z = a$ predstavlja ravninu, ali smo zbog dodatnih uvjeta $x, y, z > 0$ tražili ekstreme funkcije samo na onom dijelu te ravnine koji se nalazi unutar prvog oktanta. Zbog toga smo bili sigurni da je dobiveni lokalni maksimum ujedno i globalni maksimum.

Zadatak 69.
Odredite najveću i najmanju vrijednost funkcije $z = 1 + x + 2y$ na skupu

$$S = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x + y \leqslant 1\big\}.$$

Rješenje.
Uočimo da tražimo ekstreme funkcije z na kompaktnom skupu koji je prikazan na donjoj slici. Stoga moramo provjeriti interior skupa S i još posebno moramo ispitati točke na rubu skupa S.



Ovdje ćemo također zadatak riješiti na dva načina.

1. način: provjeravanje ruba pomoću Lagrangeove funkcije

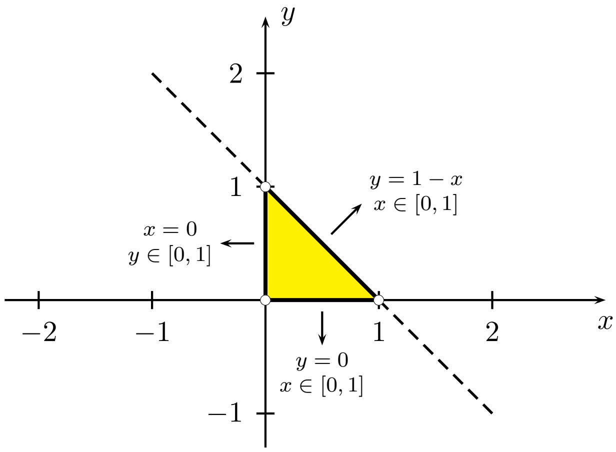
Najprije moramo provjeriti da li su možda neke točke u interioru skupa S kandidati za ekstreme. Parcijalne derivacije funkcije z jednake su $z_x = 1$, $z_y = 2$. Izjednačavanjem parcijalnih derivacija s nulom dobivamo sustav

$$\begin{aligned} 1 &= 0 \\ 2 &= 0 \end{aligned}$$

koji nema niti jedno rješenje. Zaključujemo da funkcija z nema ekstrema u interioru skupa S. Kako je S kompaktan skup, ekstremi se moraju postizati na rubu skupa S. Rub skupa S se sastoji od tri dužine pa svaku od tih dužina provjeravamo zasebno.

- $y = 0$, $x \in [0, 1]$

Tražimo ekstreme funkcije $z = 1 + x + 2y$ uz uvjet $y = 0$ i pritom imamo na umu da mora biti $x \in [0, 1]$. Definiramo Lagrangeovu funkciju $L(x, y, \lambda) = 1 + x + 2y + \lambda y$. Parcijalne derivacije Lagrangeove funkcije jednake su $L_x = 1$, $L_y = 2 + \lambda$, $L_\lambda = y$.



Izjednačavanjem parcijalnih derivacija s nulom dobivamo sustav

$$\begin{aligned} 1 &= 0 \\ 2 + \lambda &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

koji nema niti jedno rješenje. Zaključujemo da funkcija z nema ekstrema unutar promatrane dužine, ali kako je dužina kompaktan skup, funkcija z mora postizati ekstreme na toj dužini. Stoga funkcija z postiže ekstreme u rubnim točkama promatrane dužine. Rubne točke promatrane dužine su $(0, 0)$ i $(1, 0)$. Kako je $z(0, 0) = 1$ i $z(1, 0) = 2$, funkcija z na promatranoj dužini postiže minimum u točki $(0, 0)$, a maksimum u točki $(1, 0)$.

- $x = 0$, $y \in [0, 1]$

Tražimo ekstreme funkcije $z = 1+x+2y$ uz uvjet $x = 0$ i pritom imamo na umu da mora biti $y \in [0, 1]$. Definiramo Lagrangeovu funkciju $L(x, y, \lambda) = 1 + x + 2y + \lambda x$. Parcijalne derivacije Lagrangeove funkcije jednake su $L_x = 1 + \lambda,\ L_y = 2,\ L_\lambda = x$. Izjednačavanjem parcijalnih derivacija s nulom dobivamo sustav

$$\begin{aligned} 1 + \lambda &= 0 \\ 2 &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

koji nema niti jedno rješenje. Zaključujemo da funkcija z nema ekstrema unutar promatrane dužine, ali kako je dužina kompaktan skup, funkcija z mora postizati ekstreme na toj dužini. Stoga funkcija z postiže ekstreme u rubnim točkama promatrane dužine. Rubne točke promatrane dužine su $(0, 0)$ i $(0, 1)$. Kako je $z(0, 0) = 1$ i $z(0, 1) = 3$, funkcija z na promatranoj dužini postiže minimum u točki $(0, 0)$, a maksimum u točki $(0, 1)$.

- $y = 1 - x$, $x \in [0, 1]$

Tražimo ekstreme funkcije $z = 1 + x + 2y$ uz uvjet $x + y - 1 = 0$ i pritom imamo na umu da mora biti $x \in [0, 1]$. Definiramo Lagrangeovu funkciju $L(x, y, \lambda) = 1 + x + 2y + \lambda(x + y - 1)$. Parcijalne derivacije Lagrangeove funkcije jednake su $L_x = 1+\lambda,\ L_y = 2+\lambda,\ L_\lambda = x+y-1$. Izjednačavanjem parcijalnih derivacija s nulom dobivamo sustav

$$\begin{aligned} 1+\lambda &= 0 \\ 2+\lambda &= 0 \\ x+y-1 &= 0 \end{aligned}$$

koji nema niti jedno rješenje. Naime, oduzimanjem prvih dviju jednadžbi dobivamo $-1 = 0$, što je nemoguće. Zaključujemo da funkcija z nema ekstrema unutar promatrane dužine, ali kako je dužina kompaktan skup, funkcija z mora postizati ekstreme na toj dužini. Stoga funkcija z postiže ekstreme u rubnim točkama promatrane dužine. Rubne točke promatrane dužine su $(1,0)$ i $(0,1)$. Kako je $z(1,0) = 2$ i $z(0,1) = 3$, funkcija z na promatranoj dužini postiže minimum u točki $(1,0)$, a maksimum u točki $(0,1)$.

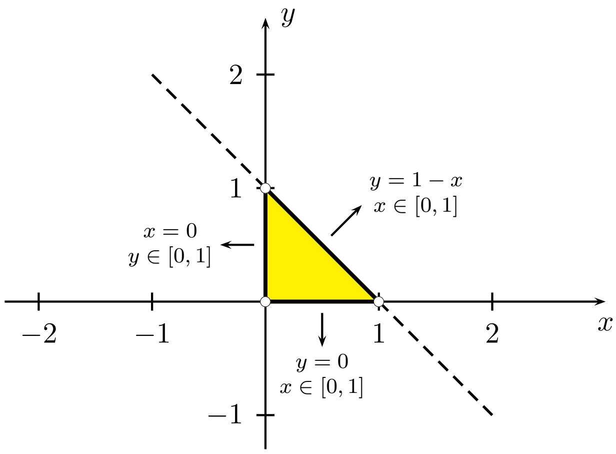
Dakle, ispitivanjem ruba skupa S dobili smo, ukupno gledajući, tri točke u kojima funkcija z na pojedinim dijelovima ruba postiže ekstreme. To su točke $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$. Kako je $z(0,0) = 1$, $z(1,0) = 2$, $z(0,1) = 3$, zaključujemo da funkcija z na rubu skupa S poprima globalni minimum u točki $(0,0)$ i globalni maksimum u točki $(0,1)$. Nadalje, u unutrašnjosti skupa S funkcija z nema ekstrema pa zaključujemo da funkcija z na skupu S postiže globalni minimum u točki $(0,0)$ koji je jednak $z(0,0) = 1$, a u točki $(0,1)$ postiže globalni maksimum koji je jednak $z(0,1) = 3$.

2. način: provjeravanje ruba bez Lagrangeove funkcije

Najprije moramo provjeriti da li su možda neke točke u interioru skupa S kandidati za ekstreme. Parcijalne derivacije funkcije z jednake su $z_x = 1$, $z_y = 2$. Izjednačavanjem parcijalnih derivacija s nulom dobivamo sustav

$$\begin{aligned} 1 &= 0 \\ 2 &= 0 \end{aligned}$$

koji nema niti jedno rješenje. Zaključujemo da funkcija z nema ekstrema u interioru skupa S. Kako je S kompaktan skup, ekstremi se moraju postizati na rubu skupa S. Rub skupa S se sastoji od tri dužine pa svaku od tih dužina provjeravamo zasebno.



- $y = 0$, $x \in [0, 1]$

Tražimo ekstreme funkcije $z = 1 + x + 2y$ uz uvjet $y = 0$ i pritom imamo na umu da mora biti $x \in [0, 1]$. Kako je uvjet jednostavan, možemo ga direktno uvrstiti u funkciju pa slijedi

$$z = 1 + x + 2y = 1 + x + 2 \cdot 0 = 1 + x.$$

Dobili smo funkciju $f(x) = 1+x$ jedne varijable x i sada tražimo njezine ekstreme na segmentu $[0, 1]$ po pravilima za traženje ekstrema funkcije jedne varijable. Međutim, kako je graf funkcije f pravac, jasno je da funkcija f postiže ekstreme u rubnim točkama segmenta $[0, 1]$. Iz $f(0) = 1$ i $f(1) = 2$ zaključujemo da funkcija f na segmentu $[0, 1]$ postiže minimum jednak 1 za $x = 0$ i maksimum jednak 2 za $x = 1$. Kako je $y = 0$, slijedi da funkcija z na ovom dijelu ruba postiže minimum jednak 1 u točki $(0, 0)$, a maksimum jednak 2 u točki $(1, 0)$.

- $x = 0$, $y \in [0, 1]$

Tražimo ekstreme funkcije $z = 1 + x + 2y$ uz uvjet $x = 0$ i pritom imamo na umu da mora biti $y \in [0, 1]$. Kako je uvjet jednostavan, možemo ga direktno uvrstiti u funkciju pa slijedi

$$z = 1 + x + 2y = 1 + 0 + 2y = 1 + 2y.$$

Dobili smo funkciju $g(y) = 1 + 2y$ jedne varijable y i sada tražimo njezine ekstreme na segmentu $[0, 1]$ po pravilima za traženje ekstrema funkcije jedne varijable. Međutim, kako je graf funkcije g pravac, jasno je da funkcija g postiže ekstreme u rubnim točkama segmenta $[0, 1]$. Iz $g(0) = 1$ i $g(1) = 3$ zaključujemo da funkcija g na segmentu $[0, 1]$ postiže minimum jednak 1 za $y = 0$ i maksimum jednak 3 za $y = 1$. Kako je $x = 0$, slijedi da funkcija z na ovom dijelu ruba postiže minimum jednak 1 u točki $(0, 0)$, a maksimum jednak 3 u točki $(0, 1)$.

- $y = 1 - x$, $x \in [0, 1]$

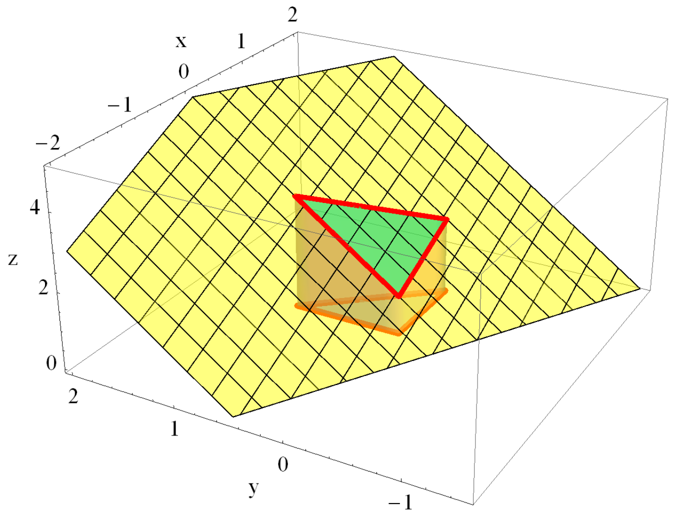
Tražimo ekstreme funkcije $z = 1 + x + 2y$ uz uvjet $y = 1 - x$ i pritom imamo na umu da mora biti $y \in [0, 1]$. Kako je uvjet jednostavan, možemo ga direktno uvrstiti u funkciju pa slijedi

$$z = 1 + x + 2y = 1 + x + 2(1 - x) = 3 - x.$$

Dobili smo funkciju $h(x) = 3-x$ jedne varijable x i sada tražimo njezine ekstreme na segmentu $[0, 1]$ po pravilima za traženje ekstrema funkcije jedne varijable. Međutim, kako je graf funkcije h pravac, jasno je da funkcija h postiže ekstreme u rubnim točkama segmenta $[0, 1]$. Iz $h(0) = 3$ i $h(1) = 2$ zaključujemo da funkcija h na segmentu $[0, 1]$ postiže minimum jednak 2 za $x = 1$ i maksimum jednak 3 za $x = 0$. Kako je $y = 1 - x$, slijedi da funkcija z na ovom dijelu ruba postiže minimum jednak 2 u točki $(1, 0)$, a maksimum jednak 3 u točki $(0, 1)$.

Dakle, ispitivanjem ruba skupa S dobili smo, ukupno gledajući, tri točke u kojima funkcija z na pojedinim dijelovima ruba postiže ekstreme. To su točke $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$. Kako je $z(0, 0) = 1$, $z(1, 0) = 2$, $z(0, 1) = 3$, zaključujemo da funkcija z na rubu skupa S poprima globalni minimum u točki $(0, 0)$ i globalni maksimum u točki $(0, 1)$. Nadalje, u unutrašnjosti skupa S funkcija z nema ekstrema pa zaključujemo da funkcija z na skupu S postiže globalni minimum u točki $(0, 0)$ koji je jednak $z(0, 0) = 1$, a u točki $(0, 1)$ postiže globalni maksimum koji je jednak $z(0, 1) = 3$.

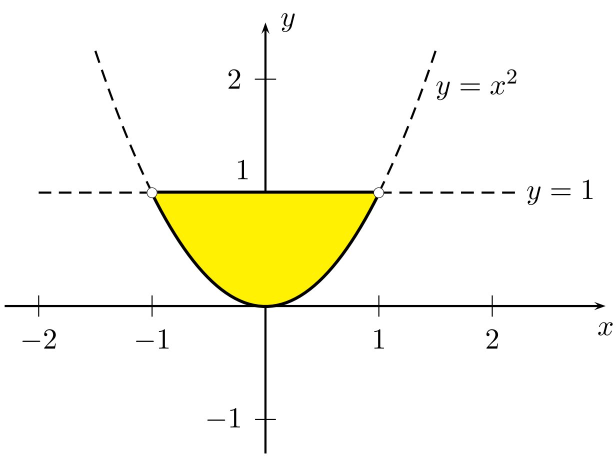
Napomena. Uočite da je graf funkcije $z = 1 + x + 2y$ zapravo ravnina koja nema ekstrema na svojoj prirodnoj domeni. Međutim, na skupu S funkcija z ima ekstreme i sa donje slike je jasno da se ti ekstremi moraju postizati u nekim od vrhova trokuta. Nadalje, u ovom zadatku smo tražili ekstreme linearne funkcije na skupu zadanom s linearnim uvjetima. To je tzv. problem linearnog programiranja, a iz teorije je poznato da se u tom slučaju ekstremi postižu u nekim od vršnih točaka zadanog skupa kako smo i mi dobili. Dakle, u ovom bi slučaju bilo dovoljno provjeriti samo vršne točke skupa S, no kako se mi ovdje ne bavimo linearnim programiranjem nismo htjeli koristiti taj teorem u ovom zadatku.



Zadatak 70.
Odredite ekstreme funkcije $F(x,y) = x^2 + y^2 - y$ na skupu

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leqslant x \leqslant 1,\ x^2 \leqslant y \leqslant 1\}.$$

Rješenje.
Tražimo ekstreme funkcije F na kompaktnom skupu koji je prikazan na donjoj slici. Stoga moramo provjeriti interior skupa D i još posebno moramo ispitati točke na rubu skupa D.



Ovdje ćemo također zadatak riješiti na dva načina.

1. način: provjeravanje ruba pomoću Lagrangeove funkcije

Najprije moramo provjeriti da li su možda neke točke u interioru skupa D kandidati za ekstreme. Parcijalne derivacije funkcije F jednake su $F_x = 2x$, $F_y = 2y - 1$. Izjednačavanjem parcijalnih derivacija s nulom dobivamo sustav

$$\begin{aligned} 2x &= 0 \\ 2y - 1 &= 0 \end{aligned}$$

koji ima jedno rješenje $x = 0$, $y = \frac{1}{2}$. Dakle, funkcija F ima jednu stacionarnu točku $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Kako ta stacionarna točka pripada skupu D, ispitujemo dalje njezin karakter pomoću Hesseove determinante. Parcijalne derivacije drugog reda funkcije F jednake su $F_{xx} = 2$, $F_{xy} = 0$, $F_{yy} = 2$ pa je

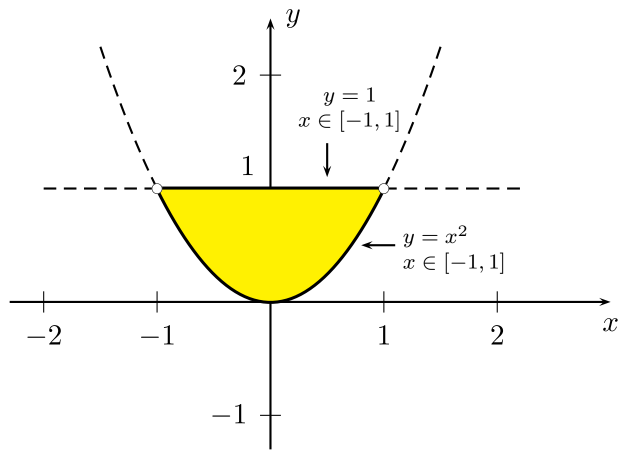
$$H(x,y) = \begin{vmatrix} F_{xx}(x,y) & F_{xy}(x,y) \\ F_{xy}(x,y) & F_{yy}(x,y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

Kako je

$$H\left(0, \tfrac{1}{2}\right) = \begin{vmatrix} \boxed{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0, \quad F_{xx}\left(0, \tfrac{1}{2}\right) = 2 > 0$$

zaključujemo da funkcija F u točki $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ ima lokalni minimum koji je jednak $F\left(0, \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$.

Sada nam još preostaje da provjerimo točke na rubu skupa D. Rub skupa D se sastoji od dužine i jednog dijela parabole pa provodimo zasebna razmatranja na svakom od tih dijelova.



- $y = 1$, $x \in [-1, 1]$

Tražimo ekstreme funkcije $F(x,y) = x^2 + y^2 - y$ uz uvjet $y - 1 = 0$ i pritom imamo na umu da mora biti $x \in [-1, 1]$. Definiramo Lagrangeovu funkciju $L(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 - y + \lambda(y - 1)$. Parcijalne derivacije Lagrangeove funkcije jednake su $L_x = 2x$, $L_y = 2y - 1 + \lambda$, $L_\lambda = y - 1$. Izjednačavanjem parcijalnih derivacija s nulom dobivamo sustav

$$\begin{aligned} 2x &= 0 \\ 2y - 1 + \lambda &= 0 \\ y - 1 &= 0 \end{aligned}$$

koji ima jedno rješenje $x = 0$, $y = 1$, $\lambda = -1$. Stoga je točka $(0, 1)$ kandidat za uvjetni ekstrem funkcije F. Kako je dužina kompaktan skup, funkcija F sigurno postiže ekstreme na promatranoj dužini, jedino još moramo uzeti u obzir i njezine rubne točke $(-1, 1)$ i $(1, 1)$. Dakle, točke $(0, 1)$, $(-1, 1)$ i $(1, 1)$ su kandidati za ekstreme funkcije F na promatranoj dužini. Kako je $F(0, 1) = 0$, $F(-1, 1) = 1$, $F(1, 1) = 1$, zaključujemo da funkcija F na ovom dijelu ruba postiže globalni minimum u točki $(0, 1)$, a globalni maksimum u točkama $(-1, 1)$ i $(1, 1)$.

- $y = x^2$, $x \in [-1, 1]$

Tražimo ekstreme funkcije $F(x, y) = x^2 + y^2 - y$ uz uvjet $y - x^2 = 0$ i pritom imamo na umu da mora biti $x \in [-1, 1]$. Definiramo Lagrangeovu funkciju $L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - y + \lambda\big(y - x^2\big)$. Parcijalne derivacije Lagrangeove funkcije jednake su $L_x = 2x - 2\lambda x$, $L_y = 2y - 1 + \lambda$, $L_\lambda = y - x^2$. Izjednačavanjem parcijalnih derivacija s nulom dobivamo sustav

$$\begin{aligned} 2x - 2\lambda x &= 0 \\ 2y - 1 + \lambda &= 0 \\ y - x^2 &= 0 \end{aligned}$$

koji ima samo jedno rješenje $x = 0$, $y = 0$, $\lambda = 1$. Dakle, točka $(0, 0)$ je kandidat za ekstrem. Međutim, u obzir moramo uzeti i krajnje točke $(-1, 1)$ i $(1, 1)$ na ovom dijelu ruba. Kako je $F(0, 0) = 0$, $F(-1, 1) = 1$, $F(1, 1) = 1$, zaključujemo da funkcija F na ovom dijelu ruba postiže globalni minimum u točki $(0, 0)$, a globalni maksimum u točkama $(-1, 1)$ i $(1, 1)$.

Konačno, uzmemo u obzir sve točke u kojima smo dobili da funkcija F postiže ekstreme. To su točke

$$\big(0, \tfrac{1}{2}\big),\ (0, 0),\ (0, 1),\ (-1, 1),\ (1, 1).$$

Vrijednosti funkcije F u tim točkama su

$$F\big(0, \tfrac{1}{2}\big) = -\tfrac{1}{4},\ F(0, 0) = 0,\ F(0, 1) = 0,\ F(-1, 1) = 1,\ F(1, 1) = 1$$

pa zaključujemo da funkcija F na skupu D postiže globalni minimum jednak $-\frac{1}{4}$ u točki $\big(0, \frac{1}{2}\big)$, a globalni maksimum jednak 1 postiže u točkama $(-1, 1)$ i $(1, 1)$.

2. način: provjeravanje ruba bez Lagrangeove funkcije

Najprije moramo provjeriti da li su možda neke točke u interioru skupa D kandidati za ekstreme. Parcijalne derivacije funkcije F jednake su $F_x = 2x$, $F_y = 2y - 1$. Izjednačavanjem parcijalnih derivacija s nulom dobivamo sustav

$$\begin{aligned} 2x &= 0 \\ 2y - 1 &= 0 \end{aligned}$$

koji ima jedno rješenje $x = 0$, $y = \frac{1}{2}$. Dakle, funkcija F ima jednu stacionarnu točku $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Kako ta stacionarna točka pripada skupu D, ispitujemo dalje njezin karakter pomoću Hesseove determinante. Parcijalne derivacije drugog reda funkcije F jednake su $F_{xx} = 2,\ F_{xy} = 0,\ F_{yy} = 2$ pa je

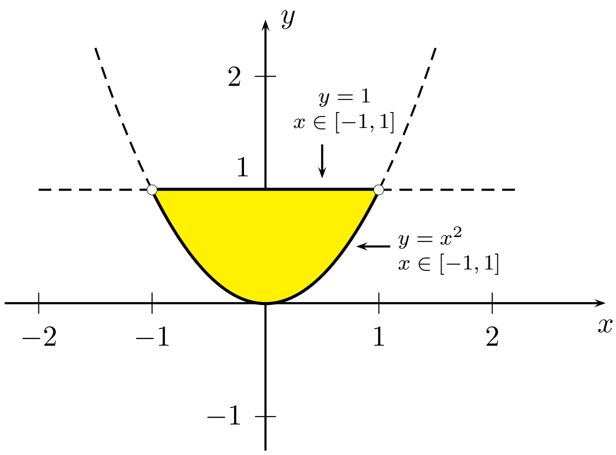
$$H(x, y) = \begin{vmatrix} F_{xx}(x, y) & F_{xy}(x, y) \\ F_{xy}(x, y) & F_{yy}(x, y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

Kako je

$$H\left(0, \tfrac{1}{2}\right) = \begin{vmatrix} \boxed{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0, \quad F_{xx}\left(0, \tfrac{1}{2}\right) = 2 > 0$$

zaključujemo da funkcija F u točki $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ ima lokalni minimum koji je jednak $F\left(0, \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$.

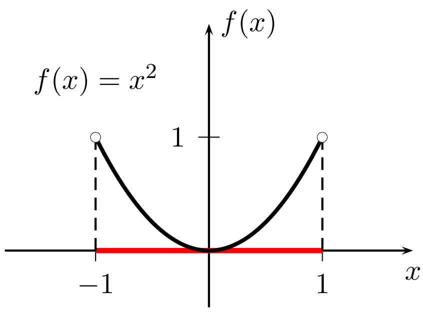
Sada nam još preostaje da provjerimo točke na rubu skupa D. Rub skupa D se sastoji od dužine i jednog dijela parabole pa provodimo zasebna razmatranja na svakom od tih dijelova.



- $y = 1$, $x \in [-1, 1]$

Tražimo ekstreme funkcije $F(x, y) = x^2 + y^2 - y$ uz uvjet $y = 1$ i pritom imamo na umu da mora biti $x \in [-1, 1]$. Kako je uvjet jednostavan, možemo ga direktno uvrstiti u funkciju pa slijedi

$$F(x, 1) = x^2 + 1^2 - 1 = x^2.$$



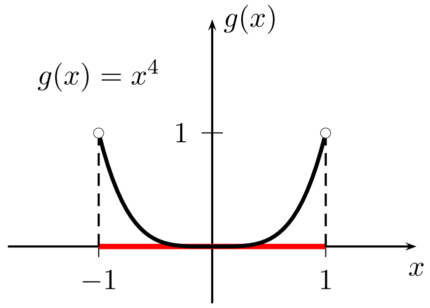
Dobili smo funkciju $f(x) = x^2$ jedne varijable x i sada tražimo njezine ekstreme na segmentu $[-1, 1]$ po pravilima za traženje ekstrema funkcije jedne varijable. Međutim, parabola nam je dobro poznata funkcija pa odmah zaključujemo da funkcija f na segmentu $[-1, 1]$ postiže globalni minimum jednak 0 u točki $x = 0$, a globalni maksimum jednak 1 postiže u točkama $x = -1$ i $x = 1$. Kako je $y = 1$, slijedi da funkcija F na ovom dijelu ruba postiže globalni minimum jednak 0 u točki $(0, 1)$, a globalni maksimum jednak 1 postiže u točkama $(-1, 1)$ i $(1, 1)$.

- $y = x^2$, $x \in [-1, 1]$

Tražimo ekstreme funkcije $F(x, y) = x^2 + y^2 - y$ uz uvjet $y = x^2$ i pritom imamo na umu da mora biti $x \in [-1, 1]$. Kako je uvjet jednostavan, možemo ga direktno uvrstiti u funkciju pa slijedi

$$F\big(x, x^2\big) = x^2 + \big(x^2\big)^2 - x^2 = x^4.$$

Dobili smo funkciju $g(x) = x^4$ jedne varijable x i sada tražimo njezine ekstreme na segmentu $[-1, 1]$ po pravilima za traženje ekstrema funkcije jedne varijable. Međutim, ova funkcija je također toliko jednostavna da odmah možemo zaključiti da na segmentu $[-1, 1]$ ona postiže globalni minimum jednak 0 u točki $x = 0$, a globalni maksimum jednak 1 postiže u točkama $x = -1$ i $x = 1$.



Kako je $y = x^2$, slijedi da funkcija F na ovom dijelu ruba postiže globalni minimum jednak 0 u točki $(0, 0)$, a globalni maksimum jednak 1 postiže u točkama $(-1, 1)$ i $(1, 1)$.

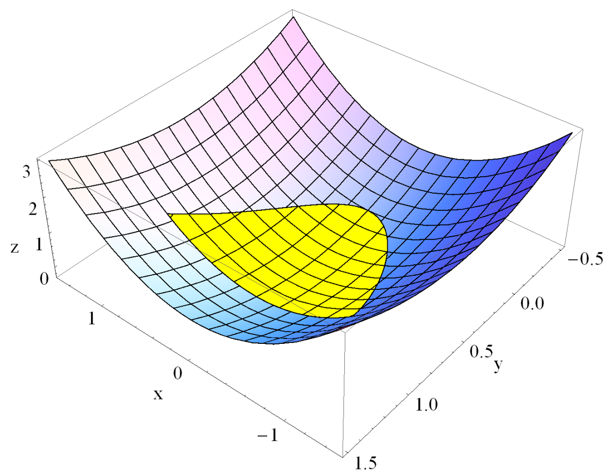
Konačno, uzmemo u obzir sve točke u kojima smo dobili da funkcija F postiže ekstreme. To su točke

$$\big(0, \tfrac{1}{2}\big),\ (0, 0),\ (0, 1),\ (-1, 1),\ (1, 1).$$

Vrijednosti funkcije F u tim točkama su

$$F\big(0, \tfrac{1}{2}\big) = -\tfrac{1}{4},\ F(0, 0) = 0,\ F(0, 1) = 0,\ F(-1, 1) = 1,\ F(1, 1) = 1$$

pa zaključujemo da funkcija F na skupu D postiže globalni minimum jednak $-\frac{1}{4}$ u točki $\big(0, \frac{1}{2}\big)$, a globalni maksimum jednak 1 postiže u točkama $(-1, 1)$ i $(1, 1)$.



Zadatak 71.
Na plohi $x^2 + y^2 - z^2 = 18$ odredite točku koja je najbliža točki $(1, 0, 0)$. Da li na zadanoj plohi postoji točka koja je najdalje od točke $(1, 0, 0)$? Objasnite svoj odgovor.

Rješenje.
Udaljenost bilo koje točke (x, y, z) od točke $(1, 0, 0)$ se računa po formuli

$$d = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2}.$$

Pitamo se kada će udaljenost d biti minimalna, odnosno maksimalna. Dakle, tražimo ekstreme funkcije $f(x, y, z) = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2}$. Međutim, nas ne zanimaju sve točke (x, y, z) u prostoru, nego nas zanimaju samo one točke koje leže na plohi $x^2+y^2-z^2 = 18$. Stoga konačno zaključujemo da zapravo tražimo ekstreme funkcije $f(x, y, z) = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2}$ uz uvjet $x^2+y^2-z^2 = 18$. Kako je drugi korijen minimalan (maksimalan) ako i samo ako je izraz pod drugim korijenom minimalan (maksimalan), radi lakšeg deriviranja možemo umjesto funkcije $f(x, y, z) = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2}$ tražiti ekstreme funkcije $g(x, y, z) = (x-1)^2 + y^2 + z^2$ uz uvjet $x^2 + y^2 - z^2 = 18$.

Dakle, tražimo ekstreme funkcije $g(x, y, z) = (x-1)^2 + y^2 + z^2$ uz uvjet $x^2 + y^2 - z^2 - 18 = 0$. Definiramo Lagrangeovu funkciju

$$L(x, y, z, \lambda) = (x-1)^2 + y^2 + z^2 + \lambda\left(x^2 + y^2 - z^2 - 18\right).$$

Parcijalne derivacije Lagrangeove funkcije jednake su

$$L_x = 2(x-1) + 2\lambda x, \quad L_y = 2y + 2\lambda y, \quad L_z = 2z - 2\lambda z, \quad L_\lambda = x^2 + y^2 - z^2 - 18.$$

Izjednačavanjem parcijalnih derivacija s nulom dobivamo sustav

$$\begin{aligned} 2(x-1) + 2\lambda x &= 0 \\ 2y + 2\lambda y &= 0 \\ 2z - 2\lambda z &= 0 \\ x^2 + y^2 - z^2 - 18 &= 0 \end{aligned}$$

kojeg možemo zapisati u obliku

$$\begin{aligned} (1+\lambda)x &= 1 \\ (1+\lambda)y &= 0 \\ (1-\lambda)z &= 0 \\ x^2 + y^2 - z^2 - 18 &= 0 \end{aligned}$$

Iz druge jednadžbe dobivamo dvije mogućnosti, $\lambda = -1$ ili $y = 0$. Ako $\lambda = -1$ uvrstimo u prvu jednadžbu, dobivamo $0 = 1$, što je nemoguće. Stoga mogućnost $\lambda = -1$ otpada pa mora biti $y = 0$.

Iz treće jednadžbe također dobivamo dvije mogućnosti, $\lambda = 1$ ili $z = 0$. Ako $\lambda = 1$ uvrstimo u prvu jednadžbu, dobivamo $x = \frac{1}{2}$. Ako $x = \frac{1}{2}$ i $y = 0$ (to već znamo od prije) uvrstimo u četvrtu jednadžbu, dobivamo $z^2 = -\frac{71}{4}$. Međutim, jednadžba $z^2 = -\frac{71}{4}$ nema realnih rješenja pa mogućnost

$\lambda = 1$ otpada. Stoga mora biti $z = 0$.

Dakle, do sada smo dobili da mora biti $y = 0$, $z = 0$. Ako $y = 0$ i $z = 0$ uvrstimo u četvrtu jednadžbu, dobivamo $x^2 = 18$ iz čega slijedi $x_1 = \sqrt{18}$, $x_2 = -\sqrt{18}$. Tada iz prve jednadžbe dobivamo $\lambda_1 = \frac{\sqrt{2}-6}{6}$, $\lambda_2 = \frac{-\sqrt{2}-6}{6}$.

Dobili smo ukupno dvije stacionarne točke

$$\left(\sqrt{18}, 0, 0, \tfrac{\sqrt{2}-6}{6}\right), \quad \left(-\sqrt{18}, 0, 0, \tfrac{-\sqrt{2}-6}{6}\right).$$

Ako stavimo $h(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 - 18$, tada je

$$L_{xx} = 2 + 2\lambda, \quad L_{xy} = 0, \quad L_{xz} = 0, \quad L_{yy} = 2 + 2\lambda, \quad L_{yz} = 0, \quad L_{zz} = 2 - 2\lambda,$$
$$h_x = 2x, \quad h_y = 2y, \quad h_z = -2z.$$

Nakon toga formiramo determinante

$$\Delta_1(x, y, z, \lambda) = -\begin{vmatrix} 0 & h_x & h_y \\ h_x & L_{xx} & L_{xy} \\ h_y & L_{xy} & L_{yy} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2+2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & 2+2\lambda \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2(x, y, z, \lambda) = -\begin{vmatrix} 0 & h_x & h_y & h_z \\ h_x & L_{xx} & L_{xy} & L_{xz} \\ h_y & L_{xy} & L_{yy} & L_{yz} \\ h_z & L_{xz} & L_{yz} & L_{zz} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y & -2z \\ 2x & 2+2\lambda & 0 & 0 \\ 2y & 0 & 2+2\lambda & 0 \\ -2z & 0 & 0 & 2-2\lambda \end{vmatrix}$$

Sada izračunamo vrijednosti tih determinanti u stacionarnim točkama. Kako je

$$\Delta_1\left(\sqrt{18}, 0, 0, \tfrac{\sqrt{2}-6}{6}\right) = -\begin{vmatrix} 0 & 6\sqrt{2} & 0 \\ 6\sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{3} \end{vmatrix} = 24\sqrt{2} > 0$$

$$\Delta_2\left(\sqrt{18}, 0, 0, \tfrac{\sqrt{2}-6}{6}\right) = -\begin{vmatrix} 0 & 6\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 6\sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4-\frac{\sqrt{2}}{3} \end{vmatrix} = 96\sqrt{2} - 16 > 0$$

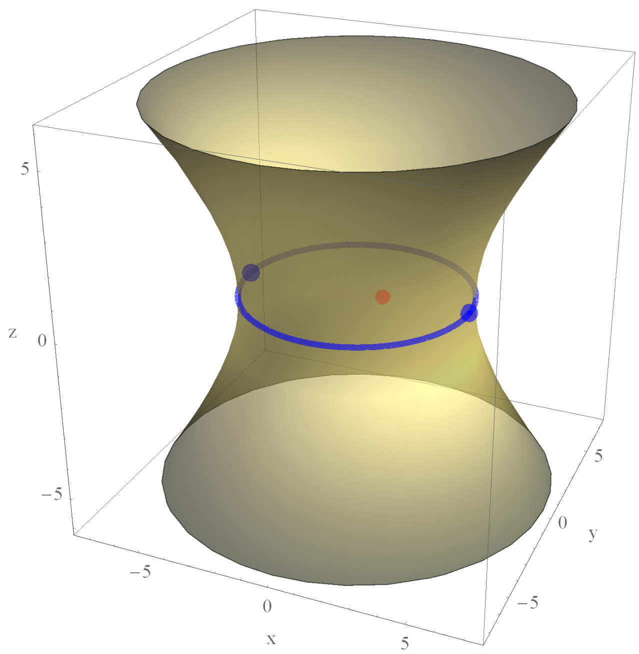
zaključujemo da funkcija g u točki $\left(\sqrt{18}, 0, 0\right)$ postiže uvjetni minimum. Nadalje, zbog

$$\Delta_1\left(-\sqrt{18}, 0, 0, \tfrac{-\sqrt{2}-6}{6}\right) = -\begin{vmatrix} 0 & -6\sqrt{2} & 0 \\ -6\sqrt{2} & -\frac{\sqrt{2}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{3} \end{vmatrix} = -24\sqrt{2} < 0$$

$$\Delta_2\left(-\sqrt{18}, 0, 0, \tfrac{-\sqrt{2}-6}{6}\right) = -\begin{vmatrix} 0 & -6\sqrt{2} & 0 & 0 \\ -6\sqrt{2} & -\frac{\sqrt{2}}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4+\frac{\sqrt{2}}{3} \end{vmatrix} = -96\sqrt{2} - 16 < 0$$

funkcija g u točki $\left(-\sqrt{18},0,0\right)$ ne postiže uvjetne ekstreme. Konačno zaključujemo da funkcija f postiže uvjetni minimum u točki $\left(\sqrt{18},0,0\right)$ i taj minimum je jednak $f\left(\sqrt{18},0,0\right)=\sqrt{18}-1$. Dakle, točka $\left(\sqrt{18},0,0\right)$ je točka na plohi $x^2+y^2-z^2=18$ koja je najbliža točki $(1,0,0)$.

Na donjoj slici su prikazane dvije plave točke na plohi $x^2+y^2-z^2=18$ koje su gornjim računom dobivene kao kandidati za najbliže i najudaljenije točke od točke $(1,0,0)$. Iz same slike vidimo da jedna od tih točaka otpada, što smo dobili i egzaktnim matematičkim postupkom. Također je sa slike jasno da na zadanoj plohi ne postoji točka koja bi bila najudaljenija od točke $(1,0,0)$ jer je zadana ploha neomeđen skup u $\mathbb{R}^3$.



Zadatak 72.
Odredite ekstreme funkcije $f(x,y)=x^2+y^2$ na hiperboli $xy=1$.

Rješenje.
Tražimo ekstreme funkcije $f(x,y)=x^2+y^2$ uz uvjet $g(x,y)=xy-1$. Definiramo Lagrangeovu funkciju $L(x,y,\lambda)=x^2+y^2+\lambda(xy-1)$. Njezine parcijalne derivacije jednake su

$$L_x=2x+\lambda y,\quad L_y=2y+\lambda x,\quad L_\lambda=xy-1.$$

Izjednačavanjem parcijalnih derivacija s nulom dobivamo sustav

$$2x+\lambda y=0 \tag{15}$$
$$2y+\lambda x=0 \tag{16}$$
$$xy-1=0 \tag{17}$$

Uočimo najprije da zbog jednadžbe (17) mora biti $x\neq 0$ i $y\neq 0$. Iz (15) i (16) dobivamo

$$\lambda=\frac{-2x}{y},\quad \lambda=\frac{-2y}{x}$$

pa slijedi

$$\begin{aligned} \frac{-2x}{y} &= \frac{-2y}{x} \\ x^2 &= y^2 \\ y &= \pm x \end{aligned}$$

Ako $y = -x$ uvrstimo u (17), dobivamo $x^2 = -1$. Međutim, jednadžba $x^2 = -1$ nema realnih rješenja pa slučaj $y = -x$ otpada.

Ako $y = x$ uvrstimo u (17), dobivamo $x^2 = 1$ pa je $x_1 = 1$ i $x_2 = -1$. Zbog $y = x$ je $y_1 = 1$ i $y_2 = -1$.

Konačno, ako $x_1 = 1$ i $y_1 = 1$ uvrstimo u (15), dobivamo $\lambda_1 = -2$. Isto tako, ako $x_2 = -1$ i $y_2 = -1$ uvrstimo u (15), dobivamo $\lambda_2 = -2$.

Dobili smo ukupno dvije stacionarne točke

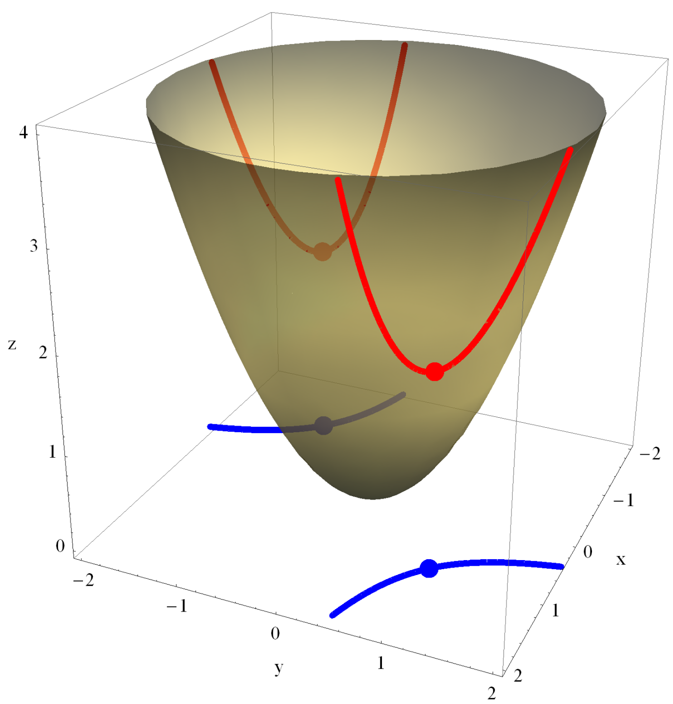
$$\big(\overset{x_1}{1}\,,\ \overset{y_1}{1}\,,\overset{\lambda_1}{-2}\big), \qquad \big(\overset{x_2}{-1},\overset{y_2}{-1},\overset{\lambda_2}{-2}\big).$$

Uočite da obje točke zaista zadovoljavaju sve tri jednadžbe (15), (16) i (17). Sada trebamo ispitati karakter dobivenih stacionarnih točaka. Kako je

$$L_{xx} = 2, \quad L_{xy} = \lambda, \quad L_{yy} = 2, \quad g_x = y, \quad g_y = x,$$

slijedi da je

$$\Delta(x, y, \lambda) = -\begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{xy} & L_{yy} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & y & x \\ y & 2 & \lambda \\ x & \lambda & 2 \end{vmatrix}.$$



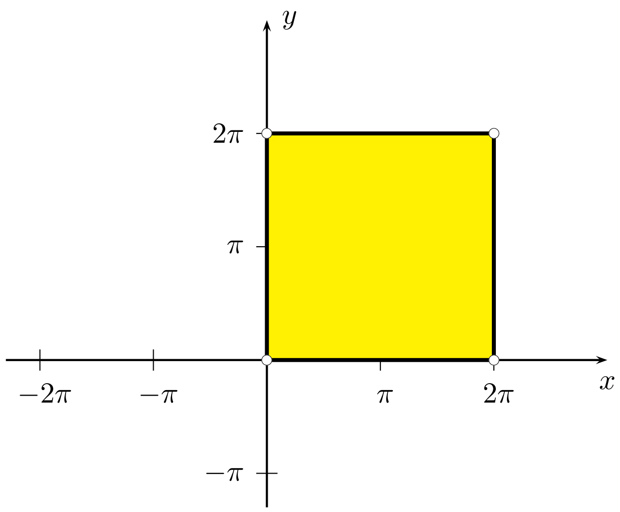
Kako je

$$\Delta(1,1,-2) = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 8 > 0, \qquad \Delta(-1,-1,-2) = -\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 8 > 0$$

zaključujemo da funkcija f u obje točke $(1,1)$ i $(-1,-1)$ postiže minimume na hiperboli $xy = 1$. U obje točke minimumi su jednaki 2.

Zadatak 73.
Odredite globalne ekstreme funkcije $f(x,y) = \sin x + \sin y + \sin(x+y)$ na skupu $S = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$.

Rješenje.
Tražimo ekstreme funkcije f na kompaktnom skupu koji je prikazan na donjoj slici. Stoga moramo provjeriti interior skupa S i još posebno moramo ispitati točke na rubu skupa S.



U ovom zadatku nećemo rub skupa S provjeravati na dva različita načina. Ovdje ćemo rub skupa S provjeriti bez korištenja Lagrangeove funkcije, tj. direktnim uvrštavanjem uvjeta u funkciju f. Za vježbu možete sami provesti ispitivanje ruba skupa S pomoću Lagrangeove funkcije.

Krenimo redom. Najprije moramo provjeriti da li su možda neke točke u interioru skupa S kandidati za ekstreme. Parcijalne derivacije funkcije f jednake su

$$f_x = \cos x + \cos(x+y), \quad f_y = \cos y + \cos(x+y).$$

Izjednačavanjem parcijalnih derivacija s nulom dobivamo sustav

$$\cos x + \cos(x+y) = 0 \tag{18}$$
$$\cos y + \cos(x+y) = 0 \tag{19}$$

Ako od jednadžbe (18) oduzmemo jednadžbu (19), dobivamo

$$\cos x - \cos y = 0$$
$$-2\sin\frac{x-y}{2}\sin\frac{x+y}{2} = 0$$

Kako je produkt realnih brojeva jednak 0 ako i samo ako je barem jedan od brojeva jednak nula, razlikujemo dva slučaja.

- $\sin\dfrac{x-y}{2}=0$

U ovom slučaju slijedi da mora biti $\frac{x-y}{2}=k\pi$, tj. $x=y+2k\pi$ pri čemu je $k\in\mathbb{Z}$. Ako $x=y+2k\pi$ uvrstimo u (19), dobivamo

$$\begin{aligned}\cos y+\cos\big(2y+2k\pi\big)&=0\\ \cos y+\cos 2y&=0\\ 2\cos\frac{y}{2}\cos\frac{3y}{2}&=0\end{aligned}$$

pa razlikujemo dva podslučaja:

- $\cos\dfrac{y}{2}=0$

  U ovom podslučaju mora biti $\frac{y}{2}=\frac{2l+1}{2}\pi$, tj. $y=(2l+1)\pi$ pri čemu je $l\in\mathbb{Z}$. Međutim, nas zanimaju samo točke koje pripadaju skupu S pa mora biti $y\in[0,2\pi]$. To je moguće jedino za $l=0$ pa je $y=\pi$. Iz $x=y+2k\pi$ slijedi $x=\pi+2k\pi$. Kako nas zanimaju samo točke koje pripadaju skupu S, mora biti $x\in[0,2\pi]$. To je moguće jedino za $k=0$ pa je $x=\pi$. Dakle, u ovom podslučaju smo dobili jednu stacionarnu točku (π,π).

- $\cos\dfrac{3y}{2}=0$

  U ovom podslučaju mora biti $\frac{3y}{2}=\frac{2l+1}{2}\pi$, tj. $y=\frac{2l+1}{3}\pi$ pri čemu je $l\in\mathbb{Z}$. Međutim, nas zanimaju samo točke koje pripadaju skupu S pa mora biti $y\in[0,2\pi]$. To je moguće jedino za $l=0$, $l=1$ i $l=2$ pa je $y_1=\frac{\pi}{3}$, $y_2=\pi$, $y_3=\frac{5}{3}\pi$. Iz $x=y+2k\pi$ slijedi $x_1=\frac{\pi}{3}+2k\pi$, $x_2=\pi+2k\pi$, $x_3=\frac{5}{3}\pi+2k\pi$. Kako nas zanimaju samo točke koje pripadaju skupu S, mora biti $x\in[0,2\pi]$. To je moguće jedino za $k=0$ pa je $x_1=\frac{\pi}{3}$, $x_2=\pi$, $x_3=\frac{5}{3}\pi$. Dakle, u ovom podslučaju smo dobili tri stacionarne točke $\big(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\big)$, (π,π), $\big(\frac{5}{3}\pi,\frac{5}{3}\pi\big)$.

- $\sin\dfrac{x+y}{2}=0$

U ovom slučaju slijedi da mora biti $\frac{x+y}{2}=k\pi$, tj. $x=-y+2k\pi$ pri čemu je $k\in\mathbb{Z}$. Ako $x=-y+2k\pi$ uvrstimo u (19), dobivamo

$$\begin{aligned}\cos y+\cos\big(-y+2k\pi+y\big)&=0\\ \cos y+\cos 2k\pi&=0\\ \cos y&=-1\end{aligned}$$

pa je $y=(2l+1)\pi$, $l\in\mathbb{Z}$. Međutim, nas zanimaju samo točke koje pripadaju skupu S pa mora biti $y\in[0,2\pi]$. To je moguće jedino za $l=0$ pa je $y=\pi$. Iz $x=-y+2k\pi$ slijedi $x=-\pi+2k\pi$. Kako nas zanimaju samo točke koje pripadaju skupu S, mora biti $x\in[0,2\pi]$. To je moguće jedino za $k=1$ pa je $x=\pi$. Dakle, u ovom slučaju smo dobili jednu stacionarnu točku (π,π).

Sve zajedno, dobili smo ukupno tri stacionarne točke $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$, (π, π), $\left(\frac{5}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi\right)$ funkcije f koje pripadaju skupu S. Karakter dobivenih stacionarnih točaka ispitujemo pomoću Hesseove determinante. Parcijalne derivacije drugog reda funkcije f jednake su

$$f_{xx} = -\sin x - \sin(x+y), \quad f_{xy} = -\sin(x+y), \quad f_{yy} = -\sin y - \sin(x+y).$$

Stoga je Hesseova determinanta jednaka

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{xy}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\sin x - \sin(x+y) & -\sin(x+y) \\ -\sin(x+y) & -\sin y - \sin(x+y) \end{vmatrix}.$$

Kako je

$$H\left(\tfrac{\pi}{3}, \tfrac{\pi}{3}\right) = \begin{vmatrix} \boxed{-\sqrt{3}} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{3} \end{vmatrix} = \frac{9}{4} > 0, \quad f_{xx}\left(\tfrac{\pi}{3}, \tfrac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3} < 0$$

zaključujemo da funkcija f u točki $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ ima lokalni maksimum koji je jednak $f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Kako je

$$H\left(\tfrac{5}{3}\pi, \tfrac{5}{3}\pi\right) = \begin{vmatrix} \boxed{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \sqrt{3} \end{vmatrix} = \frac{9}{4} > 0, \quad f_{xx}\left(\tfrac{5}{3}\pi, \tfrac{5}{3}\pi\right) = \sqrt{3} > 0$$

zaključujemo da funkcija f u točki $\left(\frac{5}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi\right)$ ima lokalni minimum koji je jednak $f\left(\frac{5}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Kako je

$$H(\pi, \pi) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

za točku (π, π) moramo provesti daljnja razmatranja. Najprije uočimo da je $f(\pi, \pi) = 0$. Ako smo jako blizu točke (π, π) na pravcu $y = x$, tada je

$$f(x,x) = \sin x + \sin x + \sin 2x = 2\sin x + 2\sin x \cos x = 2\sin x \cdot \big(1 + \cos x\big).$$

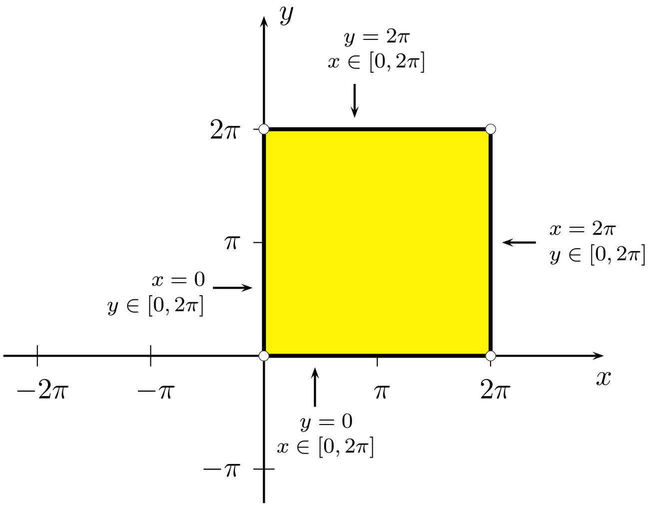
Izraz $1 + \cos x$ je uvijek veći ili jednak od nule. Ako je x jako blizu π s lijeve strane, tada je $\sin x > 0$ pa je $2\sin x \cdot (1 + \cos x) > 0$. Ako je x jako blizu π s desne strane, tada je $\sin x < 0$ pa je $2\sin x \cdot (1 + \cos x) < 0$. Zaključujemo da u svakoj okolini točke (π, π) funkcija f poprima pozitivne i negativne vrijednosti pa zbog $f(\pi, \pi) = 0$ slijedi da je (π, π) sedlasta točka funkcije f.

Sada nam još preostaje da provjerimo točke na rubu skupa S. Rub skupa S se sastoji od četiri dužine pa provodimo zasebna razmatranja na svakoj od tih dužina.

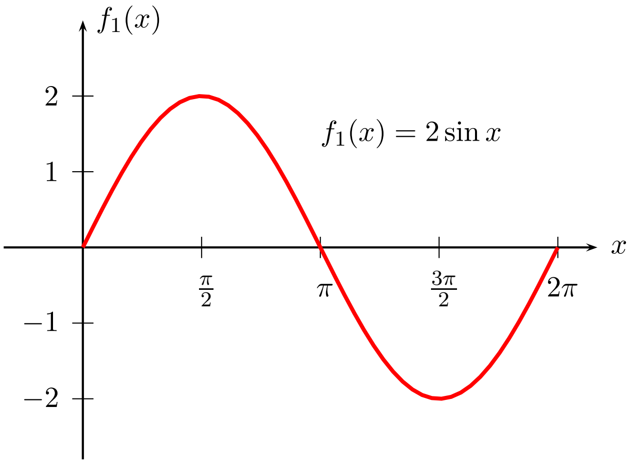
- $y = 0$, $x \in [0, 2\pi]$

Tražimo ekstreme funkcije $f(x,y) = \sin x + \sin y + \sin(x+y)$ uz uvjet $y = 0$ i pritom imamo na umu da mora biti $x \in [0, 2\pi]$. Kako je uvjet jednostavan, možemo ga direktno uvrstiti u funkciju pa slijedi

$$f(x,0) = \sin x + \sin 0 + \sin(x+0) = 2\sin x.$$



Dobili smo funkciju $f_1(x) = 2\sin x$ jedne varijable x i sada tražimo njezine ekstreme na segmentu $[0, 2\pi]$ po pravilima za traženje ekstrema funkcije jedne varijable. Međutim, to nam je dobro poznata funkcija pa odmah zaključujemo da funkcija f_1 na segmentu $[0, 2\pi]$ postiže globalni minimum jednak -2 u točki $x = \frac{3}{2}\pi$, a globalni maksimum jednak 2 postiže u točki $x = \frac{\pi}{2}$.



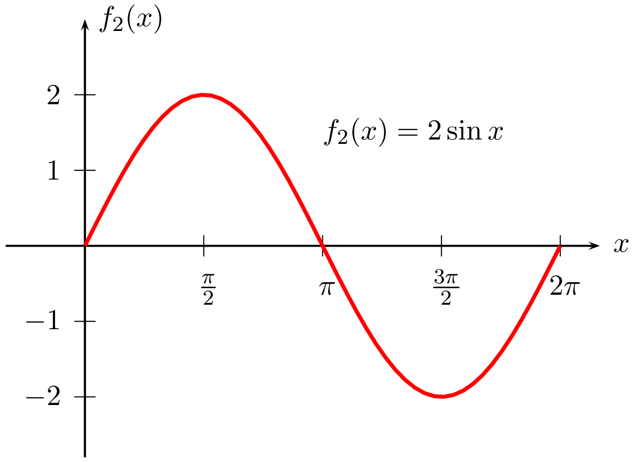
Kako je $y = 0$, slijedi da funkcija f na ovom dijelu ruba postiže globalni minimum jednak -2 u točki $\left(\frac{3}{2}\pi, 0\right)$, a globalni maksimum jednak 2 postiže u točki $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

- $y = 2\pi$, $x \in [0, 2\pi]$

Tražimo ekstreme funkcije $f(x, y) = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$ uz uvjet $y = 2\pi$ i pritom imamo na umu da mora biti $x \in [0, 2\pi]$. Kako je uvjet jednostavan, možemo ga direktno uvrstiti u funkciju pa slijedi

$$f(x, 2\pi) = \sin x + \sin 2\pi + \sin(x + 2\pi) = 2\sin x.$$

Dobili smo funkciju $f_2(x) = 2\sin x$ jedne varijable x i sada tražimo njezine ekstreme na segmentu $[0, 2\pi]$ po pravilima za traženje ekstrema funkcije jedne varijable. Međutim, to nam je dobro poznata funkcija pa odmah zaključujemo da funkcija f_2 na segmentu $[0, 2\pi]$ postiže globalni minimum jednak -2 u točki $x = \frac{3}{2}\pi$, a globalni maksimum jednak 2 postiže u točki $x = \frac{\pi}{2}$. Kako je $y = 2\pi$, slijedi da funkcija f na ovom dijelu ruba postiže globalni minimum jednak -2 u točki $\left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right)$, a globalni maksimum jednak 2 postiže u točki $\left(\frac{\pi}{2}, 2\pi\right)$.

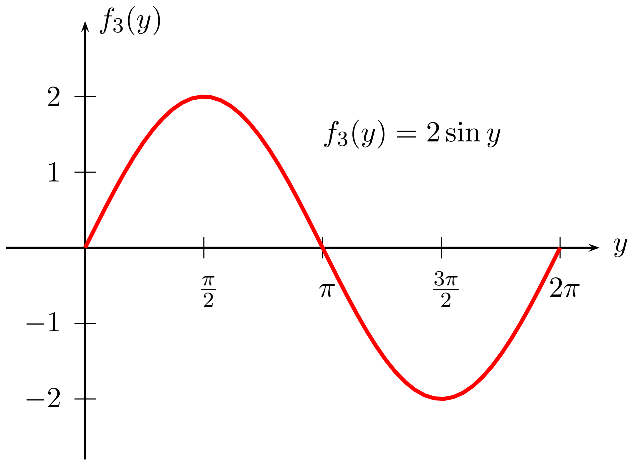


- $x = 0$, $y \in [0, 2\pi]$

Tražimo ekstreme funkcije $f(x, y) = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$ uz uvjet $x = 0$ i pritom imamo na umu da mora biti $y \in [0, 2\pi]$. Kako je uvjet jednostavan, možemo ga direktno uvrstiti u funkciju pa slijedi

$$f(0, y) = \sin 0 + \sin y + \sin(0 + y) = 2\sin y.$$

Dobili smo funkciju $f_3(y) = 2\sin y$ jedne varijable y i sada tražimo njezine ekstreme na segmentu $[0, 2\pi]$ po pravilima za traženje ekstrema funkcije jedne varijable. Međutim, to nam je dobro poznata funkcija pa odmah zaključujemo da funkcija f_3 na segmentu $[0, 2\pi]$ postiže globalni minimum jednak -2 u točki $y = \frac{3}{2}\pi$, a globalni maksimum jednak 2 postiže u točki $y = \frac{\pi}{2}$.



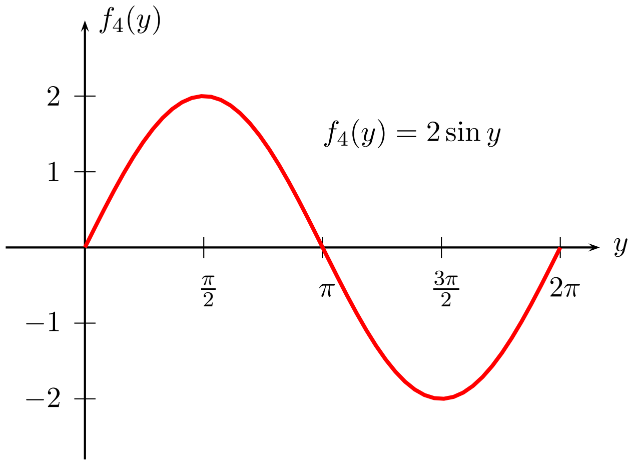
Kako je $x = 0$, slijedi da funkcija f na ovom dijelu ruba postiže globalni minimum jednak -2 u točki $\left(0, \frac{3}{2}\pi\right)$, a globalni maksimum jednak 2 postiže u točki $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

- $x = 2\pi,\ y \in [0, 2\pi]$

Tražimo ekstreme funkcije $f(x, y) = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$ uz uvjet $x = 2\pi$ i pritom imamo na umu da mora biti $y \in [0, 2\pi]$. Kako je uvjet jednostavan, možemo ga direktno uvrstiti u funkciju pa slijedi

$$f(2\pi, y) = \sin 2\pi + \sin y + \sin(2\pi + y) = 2 \sin y.$$

Dobili smo funkciju $f_4(y) = 2 \sin y$ jedne varijable y i sada tražimo njezine ekstreme na segmentu $[0, 2\pi]$ po pravilima za traženje ekstrema funkcije jedne varijable. Međutim, to nam je dobro poznata funkcija pa odmah zaključujemo da funkcija f_4 na segmentu $[0, 2\pi]$ postiže globalni minimum jednak -2 u točki $y = \frac{3}{2}\pi$, a globalni maksimum jednak 2 postiže u točki $y = \frac{\pi}{2}$.



Kako je $x = 2\pi$, slijedi da funkcija f na ovom dijelu ruba postiže globalni minimum jednak -2 u točki $\left(2\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$, a globalni maksimum jednak 2 postiže u točki $\left(2\pi, \frac{\pi}{2}\right)$.

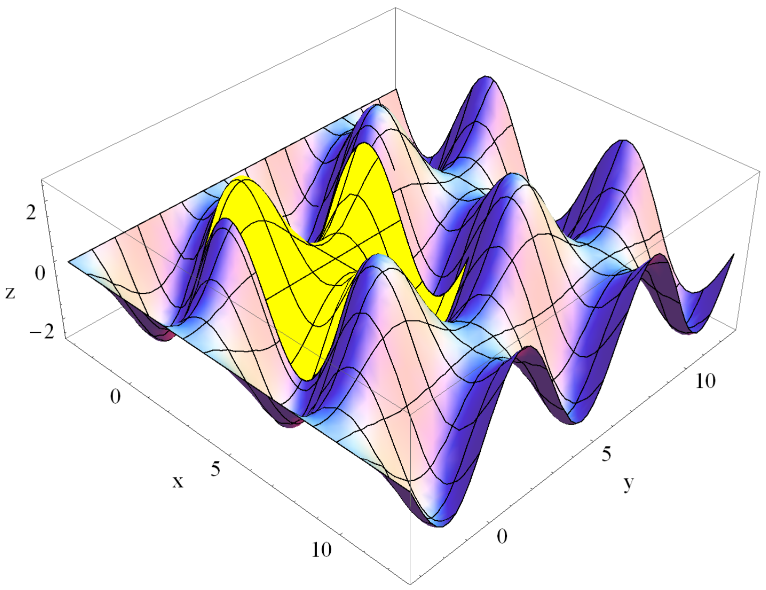
Konačno, uzmemo u razmatranje sve točke u kojima je funkcija f postizala ekstreme. To su točke

$$\left(\tfrac{\pi}{3}, \tfrac{\pi}{3}\right),\ \left(\tfrac{5}{3}\pi, \tfrac{5}{3}\pi\right),$$
$$\left(\tfrac{3}{2}\pi, 0\right),\ \left(0, \tfrac{3}{2}\pi\right),\ \left(\tfrac{3}{2}\pi, 2\pi\right),\ \left(2\pi, \tfrac{3}{2}\pi\right),$$
$$\left(\tfrac{\pi}{2}, 0\right),\ \left(0, \tfrac{\pi}{2}\right),\ \left(\tfrac{\pi}{2}, 2\pi\right),\ \left(2\pi, \tfrac{\pi}{2}\right).$$

Kako je

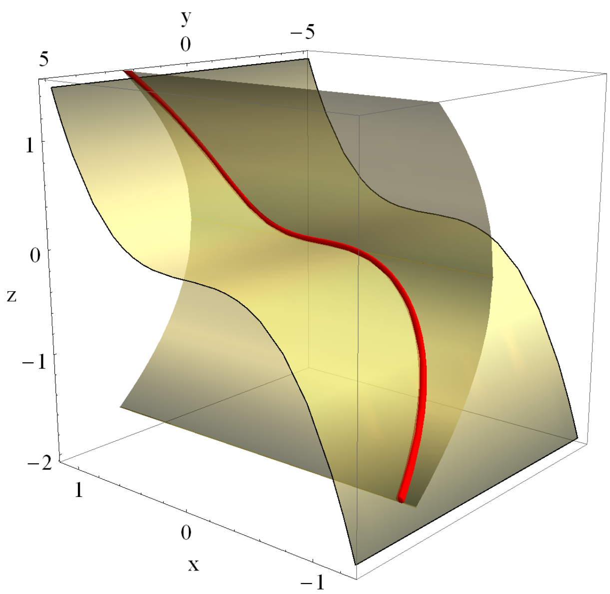
$$f\left(\tfrac{\pi}{3}, \tfrac{\pi}{3}\right) = \tfrac{3\sqrt{3}}{2}, \quad f\left(\tfrac{5}{3}\pi, \tfrac{5}{3}\pi\right) = -\tfrac{3\sqrt{3}}{2},$$
$$f\left(\tfrac{3}{2}\pi, 0\right) = -2, \quad f\left(0, \tfrac{3}{2}\pi\right) = -2, \quad f\left(\tfrac{3}{2}\pi, 2\pi\right) = -2, \quad f\left(2\pi, \tfrac{3}{2}\pi\right) = -2,$$
$$f\left(\tfrac{\pi}{2}, 0\right) = 2, \quad f\left(0, \tfrac{\pi}{2}\right) = 2, \quad f\left(\tfrac{\pi}{2}, 2\pi\right) = 2, \quad f\left(2\pi, \tfrac{\pi}{2}\right) = 2$$

zaključujemo da funkcija f na skupu S postiže globalni minimum jednak $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$ u točki $\left(\frac{5}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi\right)$, a globalni maksimum jednak $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ postiže u točki $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$. Ako pogledamo donju sliku, zapravo smo tražili ekstreme funkcije f samo na žuto označenom dijelu plohe.



Zadatak 74.
Odredite ekstreme funkcije $f(x, y, z) = \frac{x}{27z} + y$ uz uvjete $x^3 - z = 0$ i $z^2 - y = 0$.

Rješenje.
Tražimo ekstreme funkcije f uz dva uvjeta $g(x, y, z) = x^3 - z$ i $h(x, y, z) = z^2 - y$. Uočimo da zadani uvjeti predstavljaju dvije plohe u prostoru, a oba uvjeta zajedno predstavljaju krivulju koja je presjek zadanih ploha. Dakle, tražimo ekstreme funkcije f na krivulji koja je zadana kao presjek dvije plohe. Uočimo da dobivena krivulja nije kompaktan skup u $\mathbb{R}^3$ jer nije omeđena (na donjoj slici je prikazan crvenom bojom samo jedan dio te krivulje).



Najprije definiramo Lagrangeovu funkciju

$$L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{x}{27z} + y + \lambda_1(x^3 - z) + \lambda_2(z^2 - y).$$

Parcijalne derivacije Lagrangeove funkcije jednake su

$$L_x = \frac{1}{27z} + 3\lambda_1 x^2, \quad L_y = 1 - \lambda_2, \quad L_z = \frac{-x}{27z^2} - \lambda_1 + 2\lambda_2 z, \quad L_{\lambda_1} = x^3 - z, \quad L_{\lambda_2} = z^2 - y.$$

Izjednačavanjem parcijalnih derivacija s nulom dobivamo sustav

$$\frac{1}{27z} + 3\lambda_1 x^2 = 0 \tag{20}$$

$$1 - \lambda_2 = 0 \tag{21}$$

$$\frac{-x}{27z^2} - \lambda_1 + 2\lambda_2 z = 0 \tag{22}$$

$$x^3 - z = 0 \tag{23}$$

$$z^2 - y = 0 \tag{24}$$

Iz jednadžbe (21) odmah dobivamo $\lambda_2 = 1$, a iz jednadžbe (23) slijedi $z = x^3$. Ako $z = x^3$ uvrstimo u (20), dobivamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{27x^3} + 3\lambda_1 x^2 &= 0 \Big/ \cdot 27x^3 \\ 1 + 81\lambda_1 x^5 &= 0 \\ 81\lambda_1 x^5 &= -1 \\ \lambda_1 &= \frac{-1}{81x^5} \end{aligned}$$

Ako $\lambda_1 = \frac{-1}{81x^5}$, $\lambda_2 = 1$ i $z = x^3$ uvrstimo u (22), slijedi

$$\begin{aligned} \frac{-x}{27x^6} + \frac{1}{81x^5} + 2x^3 &= 0 \\ \frac{-2}{81x^5} &= -2x^3 \\ x^8 &= \frac{1}{81} \\ x &= \pm\sqrt[8]{\frac{1}{81}} \end{aligned}$$

pa je $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $x_2 = \frac{-1}{\sqrt{3}}$. Zbog $z = x^3$ slijedi $z_1 = \frac{1}{3\sqrt{3}}$, $z_2 = \frac{-1}{3\sqrt{3}}$. Nadalje, zbog $\lambda_1 = \frac{-1}{81x^5}$ slijedi $(\lambda_1)_1 = \frac{-1}{3\sqrt{3}}$, $(\lambda_1)_2 = \frac{1}{3\sqrt{3}}$. Konačno, iz (24) slijedi $y = z^2$ pa mora biti $y_1 = \frac{1}{27}$, $y_2 = \frac{1}{27}$. Dobili smo ukupno dvije stacionarne točke

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{27}, \frac{1}{3\sqrt{3}}, \frac{-1}{3\sqrt{3}}, 1\right), \qquad \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{27}, \frac{-1}{3\sqrt{3}}, \frac{1}{3\sqrt{3}}, 1\right).$$

Sada trebamo ispitati karakter stacionarnih točaka. Kako je

$$L_{xx} = 6\lambda_1 x, \quad L_{xy} = 0, \quad L_{xz} = \frac{-1}{27z^2}, \quad L_{yy} = 0, \quad L_{yz} = 0, \quad L_{zz} = \frac{2x}{27z^3} + 2\lambda_2$$

$$g_x = 3x^2, \quad g_y = 0, \quad g_z = -1, \quad h_x = 0, \quad h_y = -1, \quad h_z = 2z$$

slijedi da je

$$\Delta(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=\begin{vmatrix} 0 & 0 & g_x & g_y & g_z \\ 0 & 0 & h_x & h_y & h_z \\ g_x & h_x & L_{xx} & L_{xy} & L_{xz} \\ g_y & h_y & L_{xy} & L_{yy} & L_{yz} \\ g_z & h_z & L_{xz} & L_{yz} & L_{zz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3x^2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2z \\ 3x^2 & 0 & 6\lambda_1 x & 0 & -\frac{1}{27z^2} \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2z & -\frac{1}{27z^2} & 0 & \frac{2x}{27z^3}+2\lambda_2 \end{vmatrix}.$$

Kako je

$$\Delta\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{27},\frac{1}{3\sqrt{3}},\frac{-1}{3\sqrt{3}},1\right)=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{2}{3\sqrt{3}} \\ 1 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{2}{3\sqrt{3}} & -1 & 0 & 8 \end{vmatrix} = \frac{16}{3} > 0,$$

zaključujemo da funkcija f u točki $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{27},\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)$ ima uvjetni lokalni minimum koji je jednak $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{27},\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)=\frac{4}{27}$. Nadalje, zbog

$$\Delta\left(\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{1}{27},\frac{-1}{3\sqrt{3}},\frac{1}{3\sqrt{3}},1\right)=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -\frac{2}{3\sqrt{3}} \\ 1 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & -1 & 0 & 8 \end{vmatrix} = \frac{16}{3} > 0$$

zaključujemo da funkcija f u točki $\left(\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{1}{27},\frac{-1}{3\sqrt{3}}\right)$ također ima uvjetni lokalni minimum koji je jednak $f\left(\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{1}{27},\frac{-1}{3\sqrt{3}}\right)=\frac{4}{27}$.

Napomena. U prethodnom zadatku smo imali dva jednostavna uvjeta $x^3-z=0$ i $z^2-y=0$ koji zapravo predstavljaju nelinerani sustav dvije jednadžbe s tri nepoznanice. Taj sustav ima beskonačno mnogo rješenja, a sva njegova rješenja leže na crvenoj krivulji koja je prikazana na prethodnoj slici. Ako varijablu x uzmemo za parametar, tj. stavimo $x=t$, tada dobivamo da mora biti $y=t^6$, $z=t^3$. Dakle, sva rješenja sustava $x^3-z=0$, $z^2-y=0$ dana su s $x=t$, $y=t^6$, $z=t^3$ pri čemu je $t\in\mathbb{R}$. Dobiveno rješenje predstavlja parametarske jednadžbe krivulje koja je zadana kao presjek ploha $x^3-z=0$ i $z^2-y=0$. Sjetite se analitičke geometrije prostora gdje smo tražili parametarske jednadžbe pravca koji je bio zadan kao presjek dvije ravnine. Tamo smo također imali sustav dvije jednadžbe s tri nepoznanice, samo što je taj sustav bio linearan pa smo mogli na njega primijeniti Gaussov postupak, a opće rješenje tog linearnog sustava je predstavljalo parametarske jednadžbe pravca. Ako opće rješenje $x=t$, $y=t^6$, $z=t^3$ uvrstimo u funkciju $f(x,y,z)=\frac{x}{27z}+y$, dobivamo funkciju jedne varijable $F(t)=\frac{1}{27t^2}+t^6$. Sada, umjesto da tražimo ekstreme funkcije $f(x,y,z)=\frac{x}{27z}+y$ uz uvjete $x^3-z=0$ i $z^2-y=0$, tražimo ekstreme funkcije $F(t)=\frac{1}{27t^2}+t^6$ bez ikakvih uvjeta. Koristeći se poznatim pravilima za traženje ekstrema realnih funkcija jedne varijable lagano se dobiva da funkcija F u točkama $t = \frac{-1}{\sqrt{3}}$ i $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ima lokalne minimume koji su u obje točke jednaki $\frac{4}{27}$. Iz $x = t$, $y = t^6$, $z = t^3$ slijedi da funkcija f u točkama $\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{27}, \frac{-1}{3\sqrt{3}}\right)$ i $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{27}, \frac{1}{3\sqrt{3}}\right)$ postiže uvjetne lokalne minimume koji su jednaki $\frac{4}{27}$.

Zadatak 75.
Među svim trokutima koji imaju opseg jednak 42, pronađite onog koji ima najveću površinu.

Rješenje.
Površina trokuta kojemu su duljine stranica jednake a, b, c računa se po Heronovoj formuli

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

pri čemu je s poluopseg trokuta. Kako nas zanimaju samo trokuti koji imaju opseg jednak 42, mora biti $a + b + c = 42$ i $s = 21$. Dakle, tražimo ekstreme funkcije

$$P(a, b, c) = \sqrt{21(21-a)(21-b)(21-c)}$$

uz uvjet $a + b + c = 42$. Kako je površina trokuta maksimalna ako i samo ako je izraz pod drugim korijenom maksimalan, možemo radi jednostavnosti promatrati funkciju

$$f(a, b, c) = 21(21-a)(21-b)(21-c)$$

i tražiti njezine ekstreme uz uvjet $g(a, b, c) = a + b + c - 42$. Definiramo Lagrangeovu funkciju

$$L(a, b, c, \lambda) = 21(21-a)(21-b)(21-c) + \lambda(a + b + c - 42).$$

Parcijalne derivacije Lagrangeove funkcije jednake su

$$\frac{\partial L}{\partial a} = \lambda - 21(21-b)(21-c), \qquad \frac{\partial L}{\partial b} = \lambda - 21(21-a)(21-c),$$

$$\frac{\partial L}{\partial c} = \lambda - 21(21-a)(21-b), \qquad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = a + b + c - 42.$$

Izjednačavanjem parcijalnih derivacija s nulom dobivamo sustav

$$\lambda - 21(21-b)(21-c) = 0 \tag{25}$$

$$\lambda - 21(21-a)(21-c) = 0 \tag{26}$$

$$\lambda - 21(21-a)(21-b) = 0 \tag{27}$$

$$a + b + c - 42 = 0 \tag{28}$$

Iz (25) i (26) dobivamo

$$\lambda = 21(21-b)(21-c), \quad \lambda = 21(21-a)(21-c)$$

pa zaključujemo da mora biti

$$21(21-b)(21-c) = 21(21-a)(21-c).$$

Zbog nejednakosti trokuta je $c < 21$ jer u protivnom ne bi vrijedilo $a + b > c$ (što mora vrijediti u svakom trokutu). Stoga je $21 - c \neq 0$ pa dijeljenjem prethodne jednadžbe s $21(21 - c)$ dobivamo $21 - b = 21 - a$ iz čega slijedi $a = b$. Analogno, iz (26) i (27) dobivamo

$$\lambda = 21(21 - a)(21 - c), \quad \lambda = 21(21 - a)(21 - b)$$

pa zaključujemo da mora biti

$$21(21 - a)(21 - c) = 21(21 - a)(21 - b).$$

Zbog nejednakosti trokuta je $a < 21$ jer u protivnom ne bi vrijedilo $b + c > a$ (što mora vrijediti u svakom trokutu). Stoga je $21 - a \neq 0$ pa dijeljenjem prethodne jednadžbe s $21(21 - a)$ dobivamo $21 - c = 21 - b$ iz čega slijedi $b = c$.

Iz $a = b$ i $b = c$ slijedi $a = b = c$. Uvrstimo li $a = b = c$ u jednadžbu (28), dobivamo $a = 14$, $b = 14$, $c = 14$. Uvrstimo li $b = 14$ i $c = 14$ u (25), dobivamo $\lambda = 1029$. Dakle, dobili smo samo jednu stacionarnu točku $(14, 14, 14, 1029)$. Sada trebamo ispitati karakter dobivene stacionarne točke.

$$L_{aa} = 0, \quad L_{ab} = 21(21 - c), \quad L_{ac} = 21(21 - b), \quad L_{bb} = 0, \quad L_{bc} = 21(21 - a), \quad L_{cc} = 0,$$
$$g_a = 1, \quad g_b = 1, \quad g_c = 1.$$

Nakon toga formiramo determinante

$$\Delta_1(a, b, c, \lambda) = - \begin{vmatrix} 0 & g_a & g_b \\ g_c & L_{aa} & L_{ab} \\ g_b & L_{ab} & L_{bb} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 21(21 - c) \\ 1 & 21(21 - c) & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2(a, b, c, \lambda) = - \begin{vmatrix} 0 & g_a & g_b & g_c \\ g_a & L_{aa} & L_{ab} & L_{ac} \\ g_b & L_{ab} & L_{bb} & L_{bc} \\ g_c & L_{ac} & L_{bc} & L_{cc} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 21(21 - c) & 21(21 - b) \\ 1 & 21(21 - c) & 0 & 21(21 - a) \\ 1 & 21(21 - b) & 21(21 - a) & 0 \end{vmatrix}$$

Kako je

$$\Delta_1(14, 14, 14, 1029) = - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 147 \\ 1 & 147 & 0 \end{vmatrix} = -294 < 0,$$

$$\Delta_2(14, 14, 14, 1029) = - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 147 & 147 \\ 1 & 147 & 0 & 147 \\ 1 & 147 & 147 & 0 \end{vmatrix} = 64\,827 > 0$$

zaključujemo da funkcija f u točki $(14, 14, 14)$ postiže uvjetni maksimum. Stoga i funkcija P u točki $(14, 14, 14)$ postiže maksimum uz uvjet $a + b + c = 42$. Dakle, od svih trokuta koji imaju opseg jednak 42, najveću površinu ima jednakostranični trokut sa stranicom duljine 14.

Važna napomena. Pogledamo li teoreme na stranici 68. koji daju nužne uvjete za postojanje uvjetnih lokalnih ekstrema, možemo uočiti da smo u svim zadacima u kojima smo koristili Lagrangeovu funkciju izostavili provjeravanje jednog važnog uvjeta koji se nalazi u pretpostavkama tih teorema. To smo napravili namjerno kako ne bismo previše komplicirali samo rješavanje zadataka. Naravno da to nije matematički ispravno i pedantne osobe bi nam na tome mogle zamjeriti i pomisliti čak da niti nismo svjesni svoje pogreške. No, bez brige, svega smo svjesni i znamo što radimo. Iskreno, mi smo taj uvjet prešutno provjeravali, samo nismo nigdje to posebno napomenuli. Stoga ćemo sada sve objasniti. O kojoj se to pretpostavci radi? Naime, niti u jednom zadatku nismo provjeravali da li je skup $\{\nabla g_1(P), \ldots, \nabla g_m(P)\}$ linearno nezavisan u svakoj točki P skupa S na kojemu smo tražili uvjetne ekstreme funkcije. Jednostavno rečeno, nismo provjeravali da li su gradijenti svih uvjeta linearno nezavisni vektori u svakoj točki skupa S na kojemu smo tražili uvjetne ekstreme funkcije. To je jedna od važnih pretpostavki u teoremima na stranici 68. Međutim, ta pretpostavka u nekim standardnim zadacima uglavnom uvijek i vrijedi pa je i to bio jedan od razloga zašto nismo posebno spominjali provjeravanje tog uvjeta. Provjerimo ovdje da ta pretpostavka zaista vrijedi na barem dva zadatka u kojima smo koristili Lagrangeovu funkciju.

- U 64. zadatku smo tražili ekstreme funkcije $z = 2x - 3y + 7$ na kružnici $x^2 + y^2 = 1$. U tom slučaju smo imali uvjet $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ i trebali smo provjeriti da je $\nabla g(x, y) \neq (0, 0)$ u svim točkama kružnice $x^2 + y^2 = 1$. Kako je $\nabla g(x, y) = (2x, 2y)$, zaključujemo da je $\nabla g(x, y) = (0, 0)$ jedino u točki $(0, 0)$. Međutim, točka $(0, 0)$ ne pripada kružnici $x^2 + y^2 = 1$ pa je $\nabla g(x, y) \neq (0, 0)$ u svim točkama kružnice $x^2 + y^2 = 1$.

- U 67. zadatku smo tražili ekstreme funkcije $f(x, y, z) = x + y + z$ na skupu zadanom jednadžbama $x^2 + y^2 = 2,\ x + z = 1$. U tom slučaju smo imali dva uvjeta $g(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2$, $h(x, y, z) = x + z - 1$ i trebali smo provjeriti da su vektori $\nabla g(x, y, z)$ i $\nabla h(x, y, z)$ linearno nezavisni u svim točkama skupa zadanog jednadžbama $x^2 + y^2 = 2,\ x + z = 1$. Kako je $\nabla g(x, y, z) = (2x, 2y, 0)$ i $\nabla h(x, y, z) = (1, 0, 1)$, zaključujemo da su vektori $\nabla g(x, y, z)$ i $\nabla h(x, y, z)$ linearno zavisni jedino u točkama oblika $(0, 0, z)$ za svaki $z \in \mathbb{R}$. Međutim, točke oblika $(0, 0, z)$ ne zadovoljavaju istovremeno obje jednadžbe $x^2 + y^2 = 2,\ x + z = 1$ pa su vektori $\nabla g(x, y, z)$ i $\nabla h(x, y, z)$ linearno nezavisni u svim točkama skupa zadanog jednadžbama $x^2 + y^2 = 2,\ x + z = 1$.

Za vježbu provjerite da je i u svim ostalim zadacima u kojima smo koristili Lagrangeovu funkciju ispunjena gore spomenuta pretpostavka iz teorema na stranici 68.