Polinomi

– primjeri riješenih zadataka –

Teorem. *Ako je zadano* $n+1$ *različitih točaka* $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\dots,(x_n,y_n),(x_{n+1},y_{n+1})$ *tako da je* $x_i \neq x_j$ *za* $i \neq j$*, tada postoji jedinstveni polinom* P *stupnja* $\leqslant n$ *takav da je* $P(x_i) = y_i$*,* $i = 1,2,\dots,n,n+1$*.*

Taj polinom pronalazimo na sljedeći način. Neka je L_i polinom n-tog stupnja za koji je

$$L_i(x_1) = L_i(x_2) = \cdots = L_i(x_{i-1}) = L_i(x_{i+1}) = \cdots = L_i(x_{n+1}) = 0, \quad L_i(x_i) = 1.$$

Tada je

$$L_i(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_{n+1})}{(x_i-x_1)(x_i-x_2)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_{n+1})}.$$

Traženi polinom P je oblika

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n+1} y_i L_i(x)$$

i kažemo da je interpolacijski polinom P zapisan u Lagrangeovom obliku.

Zadatak 1.

Odredite Lagrangeov interpolacijski polinom koji prolazi točkama $(1,3)$, $(2,16)$, $(-1,1)$ i $(3,45)$.

Rješenje.

$$(\overset{x_1}{1}, \overset{y_1}{3}), \quad (\overset{x_2}{2}, \overset{y_2}{16}), \quad (\overset{x_3}{-1}, \overset{y_3}{1}), \quad (\overset{x_4}{3}, \overset{y_4}{45})$$

Najprije pronađemo polinome L_1, L_2, L_3 i L_4.

$$L_1(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)} \qquad L_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-2)(x+1)(x-3)}{(1-2)(1+1)(1-3)} \qquad L_2(x) = \frac{(x-1)(x+1)(x-3)}{(2-1)(2+1)(2-3)}$$

$$L_1(x) = \frac{1}{4}(x-2)(x+1)(x-3) \qquad L_2(x) = -\frac{1}{3}(x-1)(x+1)(x-3)$$

$$L_1(x) = \frac{1}{4}x^3 - x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{3}{2} \qquad L_2(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + \frac{1}{3}x - 1$$

$$L_3(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)} \qquad L_4(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)}$$

$$L_3(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(-1-1)(-1-2)(-1-3)} \qquad L_4(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x+1)}{(3-1)(3-2)(3+1)}$$

$$L_3(x) = -\frac{1}{24}(x-1)(x-2)(x-3) \qquad L_4(x) = \frac{1}{8}(x-1)(x-2)(x+1)$$

$$L_3(x) = -\frac{1}{24}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{11}{24}x + \frac{1}{4} \qquad L_4(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}x + \frac{1}{4}$$

Konačno, traženi polinom P je oblika

$$P(x) = y_1L_1(x) + y_2L_2(x) + y_3L_3(x) + y_4L_4(x)$$

$$P(x) = 3 \cdot \left(\frac{1}{4}x^3 - x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}\right) + 16 \cdot \left(-\frac{1}{3}x^3 + x^2 + \frac{1}{3}x - 1\right) +$$

$$+ 1 \cdot \left(-\frac{1}{24}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{11}{24}x + \frac{1}{4}\right) + 45 \cdot \left(\frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}x + \frac{1}{4}\right)$$

$$P(x) = x^3 + 2x^2$$

Zadatak 2.
Uočite na grafu funkcije $y = 3^x$ točke $\left(-1, \frac{1}{3}\right)$, $(0, 1)$ i $(1, 3)$. Nađite polinom P najmanjeg stupnja koji prolazi tim točkama i pomoću njega približno odredite $\sqrt[4]{3}$. Kolika je stvarna greška kod ove aproksimacije?

Rješenje.
Trebamo odrediti Lagrangeov interpolacijski polinom P koji prolazi kroz točke

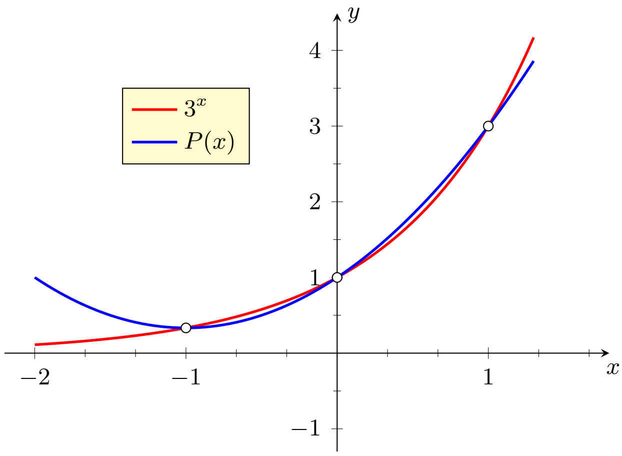
$$\left(\overset{x_1}{-1}, \overset{y_1}{\tfrac{1}{3}}\right), \quad (\overset{x_2}{0}, \overset{y_2}{1}), \quad (\overset{x_3}{1}, \overset{y_3}{3}).$$

Najprije moramo pronaći polinome L_1, L_2 i L_3.

$$L_1(x) = \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} \qquad L_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} \qquad L_3(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - 0)(x - 1)}{(-1 - 0)(-1 - 1)} \qquad L_2(x) = \frac{(x + 1)(x - 1)}{(0 + 1)(0 - 1)} \qquad L_3(x) = \frac{(x + 1)(x - 0)}{(1 + 1)(1 - 0)}$$

$$L_1(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x \qquad L_2(x) = 1 - x^2 \qquad L_3(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$$



Traženi polinom P je

$$P(x) = y_1L_1(x) + y_2L_2(x) + y_3L_3(x)$$

$$P(x) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x\right) + 1 \cdot (1 - x^2) + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x\right)$$

$$P(x) = \frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 1$$

Ako u funkciju $y = 3^x$ uvrstimo $x = \frac{1}{4}$, dobivamo da je $\sqrt[4]{3} \approx 1.316074013$. Ako u dobiveni polinom uvrstimo $x = \frac{1}{4}$, dobivamo $\sqrt[4]{3} \approx P(\frac{1}{4}) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{16} + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4} + 1 = \frac{11}{8} = 1.375$. Stvarna greška je jednaka $\left|1.316074013 - 1.375\right| = 0.058926$, tj. greška se javlja na drugoj decimali.

Teorem (Teorem o nulpolinomu). *Polinom $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ s realnim ili kompleksnim koeficijentima je nulfunkcija ako i samo ako je $a_i = 0$ za svaki $i = 0, 1, \ldots, n$.*

Teorem (Teorem o jednakosti polinoma). *Polinomi $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ i $g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$, $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$ su jednaki ako i samo ako vrijedi $m = n$ i $a_i = b_i$ za svaki $i = 0, 1, \ldots, n$.*

Zadatak 3.
Odredite polinom $f(x)$ ako je $f(2x+1) = 4x^2 + 2x + 3$.

Rješenje.
Zadatak ćemo riješiti na dva načina.

1. način: pomoću supstitucije

Stavimo $y = 2x + 1$. Tada je $x = \frac{y-1}{2}$ pa dobivamo

$$\begin{aligned}
f(2x+1) &= 4x^2 + 2x + 3 \\
f(y) &= 4 \cdot \left(\frac{y-1}{2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{y-1}{2} + 3 \\
f(y) &= 4 \cdot \frac{y^2 - 2y + 1}{4} + y - 1 + 3 \\
f(y) &= y^2 - y + 3
\end{aligned}$$

Nezavisnu varijablu možemo nazvati po želji, odnosno ako opet stavimo novu supstituciju $y = x$, dobivamo da je $f(x) = x^2 - x + 3$.

2. način: pomoću teorema o jednakosti dva polinoma

Kako je na desnoj strani jednakosti $f(2x+1) = 4x^2 + 2x + 3$ polinom drugog stupnja, iz teorema o jednakosti dva polinoma slijedi da na lijevoj strani također mora biti polinom drugog stupnja, tj. mora biti $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ za neke $A, B, C \in \mathbb{R}$. Stoga dobivamo

$$\begin{aligned}
f(2x+1) &= 4x^2 + 2x + 3 \\
A(2x+1)^2 + B(2x+1) + C &= 4x^2 + 2x + 3 \\
A(4x^2 + 4x + 1) + B(2x+1) + C &= 4x^2 + 2x + 3 \\
(4A)x^2 + (4A + 2B)x + (A + B + C) &= 4x^2 + 2x + 3
\end{aligned}$$

Izjednačavanjem koeficijenata uz odgovarajuće potencije od x dobivamo sustav linearnih jednadžbi

$$\begin{aligned} 4A &= 4 \\ 4A + 2B &= 2 \\ A + B + C &= 3 \end{aligned}$$

koji ima jedinstveno rješenje $A = 1$, $B = -1$, $C = 3$. Stoga je $f(x) = x^2 - x + 3$.

Zadatak 4.
Odredite koeficijente A i B tako da vrijedi $\dfrac{5x+4}{x^2+2x} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x+2}$.

Rješenje.
Svođenjem desne strane na zajednički nazivnik dobivamo

$$\begin{aligned} \frac{5x+4}{x^2+2x} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} \\ \frac{5x+4}{x^2+2x} &= \frac{A(x+2)+Bx}{x(x+2)} \\ \frac{5x+4}{x^2+2x} &= \frac{A(x+2)+Bx}{x^2+2x} \quad \Big/ \cdot (x^2+2x) \\ 5x+4 &= A(x+2) + Bx \\ 5x+4 &= (A+B)x + 2A \end{aligned}$$

Izjednačavanjem koeficijenata uz odgovarajuće potencije od x dobivamo sustav linearnih jednadžbi

$$\begin{aligned} A + B &= 5 \\ 2A &= 4 \end{aligned}$$

koji ima jedinstveno rješenje $A = 2$, $B = 3$.

Zadatak 5.
Polinom $f(x) = x^4 + 2x^3 + ax^2 + 2x + b$ je "kvadrat" nekog polinoma. Odredite a, b i taj polinom.

Rješenje.
Prema pretpostavci zadatka mora postojati polinom $g(x)$ takav da je $f(x) = g(x)^2$. Iz teorema o jednakosti dva polinoma slijedi da je polinom $g(x)$ drugog stupnja, tj. $g(x) = Ax^2 + Bx + C$ za neke $A, B, C \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} x^4 + 2x^3 + ax^2 + 2x + b &= (Ax^2 + Bx + C)^2 \\ x^4 + 2x^3 + ax^2 + 2x + b &= A^2x^4 + B^2x^2 + C^2 + 2ABx^3 + 2ACx^2 + 2BCx \\ x^4 + 2x^3 + ax^2 + 2x + b &= A^2x^4 + 2ABx^3 + (B^2 + 2AC)x^2 + 2BCx + C^2 \end{aligned}$$

Izjednačavanjem koeficijenata uz odgovarajuće potencije od x dobivamo sustav jednadžbi

$$A^2 = 1, \quad 2AB = 2, \quad B^2 + 2AC = a, \quad 2BC = 2, \quad C^2 = b.$$

Iz prve jednadžbe slijedi $A = 1$ ili $A = -1$. Pogledajmo prvo slučaj $A = 1$. Tada iz druge i četvrte jednadžbe dobivamo $B = 1$ i $C = 1$. Iz pete jednadžbe slijedi $b = 1$ i konačno iz treće jednadžbe $a = 3$. Stoga je jedno rješenje promatranog sustava jednadžbi

$$A = 1, \quad B = 1, \quad C = 1, \quad a = 3, \quad b = 1.$$

Na isti način u slučaju $A = -1$ dobivamo još jedno rješenje

$$A = -1, \quad B = -1, \quad C = -1, \quad a = 3, \quad b = 1.$$

Dakle, u svakom slučaju je $a = 3$ i $b = 1$, a za polinom $g(x)$ dobivamo dva rješenja $g(x) = x^2 + x + 1$ ili $g(x) = -x^2 - x - 1$.

Zadatak 6.
Za linearni polinom $f(x) = 2x + 3$ odredite sve linearne polinome $g(x)$ za koje vrijedi

$$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x).$$

Rješenje.
Prema uvjetu zadatka mora biti $g(x) = ax + b$ za neke $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Nadalje,

$$\begin{aligned}
(f \circ g)(x) &= (g \circ f)(x) \\
f(g(x)) &= g(f(x)) \\
f(ax + b) &= g(2x + 3) \\
2(ax + b) + 3 &= a(2x + 3) + b \\
2ax + (2b + 3) &= 2ax + (3a + b)
\end{aligned}$$

Izjednačavanjem koeficijenata uz odgovarajuće potencije od x dobivamo sustav linearnih jednadžbi

$$\begin{aligned}
2a &= 2a \\
2b + 3 &= 3a + b.
\end{aligned}$$

Zapravo imamo samo jednu linearnu jednadžbu $2b + 3 = 3a + b$ iz koje dobivamo $b = 3a - 3$. Stoga je $g(x) = ax + 3a - 3$, gdje je $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Zaključujemo da postoji beskonačno mnogo linearnih polinoma $g(x)$ za koje vrijedi $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$.

Zadatak 7.
Odredite polinom trećeg stupnja kojemu je slobodni član jednak nula i koji zadovoljava uvjet $f(x) - f(x - 1) = x^2$ za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Rješenje.
Kako je $f(x)$ polinom trećeg stupnja sa slobodnim članom jednakim nuli, slijedi da je $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx$ za neke $A, B, C \in \mathbb{R}$, $A \neq 0$. Nadalje,

$$\begin{gathered}
f(x) - f(x - 1) = x^2 \\
Ax^3 + Bx^2 + Cx - \Big[A(x - 1)^3 + B(x - 1)^2 + C(x - 1)\Big] = x^2 \\
Ax^3 + Bx^2 + Cx - A(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) - B(x^2 - 2x + 1) - C(x - 1) = x^2 \\
(3A)x^2 + (-3A + 2B)x + (A - B + C) = x^2
\end{gathered}$$

Izjednačavanjem koeficijenata uz odgovarajuće potencije od x dobivamo sustav linearnih jednadžbi

$$\begin{aligned} 3A &= 1 \\ -3A + 2B &= 0 \\ A - B + C &= 0 \end{aligned}$$

koji ima jedinstveno rješenje $A = \frac{1}{3}$, $B = \frac{1}{2}$, $C = \frac{1}{6}$. Stoga je $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x$.

Zadatak 8.
Za polinom $f(x) = x^3 - x$ odredite polinom $f(x-1) + f(x) + f(x+1)$.

Rješenje.

$$\begin{aligned} f(x-1) + f(x) + f(x+1) &= \Big[(x-1)^3 - (x-1)\Big] + \Big[x^3 - x\Big] + \Big[(x+1)^3 - (x+1)\Big] = \\ &= (x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - x + 1) + (x^3 - x) + (x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - x - 1) = 3x^3 + 3x \end{aligned}$$

Zadatak 9.
Odredite zbroj koeficijenata polinoma $P(x) = \big(x^5 + 7x^4 - x^3 - 11x + 5\big)^{2005}\big(x^2 - x + 2\big)^{2004}$.

Rješenje.
Ako je zadan polinom $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, tada za $x = 1$ dobivamo da je $P(1) = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0$. Zaključujemo da je zbroj koeficijenata polinoma $P(x)$ jednak vrijednosti tog polinoma u točki $x = 1$. U našem slučaju je

$$P(1) = (1 + 7 - 1 - 11 + 5)^{2005} \cdot (1 - 1 + 2)^{2004} = 1^{2005} \cdot 2^{2004} = 2^{2004}$$

pa je zbroj koeficijenata zadanog polinoma jednak 2^{2004}.

Zadatak 10.
Odredite razliku zbroja koeficijenata polinoma $P(x) = \big(5x^5 + 7x^4 - x^3 - 11x + 9\big)^{2005}\big(x^2 - x + 3\big)^{2004}$ s parnim indeksima i zbroja koeficijenata s neparnim indeksima.

Rješenje.
Ako je zadan polinom $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, tada za $x = -1$ dobivamo da je $P(-1) = (-1)^n \cdot a_n + (-1)^{n-1} \cdot a_{n-1} + \cdots + (-1) \cdot a_1 + a_0$. Zaključujemo da je razlika zbroja koeficijenata polinoma $P(x)$ s parnim indeksima i zbroja koeficijenata s neparnim indeksima jednaka vrijednosti tog polinoma u točki $x = -1$. U našem slučaju je

$$P(-1) = (-5 + 7 + 1 + 11 + 9)^{2005} \cdot (1 + 1 + 3)^{2004} = 23^{2005} \cdot 5^{2004}.$$

Zadatak 11.
Dokažite da ne postoji polinom s cjelobrojnim koeficijentima za koji je $f(5) = 6$ i $f(2) = 1$.

Rješenje.
Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji polinom $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ za koji je $f(5) = 6$ i $f(2) = 1$. Neka je $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,\ \ a_i \in \mathbb{Z},\ \ i = 0, 1, \ldots, n,\ \ a_n \neq 0$. Tada je

$$\begin{aligned} f(5) &= a_n \cdot 5^n + a_{n-1} \cdot 5^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 5 + a_0 \\ f(2) &= a_n \cdot 2^n + a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 2 + a_0 \end{aligned}$$

pa oduzimanjem dobivamo

$$f(5) - f(2) = a_n \cdot \left(5^n - 2^n\right) + a_{n-1} \cdot \left(5^{n-1} - 2^{n-1}\right) + \cdots + a_2 \cdot \left(5^2 - 2^2\right) + a_1 \cdot 3.$$

Prema pretpostavci je $f(5) - f(2) = 6 - 1 = 5$ iz čega slijedi

$$5 = a_n \cdot \left(5^n - 2^n\right) + a_{n-1} \cdot \left(5^{n-1} - 2^{n-1}\right) + \cdots + a_2 \cdot \left(5^2 - 2^2\right) + a_1 \cdot 3. \qquad (*)$$

Tvrdimo da $3 \mid 5^n - 2^n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Ovu tvrdnju ćemo dokazati matematičkom indukcijom. Za $n = 1$ tvrdnja je očigledna. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki prirodni broj n, tj. da je $5^n - 2^n = 3k$ za neki $k \in \mathbb{Z}$. Tada je

$$5^{n+1} - 2^{n+1} = 5 \cdot 5^n - 2 \cdot 2^n = 2 \cdot (5^n - 2^n) + 3 \cdot 5^n = 2 \cdot 3k + 3 \cdot 5^n = 3 \cdot \underbrace{(2k + 5^n)}_{\in \mathbb{Z}}$$

iz čega slijedi da $3 \mid 5^{n+1} - 2^{n+1}$. Prema principu matematičke indukcije tvrdnja vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$. Međutim, u tom slučaju je desna strana od $(*)$ djeljiva s 3, dok lijeva očito nije, što je kontradikcija. Dakle, ne postoji polinom f s cjelobrojnim koeficijentima za koji bi bilo $f(5) = 6$ i $f(2) = 1$.

Zadatak 12.
Neka je $f(x)$ polinom s cjelobrojnim koeficijentima. Dokažite da je za svaki $a \in \mathbb{N}$ i $b \in \mathbb{N}$ broj $f\left(a + \sqrt{b}\right) + f\left(a - \sqrt{b}\right)$ uvijek cijeli broj.

Rješenje.
Neka je $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,\ \ a_i \in \mathbb{Z},\ \ i = 0, 1, \ldots, n,\ \ a_n \neq 0$. Tada je

$$\begin{aligned} f\left(a + \sqrt{b}\right) &= a_n\left(a + \sqrt{b}\right)^n + a_{n-1}\left(a + \sqrt{b}\right)^{n-1} + \cdots + a_1\left(a + \sqrt{b}\right) + a_0 \\ f\left(a - \sqrt{b}\right) &= a_n\left(a - \sqrt{b}\right)^n + a_{n-1}\left(a - \sqrt{b}\right)^{n-1} + \cdots + a_1\left(a - \sqrt{b}\right) + a_0 \end{aligned}$$

pa zbrajanjem dobivamo

$$f\left(a + \sqrt{b}\right) + f\left(a - \sqrt{b}\right) = a_n \left[\left(a + \sqrt{b}\right)^n + \left(a - \sqrt{b}\right)^n\right] + \cdots + a_1 \left[\left(a + \sqrt{b}\right) + \left(a - \sqrt{b}\right)\right] + 2a_0.$$

Tvrdimo da je $\left(a + \sqrt{b}\right)^n + \left(a - \sqrt{b}\right)^n \in \mathbb{N}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Ako to pokažemo, tada slijedi tvrdnja zadatka. Prema binomnom poučku je

$$\begin{aligned} \left(a + \sqrt{b}\right)^n + \left(a - \sqrt{b}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \sqrt{b}^{\,k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \left(-\sqrt{b}\right)^k = \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \left(\sqrt{b}^{\,k} + \left(-\sqrt{b}\right)^k\right) \end{aligned}$$

Ako je k neparan broj, tada je $\sqrt{b}^{\,k}+\left(-\sqrt{b}\right)^k=0$. Ako je k paran broj, tada je $k=2l$ za neki $l\in\mathbb{N}_0$. U tom slučaju je

$$\sqrt{b}^{\,k}+\left(-\sqrt{b}\right)^k=\sqrt{b}^{\,2l}+\left(-\sqrt{b}\right)^{2l}=2b^l\in\mathbb{N}.$$

Nadalje, $\binom{n}{k}\in\mathbb{N}$ za $k,n\in\mathbb{N}$, $k\leqslant n$. Isto tako, $a^{n-k}\in\mathbb{N}$ za $a,n,k\in\mathbb{N}$, $k\leqslant n$. Iz ovih razmatranja slijedi da je $\left(a+\sqrt{b}\right)^n+\left(a-\sqrt{b}\right)^n\in\mathbb{N}$ za sve $a,b,n\in\mathbb{N}$.

Zadatak 13.
Dokažite da u kanonskom zapisu produkta $f(x)g(x)$ polinoma

$$\begin{aligned}f(x)&=1-x+x^2-x^3+\cdots-x^{99}+x^{100}\\ g(x)&=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{99}+x^{100}\end{aligned}$$

nema članova s neparnim potencijama od x.

Rješenje.
Grupiramo li kod oba polinoma posebno parne, a posebno neparne potencije i iskoristimo li formulu za razliku kvadrata, dobivamo

$$\begin{aligned}f(x)g(x)&=\left(1-x+x^2-x^3+\cdots-x^{99}+x^{100}\right)\left(1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{99}+x^{100}\right)=\\ &=\Big[\left(1+x^2+\cdots+x^{100}\right)-x\left(1+x^2+\cdots+x^{98}\right)\Big]\cdot\Big[\left(1+x^2+\cdots+x^{100}\right)+x\left(1+x^2+\cdots+x^{98}\right)\Big]=\\ &=\left(1+x^2+x^4+\cdots+x^{98}+x^{100}\right)^2-x^2\left(1+x^2+x^4+\cdots+x^{98}\right)^2.\end{aligned}$$

Iz posljednjeg zapisa je jasno da će nakon izvršenih operacija polinom $f(x)g(x)$ u kanonskom zapisu imati samo parne potencije od x.

Zadatak 14.
Odredite kvocijent i ostatak pri dijeljenju polinoma $f(x)=x^5-3x^3-5x$ s polinomom $g(x)=x^2-x+1$.

Rješenje.

$$\begin{array}{rrrrrrl}
(\;x^5 & & -\,3x^3 & & -\,5x & &):(x^2-x+1)=x^3+x^2-3x-4\\
-\,x^5 & +\,x^4 & -\;\;x^3 & & & & \\ \hline
 & x^4 & -\,4x^3 & & -\,5x & & \\
 & -\,x^4 & +\;\;x^3 & -\;\;x^2 & & & \\ \hline
 & & -\,3x^3 & -\;\;x^2 & -\,5x & & \\
 & & +\,3x^3 & -\,3x^2 & +\,3x & & \\ \hline
 & & & -\,4x^2 & -\,2x & & \\
 & & & +\,4x^2 & -\,4x & +\,4 & \\ \hline
 & & & & -\,6x & +\,4 &
\end{array}$$

Kvocijent je jednak $q(x)=x^3+x^2-3x-4$, a ostatak $r(x)=-6x+4$.

Teorem (Teorem o dijeljenju s ostatkom). *Za svaka dva polinoma $f, g \in \mathbb{R}[x]$, $g \neq 0$, postoje jedinstveni polinomi $q, r \in \mathbb{R}[x]$ takvi da vrijedi $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$ i $\operatorname{st} r < \operatorname{st} g$.*

Zadatak 15.
Koliki je ostatak pri dijeljenju polinoma $f(x) = x^{1987} - 2x + 5$ s polinomom $g(x) = x - 1$?

Rješenje.
Klasično dijeljenje bi ručno predugo trajalo. Međutim, nas samo zanima ostatak kojeg ćemo lagano odrediti pomoću teorema o dijeljenju s ostatkom. Prema tom teoremu postoje jedinstveni polinomi q i r takvi da je

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x), \quad \operatorname{st} r < \operatorname{st} g.$$

Uvrstimo li poznate podatke, dobivamo

$$x^{1987} - 2x + 5 = (x-1)q(x) + r(x), \quad \operatorname{st} r < 1.$$

Kako je $\operatorname{st} r < 1$, polinom r je zapravo konstanta, tj. $r(x) = C$ za neki $C \in \mathbb{R}$ pa je

$$x^{1987} - 2x + 5 = (x-1)q(x) + C. \tag{$\star$}$$

Jednakost ($\star$) mora vrijediti za svaki $x \in \mathbb{R}$ pa specijalno mora vrijediti za $x = 1$. Uvrstimo li $x = 1$ u ($\star$), dobivamo

$$1^{1987} - 2 \cdot 1 + 5 = 0 \cdot q(1) + C$$

iz čega slijedi da je $C = 4$. Dakle, ostatak pri dijeljenju polinoma f s polinomom g jednak je $r(x) = 4$.

Napomena. U prethodnom zadatku, kada smo uvrštavali $x = 1$, cilj nam je bio da nestane član koji sadrži kvocijent $q(x)$ jer o tom kvocijentu ništa konkretno ne možemo saznati iz teorema o dijeljenju s ostatkom, ali njegovim "uklanjanjem" možemo saznati koliki je ostatak. Općenito, u zadacima ovog tipa uvijek je ideja da umjesto varijable x uvrštavamo one vrijednosti za koje će član koji sadrži kvocijent $q(x)$ nestati, jer ćemo na taj način dobiti informaciju o ostatku.

Zadatak 16.
Odredite ostatak pri dijeljenju polinoma $f(x) = x^{77} + x^{55} + x^{33} + x^{11} + 1$ s polinomom $g(x) = x^2 - 1$.

Rješenje.
Prema teoremu o dijeljenju s ostatkom postoje jedinstveni polinomi q i r takvi da je

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x), \quad \operatorname{st} r < \operatorname{st} g.$$

Uvrstimo li poznate podatke, dobivamo

$$x^{77} + x^{55} + x^{33} + x^{11} + 1 = (x^2 - 1)q(x) + r(x), \quad \operatorname{st} r < 2.$$

Kako je $\operatorname{st} r < 2$, ostatak r je najviše prvog stupnja, tj. $r(x) = Ax + B$ za neke $A, B \in \mathbb{R}$ pa je

$$x^{77} + x^{55} + x^{33} + x^{11} + 1 = (x^2 - 1)q(x) + Ax + B.$$

Kako prethodna jednakost mora vrijediti za svaki $x \in \mathbb{R}$, specijalno mora vrijediti za $x = 1$ i $x = -1$ pa imamo

$$\begin{aligned} 1^{77} + 1^{55} + 1^{33} + 1^{11} + 1 &= \big(1^2 - 1\big)q(1) + A \cdot 1 + B \\ (-1)^{77} + (-1)^{55} + (-1)^{33} + (-1)^{11} + 1 &= \big((-1)^2 - 1\big)q(-1) + A \cdot (-1) + B \end{aligned}$$

Sređivanjem dobivamo sustav linearnih jednadžbi

$$\begin{aligned} A + B &= 5 \\ -A + B &= -3 \end{aligned}$$

koji ima jedinstveno rješenje $A = 4$, $B = 1$. Stoga je ostatak pri dijeljenju polinoma f s polinomom g jednak $r(x) = 4x + 1$.

Zadatak 17.
Nađite ostatak pri dijeljenju polinoma $f(x) = x^{100}+3x^{99}+x^2-3x+9$ s polinomom $g(x) = x^2+2x-3$.

Rješenje.
Prema teoremu o dijeljenju s ostatkom postoje jedinstveni polinomi q i r takvi da je

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x), \quad \operatorname{st} r < \operatorname{st} g.$$

Uvrstimo li poznate podatke, dobivamo

$$x^{100} + 3x^{99} + x^2 - 3x + 9 = (x^2 + 2x - 3)q(x) + r(x), \quad \operatorname{st} r < 2.$$

Kako je $\operatorname{st} r < 2$, ostatak r je najviše prvog stupnja, tj. $r(x) = Ax + B$ za neke $A, B \in \mathbb{R}$ pa je

$$x^{100} + 3x^{99} + x^2 - 3x + 9 = (x^2 + 2x - 3)q(x) + Ax + B.$$

Prethodna jednakost mora vrijediti za svaki $x \in \mathbb{R}$ pa specijalno mora vrijediti za $x = 1$ i $x = -3$.

$$\begin{aligned} 1^{100} + 3 \cdot 1^{99} + 1^2 - 3 \cdot 1 + 9 &= \big(1^2 + 2 \cdot 1 - 3\big)q(1) + A \cdot 1 + B \\ (-3)^{100} + 3 \cdot (-3)^{99} + (-3)^2 - 3 \cdot (-3) + 9 &= \big((-3)^2 + 2 \cdot (-3) - 3\big)q(-3) + A \cdot (-3) + B \end{aligned}$$

Sređivanjem dobivamo sustav linearnih jednadžbi

$$\begin{aligned} A + B &= 11 \\ -3A + B &= 27 \end{aligned}$$

koji ima jedinstveno rješenje $A = -4$, $B = 15$. Dakle, ostatak pri dijeljenju polinoma f s polinomom g jednak je $r(x) = -4x + 15$.

Zadatak 18.
Koliki je ostatak pri dijeljenju polinoma $f(x) = x^{100}+x^{99}+\cdots+x^2+x+1$ s polinomom $g(x) = x+1$?

Rješenje.
Prema teoremu o dijeljenju s ostatkom postoje jedinstveni polinomi q i r takvi da je

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x), \quad \operatorname{st} r < \operatorname{st} g.$$

Uvrstimo li poznate podatke, dobivamo

$$x^{100} + x^{99} + \cdots + x^2 + x + 1 = (x+1)q(x) + r(x), \quad \operatorname{st} r < 1.$$

Kako je $\operatorname{st} r < 1$, ostatak r je konstanta, tj. $r(x) = C$ za neki $C \in \mathbb{R}$ pa je

$$x^{100} + x^{99} + \cdots + x^2 + x + 1 = (x+1)q(x) + C.$$

Prethodna jednakost mora vrijediti za svaki $x \in \mathbb{R}$ pa specijalno vrijedi i za $x = -1$.

$$(-1)^{100} + (-1)^{99} + \cdots + (-1)^2 + (-1) + 1 = (-1+1)q(-1) + C$$

Dobivamo $C = 1$ pa je ostatak pri dijeljenju polinoma f s polinomom g jednak $r(x) = 1$.

Zadatak 19.
Odredite $a, b \in \mathbb{R}$ tako da polinom $f(x) = 2x^3 + ax^2 - 5x + b$ bude djeljiv s $g(x) = x^2 - x - 2$.

Rješenje.
Ako je polinom f djeljiv s polinomom g, tada je ostatak jednak 0.

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x)q(x) + 0 \\ 2x^3 + ax^2 - 5x + b &= \big(x^2 - x - 2\big)q(x) \end{aligned}$$

Uvrstimo li redom $x = -1$ i $x = 2$ u posljednju jednakost, slijedi

$$\begin{aligned} 2 \cdot (-1)^3 + a \cdot (-1)^2 - 5 \cdot (-1) + b &= \big((-1)^2 - (-1) - 2\big)q(-1) \\ 2 \cdot 2^3 + a \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 + b &= \big(2^2 - 2 - 2\big)q(2) \end{aligned}$$

Sređivanjem dobivamo sustav linearnih jednadžbi

$$\begin{aligned} a + b &= -3 \\ 4a + b &= -6 \end{aligned}$$

koji ima jedinstveno rješenje $a = -1$, $b = -2$.

Zadatak 20.
Ostatak pri dijeljenju polinoma $f(x)$ s polinomom $g_1(x) = x - 2$ jednak je 2, a s polinomom $g_2(x) = x - 3$ polinom $f(x)$ je djeljiv. Koliki je ostatak pri dijeljenju polinoma $f(x)$ s polinomom $g(x) = x^2 - 5x + 6$?

Rješenje.
Prema teoremu o dijeljenju s ostatkom, za polinome f i g postoje jedinstveni polinomi q i r takvi da vrijedi

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x), \quad \operatorname{st} r < \operatorname{st} g.$$

Uvrstimo li poznate podatke, dobivamo

$$f(x) = \big(x^2 - 5x + 6\big)q(x) + r(x), \quad \operatorname{st} r < 2.$$

Kako je $\operatorname{st} r < 2$, ostatak r je najviše prvog stupnja, tj. $r(x) = Ax + B$ za neke $A, B \in \mathbb{R}$ pa je

$$f(x) = \big(x^2 - 5x + 6\big)q(x) + Ax + B. \tag{$\clubsuit$}$$

Uvrstimo li u ($\clubsuit$) redom $x = 2$ i $x = 3$, dobivamo

$$\begin{aligned} f(2) &= \big(2^2 - 5 \cdot 2 + 6\big)q(2) + A \cdot 2 + B \\ f(3) &= \big(3^2 - 5 \cdot 3 + 6\big)q(3) + A \cdot 3 + B \end{aligned}$$

odnosno

$$\left.\begin{aligned} f(2) &= 2A + B \\ f(3) &= 3A + B \end{aligned}\right\} \tag{$\heartsuit$}$$

Nadalje, prema pretpostavci zadatka polinom $f(x)$ pri dijeljenju s polinomom $g_1(x) = x - 2$ daje ostatak 2 pa prema teoremu o dijeljenju s ostatkom postoji jedinstveni polinom q_1 takav da je

$$f(x) = (x - 2)q_1(x) + 2. \tag{$\diamondsuit$}$$

Isto tako, prema pretpostavci zadatka je polinom $f(x)$ djeljiv s polinomom $g_2(x) = x - 3$ pa prema teoremu o dijeljenju s ostatkom postoji jedinstveni polinom q_2 takav da je

$$f(x) = (x - 3)q_2(x). \tag{$\spadesuit$}$$

Uvrstimo li $x = 2$ u ($\diamondsuit$) i $x = 3$ u ($\spadesuit$), dobivamo

$$\begin{aligned} f(2) &= (2 - 2)q_1(2) + 2 \\ f(3) &= (3 - 3)q_2(3) \end{aligned}$$

iz čega slijedi da je $f(2) = 2$ i $f(3) = 0$. Uvrstimo li ove vrijednosti u ($\heartsuit$), dobivamo sustav linearnih jednadžbi

$$\begin{aligned} 2A + B &= 2 \\ 3A + B &= 0 \end{aligned}$$

koji ima jedinstveno rješenje $A = -2$, $B = 6$. Traženi ostatak jednak je $r(x) = -2x + 6$.

Zadatak 21.
Polinom $f(x)$ pri dijeljenju s polinomom $g_1(x) = x + 1$ daje ostatak 4, a pri dijeljenju s polinomom $g_2(x) = x^2 + 1$ ostatak $2x + 3$. Koliki je ostatak pri dijeljenju polinoma $f(x)$ s polinomom $g(x) = (x + 1)(x^2 + 1)$?

Rješenje.

Prema teoremu o dijeljenju s ostatkom, za polinome f i g postoje jedinstveni polinomi q i r takvi da vrijedi

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x), \quad \operatorname{st} r < \operatorname{st} g.$$

Uvrstimo li poznate podatke, dobivamo

$$f(x) = (x+1)(x^2+1)q(x) + r(x), \quad \operatorname{st} r < 3.$$

Kako je $\operatorname{st} r < 3$, ostatak r je najviše drugog stupnja, tj. $r(x) = Ax^2 + Bx + C$ za neke $A, B, C \in \mathbb{R}$ pa je

$$f(x) = (x+1)(x^2+1)q(x) + Ax^2 + Bx + C. \tag{$*$}$$

Polinom $x^2 + 1$ se ne može poništiti s realnim vrijednostima od x pa ćemo u $(*)$ umjesto varijable x morati uvrštavati i kompleksne vrijednosti. Ako u $(*)$ uvrstimo $x = -1$ i $x = i$, dobivamo

$$\begin{aligned} f(-1) &= (-1+1)\big((-1)^2+1\big)q(-1) + A\cdot(-1)^2 + B\cdot(-1) + C \\ f(i) &= (i+1)(i^2+1)q(i) + A\cdot i^2 + B\cdot i + C \end{aligned}$$

odnosno

$$\left.\begin{aligned} f(-1) &= A - B + C \\ f(i) &= -A + Bi + C \end{aligned}\right\} \tag{$\star$}$$

Prema pretpostavci zadatka polinom $f(x)$ pri dijeljenju s polinomom $g_1(x) = x + 1$ daje ostatak 4 pa prema teoremu o dijeljenju s ostatkom postoji jedinstveni polinom q_1 takav da je

$$f(x) = (x+1)q_1(x) + 4. \tag{$\circ$}$$

Nadalje, po pretpostavci polinom $f(x)$ pri dijeljenju s polinomom $g_2(x) = x^2+1$ daje ostatak $2x+3$ pa prema teoremu o dijeljenju s ostatkom postoji jedinstveni polinom q_2 takav da je

$$f(x) = (x^2+1)q_2(x) + 2x + 3. \tag{$\bullet$}$$

Uvrstimo li $x = -1$ u $(\circ)$ i $x = i$ u $(\bullet)$, dobivamo

$$\begin{aligned} f(-1) &= (-1+1)q_1(-1) + 4 \\ f(i) &= (i^2+1)q_2(i) + 2i + 3 \end{aligned}$$

iz čega slijedi da je $f(-1) = 4$ i $f(i) = 2i + 3$. Uvrstimo li ove vrijednosti u $(\star)$, dobivamo sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} A - B + C &= 4 \\ (C - A) + Bi &= 3 + 2i \end{aligned}$$

Kako su $A, B, C \in \mathbb{R}$, izjednačavanjem realnih i imaginarnih dijelova iz druge jednadžbe slijedi

$$\begin{aligned} C - A &= 3 \\ B &= 2 \end{aligned}$$

Uvrstimo $B = 2$ u jednadžbu $A - B + C = 4$ i dobivamo $A + C = 6$. Sada iz

$$\begin{aligned} C - A &= 3 \\ A + C &= 6 \end{aligned}$$

dobivamo $A = \frac{3}{2}$, $C = \frac{9}{2}$. Stoga je ostatak pri dijeljenju polinoma $f(x)$ s polinomom $g(x) = (x+1)(x^2+1)$ jednak je $r(x) = \frac{3}{2}x^2 + 2x + \frac{9}{2}$.

Teorem (Descartesov teorem)**.** *Broj $x = a$ je nultočka polinoma $f(x)$ ako i samo ako je $f(x)$ djeljiv s $x - a$.*

Zadatak 22.
Da li je polinom $f(x) = \left(x^2 + x - 1\right)^{2n} + \left(x^2 - x + 1\right)^{2n} - 2$ djeljiv s polinomom $g(x) = x^2 - x$?

Rješenje.
Iz Descartesovog teorema slijedi da je polinom f djeljiv s polinomom g ako i samo ako je svaka nultočka polinoma g ujedno i nultočka polinoma f. Jasno je da polinom g ima dvije nultočke $x_1 = 0$ i $x_2 = 1$. Provjerimo da su to ujedno i nultočke polinoma f.

$$\begin{aligned} f(0) &= (0+0-1)^{2n} + (0-0+1)^{2n} - 2 = (-1)^{2n} + 1 - 2 = 0 \\ f(1) &= (1+1-1)^{2n} + (1-1+1)^{2n} - 2 = 1 + 1 - 2 = 0 \end{aligned}$$

Dakle, svaka nultočka polinoma g je ujedno i nultočka polinoma f iz čega slijedi da je polinom f djeljiv s polinomom g.

Hornerov algoritam. Ako polinom $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ dijelimo s normiranim polinomom prvog stupnja $g(x) = x - a$, tada je kvocijent $q(x) = c_{n-1}x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} + \cdots + c_1 x + c_0$ polinom $n-1$ stupnja, a ostatak $r(x) = r$ je konstantni polinom koji je jednak vrijednosti polinoma f u točki a, tj. $r = f(a)$. Klasično računanje vrijednosti polinoma u nekoj točki ima složenost $O(n^2)$, dok Hornerov algoritam ima složenost $O(n)$. Koeficijente kvocijenta i ostatak pomoću Hornerovog algoritma dobivamo na sljedeći način.

$$\begin{aligned} c_{n-1} &= a_n \\ c_{n-2} &= a_{n-1} + ac_{n-1} \\ c_{n-3} &= a_{n-2} + ac_{n-2} \\ &\vdots \\ c_0 &= a_1 + ac_1 \\ r &= a_0 + ac_0 \end{aligned}$$

Kod rješavanja zadataka sve kratko zapisujemo u obliku tablice

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	a_1	a_0
a	c_{n-1}	c_{n-2}	c_{n-3}	$\cdots$	c_0	r

Zadatak 23.
Pomoću Hornerovog algoritma podijelite polinom $f(x) = 2x^5 - x^3 + x + 8$ s polinomom $g(x) = x - 2$.

Rješenje.
Kod polinoma f se ne javljaju potencije od x^4 i x^2, ali njih isto moramo uključiti u igru jer u tablici moraju pisati sve potencije od najveće do najmanje. Zapravo smo polinom f mogli napisati kao

$$f(x) = 2x^5 + 0 \cdot x^4 - x^3 + 0 \cdot x^2 + x + 8,$$

ali nije običaj da pišemo potencije uz koje stoji 0, tj. one kojih zapravo i nema.

	2	0	-1	0	1	8
2	2	4	7	14	29	66

Dakle, kada polinom f podijelimo s polinomom g dobijemo kvocijent $q(x) = 2x^4 + 4x^3 + 7x^2 + 14x + 29$ i ostatak $r(x) = 66$.

Zadatak 24.
Pomoću Hornerovog algoritma podijelite polinom $f(x) = 3x^3 + 2x^2$ s polinomom $g(x) = x + 2$.

Rješenje.
Ako napišemo sve potencije od najveće do najmanje u polinomu f, tada je

$$f(x) = 3x^3 + 2x^2 + 0 \cdot x + 0,$$

a polinom g je zapravo $g(x) = x - (-2)$ jer u općenitoj formuli imamo $x - a$, tj. "varijabla minus slobodni član".

	3	2	0	0
-2	3	-4	8	-16

Kada polinom f podijelimo s polinomom g dobijemo kvocijent $q(x) = 3x^2 - 4x + 8$ i ostatak $r(x) = -16$.

Napomena. Hornerov algoritam možemo primijeniti na dijeljenje polinoma jedino u slučaju ako polinom dijelimo s normiranim polinomom prvog stupnja. U ostalim slučajevima moramo koristiti klasično dijeljenje koje je pokazano u zadatku 14.

Zadatak 25.
Izračunajte vrijednost polinoma $f(x) = 4x^4 + 2x^2 + 1$ u točki 2 pomoću Hornerovog algoritma.

Rješenje.
Vrijednost polinoma f u točki 2 jednaka je ostatku pri dijeljenju polinoma f s polinomom $g(x) = x - 2$.

	4	0	2	0	1
2	4	8	18	36	73

Zaključujemo da je $f(2) = 73$.

Zadatak 26.
Broj $(1101001)_2$ napišite u dekadskom sustavu.

Rješenje.
Sjetimo se binarnog zapisa.

$$\left(a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0\right)_2 = a_n \cdot 2^n + a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 2 + a_0, \quad a_i \in \{0,1\},\ i = 0,1,\ldots,n$$

Ako je $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, tada je $\left(a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0\right)_2 = f(2)$.

	1	1	0	1	0	0	1
2	1	3	6	13	26	52	105

Stoga je $(1101001)_2 = 105$.

Zadatak 27.
Razvijte polinom $P(x) = x^4 - 8x^3 + 5x^2 + 2x - 7$ po potencijama od $x+2$.

Rješenje.
1. način: pomoću Hornerovog algoritma

U svakom koraku, počevši s polinomom P, dijelimo dobiveni kvocijent s $x+2$ dok ne dođemo do konstantnog polinoma. Ostaci kod tih dijeljenja predstavljaju koeficijente polinoma P raspisanog po potencijama od $x+2$.

	1	-8	5	2	-7
-2	1	-10	25	-48	$\boxed{89}$
-2	1	-12	49	$\boxed{-146}$	
-2	1	-14	$\boxed{77}$		
-2	1	$\boxed{-16}$			
-2	$\boxed{1}$				

Razvoj polinoma P po potencijama od $x+2$ je

$$P(x) = (x+2)^4 - 16(x+2)^3 + 77(x+2)^2 - 146(x+2) + 89.$$

2. način: pomoću derivacija

Znamo da vrijedi formula

$$P(x) = \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{P^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \cdots + \frac{P''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{P'(a)}{1!}(x-a) + P(a)$$

za svaki polinom P i svaki $a \in \mathbb{R}$. U našem slučaju je $a = -2$ i $n = 4$ pa slijedi

$$P(x) = \frac{P^{(4)}(-2)}{4!}(x+2)^4 + \frac{P^{(3)}(-2)}{3!}(x+2)^3 + \frac{P''(-2)}{2!}(x+2)^2 + \frac{P'(-2)}{1!}(x+2) + P(-2)$$

Dalje računamo derivacije i vrijednosti derivacija u točki $x = -2$.

$$\begin{aligned}
P(x) &= x^4 - 8x^3 + 5x^2 + 2x - 7 & P(-2) &= 89 \\
P'(x) &= 4x^3 - 24x^2 + 10x + 2 & P'(-2) &= -146 \\
P''(x) &= 12x^2 - 48x + 10 & P''(-2) &= 154 \\
P^{(3)}(x) &= 24x - 48 & P^{(3)}(-2) &= -96 \\
P^{(4)}(x) &= 24 & P^{(4)}(-2) &= 24
\end{aligned}$$

Stoga je

$$P(x) = \frac{24}{4!}(x+2)^4 + \frac{-96}{3!}(x+2)^3 + \frac{154}{2!}(x+2)^2 + \frac{-146}{1!}(x+2) + 89$$

odnosno

$$P(x) = (x+2)^4 - 16(x+2)^3 + 77(x+2)^2 - 146(x+2) + 89.$$

Euklidov algoritam. Najveća zajednička mjera dva polinoma A i B je normirani polinom $M(A, B)$ najvećeg stupnja s kojim su djeljiva oba polinoma A i B. Za određivanje najveće zajedničke mjere dva polinoma koristimo Euklidov algoritam. Taj algoritam u svakom novom koraku dijeli polinom s kojim se dijelilo u prethodnom koraku s dobivenim ostatkom iz tog koraka. Opisani postupak traje tako dugo dok kod dijeljenja ne dobijemo ostatak nula. U tom slučaju je normirani prethodni ostatak najveća zajednička mjera zadanih polinoma. Euklidov algoritam možemo pregledno zapisati na sljedeći način.

$$\begin{aligned}
A &= BQ_1 + R_1, & \text{st}\, R_1 &< \text{st}\, B \\
B &= R_1Q_2 + R_2, & \text{st}\, R_2 &< \text{st}\, R_1 \\
R_1 &= R_2Q_3 + R_3, & \text{st}\, R_3 &< \text{st}\, R_2 \\
&\vdots \\
R_{k-4} &= R_{k-3}Q_{k-2} + R_{k-2}, & \text{st}\, R_{k-2} &< \text{st}\, R_{k-3} \\
R_{k-3} &= R_{k-2}Q_{k-1} + R_{k-1}, & \text{st}\, R_{k-1} &< \text{st}\, R_{k-2} \\
R_{k-2} &= R_{k-1}Q_k
\end{aligned}$$

U tom slučaju je $M(A, B) = n(R_{k-1})$, gdje smo s $n(R_{k-1})$ naglasili da ostatak R_{k-1} treba normirati ukoliko nije normiran.

Teorem. *$M(A, B)$ je polinom minimalnog stupnja koji nije nulpolinom i za koji postoje polinomi P i Q takvi da vrijedi $AP + BQ = M(A, B)$.*

Zadatak 28.
Za polinome $A(x) = x^4 + 6x^3 + 17x^2 + 24x + 12$ i $B(x) = x^3 - 2x^2 - 13x - 10$ odredite polinome P i Q takve da vrijedi $AP + BQ = M(A, B)$.

Rješenje.

Najprije trebamo pomoću Euklidovog algoritma odrediti najveću zajedničku mjeru $M(A,B)$ polinoma A i B. U prvom koraku dijelimo polinom A s polinomom B.

$$\begin{array}{rrrrrl}
(\;x^4 & +\,6x^3 & +\,17x^2 & +\;\;24x & +\,12\,) & :(x^3-2x^2-13x-10) = x+8 \;\;\leftarrow Q_1 \\
-\,x^4 & +\,2x^3 & +\,13x^2 & +\;\;10x & & \\
\hline
 & 8x^3 & +\,30x^2 & +\;\;34x & +\,12 & \qquad\qquad A = BQ_1 + R_1 \\
 & -\;8x^3 & +\,16x^2 & +\,104x & +\,80 & \qquad\qquad Q_1(x) = x+8 \\
\hline
 & & 46x^2 & +\,138x & +\,92 & \leftarrow R_1 \qquad R_1(x) = 46x^2+138x+92
\end{array}$$

Kako je dobiveni ostatak R_1 različit od nule, prelazimo na drugi korak. U drugom koraku dijelimo polinom B (onaj polinom s kojim smo dijelili u prethodnom koraku) s ostatkom R_1 (dobiveni ostatak u prethodnom koraku).

$$\begin{array}{rrrrl}
(\;x^3 & -\;2x^2 & -\;13x & -\;10\,) & :(46x^2+138x+92) = \frac{1}{46}x - \frac{5}{46} \;\;\leftarrow Q_2 \\
-\,x^3 & -\;3x^2 & -\;\;2x & & \\
\hline
 & -\;5x^2 & -\;15x & -\;10 & \qquad\qquad B = R_1Q_2 + R_2 \\
 & +\;5x^2 & +\;15x & +\;10 & \qquad\qquad Q_2(x) = \frac{1}{46}x - \frac{5}{46} \\
\hline
 & & & 0 & \leftarrow R_2 \qquad\qquad R_2(x) = 0
\end{array}$$

Kako je dobiveni ostatak $R_2 = 0$, Euklidov algoritam završava. Najveća zajednička mjera polinoma A i B je normirani prethodni ostatak, tj. $M(A,B) = n(R_1)$. Dakle,

$$M(A,B) = n(46x^2+138x+92) = \frac{1}{46}R_1$$

odnosno (nakon što podijelimo svaki koeficijent s 46)

$$M(A,B) = x^2+3x+2.$$

Preostaje nam da još odredimo polinome P i Q takve da vrijedi $AP+BQ = M(A,B)$. U tu svrhu ispišimo sve korake Euklidovog algoritma. U našem slučaju smo imali samo dva koraka.

$$\begin{aligned} A &= BQ_1 + R_1 \\ B &= R_1Q_2 \end{aligned}$$

Uočimo predzadnju jednadžbu (u ovom slučaju je to baš prva jednadžba) jer je u njoj do na konstantu sadržana najveća zajednička mjera.

$$A = BQ_1 + R_1$$

$$A - BQ_1 = R_1 \,/\cdot \tfrac{1}{46}$$

$$\tfrac{1}{46}A - \tfrac{1}{46}Q_1B = \tfrac{1}{46}R_1$$

$$\tfrac{1}{46}A - \tfrac{1}{46}(x+8)B = M(A,B)$$

$$\tfrac{1}{46}A + \left(-\tfrac{1}{46}x - \tfrac{4}{23}\right)B = M(A,B)$$

Stoga je

$$P(x) = \frac{1}{46}, \quad Q(x) = -\frac{1}{46}x - \frac{4}{23}.$$

Zadatak 29.
Za polinome $A(x) = x^3 - 1$ i $B(x) = x^3 - x^2 + x - 1$ odredite polinome P i Q takve da vrijedi $AP + BQ = M(A, B)$.

Rješenje.
Najprije trebamo pomoću Euklidovog algoritma odrediti najveću zajedničku mjeru $M(A, B)$ polinoma A i B. U prvom koraku dijelimo polinom A s polinomom B.

$$\begin{array}{l} (\ x^3 \qquad\qquad\quad -\ 1\ ) : (x^3 - x^2 + x - 1) = 1 \ \leftarrow Q_1 \\ \underline{-\,x^3 \ +\ x^2 \ -\ x \ +\ 1 \qquad} \\ \qquad\quad x^2 \ -\ x \qquad\ \leftarrow R_1 \qquad\qquad A = BQ_1 + R_1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad Q_1(x) = 1, \quad R_1(x) = x^2 - x \end{array}$$

Kako je dobiveni ostatak R_1 različit od nule, prelazimo na drugi korak. U drugom koraku dijelimo polinom B (onaj polinom s kojim smo dijelili u prethodnom koraku) s ostatkom R_1 (dobiveni ostatak u prethodnom koraku).

$$\begin{array}{l} (\ x^3 \ -\ x^2 \ +\ x \ -\ 1\ ) : (x^2 - x) = x \ \leftarrow Q_2 \\ \underline{-\,x^3 \ +\ x^2 \qquad\qquad\qquad} \\ \qquad\qquad\quad x \ -\ 1 \ \leftarrow R_2 \qquad\qquad B = R_1Q_2 + R_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad Q_2(x) = x, \quad R_2(x) = x - 1 \end{array}$$

Kako je dobiveni ostatak R_2 različit od nule, prelazimo na treći korak. U trećem koraku dijelimo polinom R_1 (onaj polinom s kojim smo dijelili u prethodnom koraku) s ostatkom R_2 (dobiveni ostatak u prethodnom koraku).

$$\begin{array}{l} (\ x^2 \ -\ x\ ) : (x - 1) = x \ \leftarrow Q_3 \\ \underline{-\,x^2 \ +\ x \quad} \\ \qquad\quad 0 \ \leftarrow R_3 \qquad\qquad R_1 = R_2Q_3 + R_3 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad Q_3(x) = x, \quad R_3(x) = 0 \end{array}$$

Kako je dobiveni ostatak $R_3 = 0$, Euklidov algoritam završava. Najveća zajednička mjera polinoma A i B je normirani prethodni ostatak, tj. $M(A, B) = n(R_2)$. Dakle,

$$M(A, B) = n(x - 1) = x - 1.$$

Preostaje nam da još odredimo polinome P i Q takve da vrijedi $AP + BQ = M(A, B)$. U tu svrhu ispišimo sve korake Euklidovog algoritma. U našem slučaju smo imali tri koraka.

$$\begin{aligned} A &= BQ_1 + R_1 \\ B &= R_1Q_2 + R_2 \\ R_1 &= R_2Q_3 \end{aligned}$$

Krenemo od predzadnje jednadžbe $B = R_1Q_2 + R_2$ jer je u njoj do na konstantu sadržana najveća zajednička mjera.

$$\begin{aligned} B &= R_1Q_2 + R_2 \\ B - R_1Q_2 &= R_2 \\ B - R_1Q_2 &= M(A, B) \end{aligned}$$

Sada iz $A = BQ_1 + R_1$ slijedi $R_1 = A - BQ_1$ pa ako to uvrstimo u $B - R_1Q_2 = M(A,B)$, dobivamo

$$
\begin{aligned}
B - (A - BQ_1)Q_2 &= M(A,B)\\
B - AQ_2 + BQ_1Q_2 &= M(A,B)\\
-Q_2A + (1 + Q_1Q_2)B &= M(A,B)
\end{aligned}
$$

Iz Euklidovog algoritma znamo da je $Q_1(x) = 1$ i $Q_2(x) = x$ pa slijedi

$$-xA + (x+1)B = M(A,B).$$

Stoga je $P(x) = -x$ i $Q(x) = x + 1$.

Napomena. Kada želimo pronaći polinome P i Q za koje vrijedi $AP + BQ = M(A,B)$, tada najprije pomoću Euklidovog algoritma pronađemo najveću zajedničku mjeru $M(A,B)$ polinoma A i B. Zatim u Euklidovom algoritmu krenemo od predzadnje jednakosti jer je u njoj do na konstantu sadržana najveća zajednička mjera i korak po korak iz prethodnih jednakosti u Euklidovom algoritmu izrazimo ostatke R_i koje postepeno uvrštavamo u predzadnju jednakost tako dugo dok u njoj eksplicitno ne nestanu svi ostaci R_i. Usput, kako nestaju pojedini ostaci, u predzadnjoj jednakosti javljaju se kvocijenti Q_i umjesto kojih uvrštavamo konkretne polinome koji su dobiveni Euklidovim algoritmom. Nakon konačno mnogo koraka dobivamo jednakost u kojoj se nalaze polinomi A, B i $M(A,B)$ iz koje onda lagano očitamo tražene polinome P i Q.

Zadatak 30.
Skratite razlomak $\dfrac{2x^3 - 5x^2 + 9x - 9}{x^2 - x + 3}$.

Rješenje.
Najprije trebamo pronaći najveću zajedničku mjeru polinoma $A(x) = 2x^3 - 5x^2 + 9x - 9$ i $B(x) = x^2 - x + 3$, a nakon toga ćemo razlomak skratiti s tom najvećom zajedničkom mjerom. U prvom koraku Euklidovog algoritma dijelimo polinom A s polinomom B.

$$
\begin{array}{l}
(\ 2x^3 - 5x^2 + 9x - 9\ ) : (x^2 - x + 3) = 2x - 3 \quad \leftarrow Q_1\\
\underline{-\,2x^3 + 2x^2 - 6x\qquad\quad}\\
\qquad\ \ -\,3x^2 + 3x - 9\\
\qquad\ \ \underline{+\,3x^2 - 3x + 9}\\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0 \quad \leftarrow R_1
\end{array}
$$

Kako Euklidov algoritam završava već nakon prvog koraka, slijedi da je polinom A djeljiv s polinomom B pa je $M(A,B)$ jednaka normiranom polinomu B, tj.

$$M(A,B) = n(B) = n(x^2 - x + 3) = x^2 - x + 3.$$

Stoga je

$$\frac{2x^3 - 5x^2 + 9x - 9}{x^2 - x + 3} = 2x - 3.$$

Zadatak 31.
Skratite razlomak $\dfrac{3x^4 - x^3 - 3x^2 + 10x - 3}{4x^5 - x^4 - 4x^3 + 13x^2 - 3x}$.

Rješenje.
Najprije trebamo pronaći najveću zajedničku mjeru polinoma $A(x) = 4x^5 - x^4 - 4x^3 + 13x^2 - 3x$ i $B(x) = 3x^4 - x^3 - 3x^2 + 10x - 3$, a nakon toga ćemo razlomak skratiti s tom najvećom zajedničkom mjerom. U prvom koraku Euklidovog algoritma dijelimo polinom A s polinomom B.

$$
\begin{array}{rrrrrrl}
(\ 4x^5 & - \ x^4 & - \ 4x^3 & + \ 13x^2 & - \ 3x & &) : (3x^4 - x^3 - 3x^2 + 10x - 3) = \frac{4}{3}x + \frac{1}{9} \quad \leftarrow Q_1 \\
-\ 4x^5 & + \ \frac{4}{3}x^4 & + \ 4x^3 & - \ \frac{40}{3}x^2 & + \ 4x & & \\
\hline
 & \frac{1}{3}x^4 & & - \ \frac{1}{3}x^2 & + \ x & & \\
 & -\ \frac{1}{3}x^4 & + \ \frac{1}{9}x^3 & + \ \frac{1}{3}x^2 & - \ \frac{10}{9}x & + \ \frac{1}{3} & \\
\cline{2-6}
 & & \frac{1}{9}x^3 & & - \ \frac{1}{9}x & + \ \frac{1}{3} & \leftarrow R_1
\end{array}
$$

Kako je ostatak R_1 različit od nule, prelazimo na drugi korak. U drugom koraku dijelimo polinom B (onaj polinom s kojim smo dijelili u prethodnom koraku) s ostatkom R_1 (dobiveni ostatak u prethodnom koraku).

$$
\begin{array}{rrrrrl}
(\ 3x^4 & - \ x^3 & - \ 3x^2 & + \ 10x & - \ 3\ ) & : \left(\frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{9}x + \frac{1}{3}\right) = 27x - 9 \quad \leftarrow Q_2 \\
-\ 3x^4 & & + \ 3x^2 & - \ 9x & & \\
\hline
 & -\ x^3 & & + \ x & - \ 3 & \\
 & +\ x^3 & & - \ x & + \ 3 & \\
\cline{2-5}
 & & & & 0 & \leftarrow R_2
\end{array}
$$

Kako je dobiveni ostatak $R_2 = 0$, Euklidov algoritam završava. Najveća zajednička mjera polinoma A i B je normirani prethodni ostatak, tj. $M(A, B) = n(R_1)$. Dakle,

$$M(A, B) = n\left(\tfrac{1}{9}x^3 - \tfrac{1}{9}x + \tfrac{1}{3}\right) = x^3 - x + 3.$$

Zadani razlomak možemo najviše skratiti s $x^3 - x + 3$. Stoga brojnik i nazivnik dijelimo s $x^3 - x + 3$.

$$
\begin{array}{rrrrrl}
(\ 3x^4 & - \ x^3 & - \ 3x^2 & + \ 10x & - \ 3\ ) & : (x^3 - x + 3) = 3x - 1 \\
-\ 3x^4 & & + \ 3x^2 & - \ 9x & & \\
\hline
 & -\ x^3 & & + \ x & - \ 3 & \\
 & +\ x^3 & & - \ x & + \ 3 & \\
\cline{2-5}
 & & & & 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrrrrl}
(\ 4x^5 & - \ x^4 & - \ 4x^3 & + \ 13x^2 & - \ 3x\ ) & : (x^3 - x + 3) = 4x^2 - x \\
-\ 4x^5 & & + \ 4x^3 & - \ 12x^2 & & \\
\hline
 & -\ x^4 & & + \ x^2 & - \ 3x & \\
 & +\ x^4 & & - \ x^2 & + \ 3x & \\
\cline{2-5}
 & & & & 0 &
\end{array}
$$

Konačno, nakon kraćenja dobivamo

$$\frac{3x^4 - x^3 - 3x^2 + 10x - 3}{4x^5 - x^4 - 4x^3 + 13x^2 - 3x} = \frac{3x - 1}{4x^2 - x}.$$

Zadatak 32.

Da li se razlomak $\dfrac{x^4+x^3+1}{x^5+x+1}$ može skratiti? Objasnite.

Rješenje.

Najprije trebamo pronaći najveću zajedničku mjeru polinoma $A(x)=x^5+x+1$ i $B(x)=x^4+x^3+1$. U prvom koraku Euklidovog algoritma dijelimo polinom A s polinomom B.

$$
\begin{array}{rrrrl}
(\ x^5 & & & +\ x\ +\ 1\ ) & : (x^4+x^3+1) = x-1 \ \leftarrow Q_1 \\
-\,x^5 & -\,x^4 & & -\ x & \\ \hline
 & -\,x^4 & & +\ 1 & \\
 & +\,x^4 & +\,x^3 & +\ 1 & \\ \cline{2-4}
 & & x^3 & +\ 2 & \leftarrow R_1
\end{array}
$$

Kako je ostatak R_1 različit od nule, prelazimo na drugi korak. U drugom koraku dijelimo polinom B (onaj polinom s kojim smo dijelili u prethodnom koraku) s ostatkom R_1 (dobiveni ostatak u prethodnom koraku).

$$
\begin{array}{rrrrl}
(\ x^4 & +\,x^3 & & +\ 1\ ) & : (x^3+2) = x+1 \ \leftarrow Q_2 \\
-\,x^4 & & -\ 2x & & \\ \hline
 & x^3 & -\ 2x & +\ 1 & \\
 & -\,x^3 & & -\ 2 & \\ \cline{2-4}
 & & -\ 2x & -\ 1 & \leftarrow R_2
\end{array}
$$

Kako je ostatak R_2 različit od nule, prelazimo na treći korak. U trećem koraku dijelimo polinom R_1 (onaj polinom s kojim smo dijelili u prethodnom koraku) s ostatkom R_2 (dobiveni ostatak u prethodnom koraku).

$$
\begin{array}{rrrrl}
(\ x^3 & & & +\ 2\ ) & : (-2x-1) = -\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x-\frac{1}{8} \ \leftarrow Q_3 \\
-\,x^3 & -\,\frac{1}{2}x^2 & & & \\ \hline
 & -\,\frac{1}{2}x^2 & & +\ 2 & \\
 & +\,\frac{1}{2}x^2 & +\ \frac{1}{4}x & & \\ \cline{2-4}
 & & \frac{1}{4}x & +\ 2 & \\
 & & -\ \frac{1}{4}x & -\ \frac{1}{8} & \\ \cline{3-4}
 & & & \frac{15}{8} & \leftarrow R_3
\end{array}
$$

Kako je ostatak R_3 različit od nule, prelazimo na četvrti korak. U četvrtom koraku dijelimo polinom R_2 (onaj polinom s kojim smo dijelili u prethodnom koraku) s ostatkom R_3 (dobiveni ostatak u prethodnom koraku).

$$
\begin{array}{rrl}
(-\ 2x & -\ 1\ ) & : \frac{15}{8} = -\frac{16}{15}x-\frac{8}{15} \ \leftarrow Q_4 \\
+\,2x & & \\ \hline
 & -\ 1 & \\
 & +\ 1 & \\ \hline
 & 0 & \leftarrow R_4
\end{array}
$$

Kako je dobiveni ostatak $R_4=0$, Euklidov algoritam završava. Najveća zajednička mjera polinoma A i B je normirani prethodni ostatak, tj. $M(A,B)=n(R_3)$. Dakle,

$$M(A,B)=n\left(\tfrac{15}{8}\right)=1.$$

Kako je $M(A, B) = 1$, zadani razlomak se ne može više skratiti, tj. on je već do kraja skraćen.

Zadatak 33.
Zadan je polinom $P(x) = 2x^5 + ax^4 + bx^2 - 7$.

a) Da li postoje $a, b \in \mathbb{R}$ tako da su -1 i 1 nultočke polinoma $P(x)$?

b) Odredite $a, b \in \mathbb{R}$ tako da polinom $P(x)$ pri dijeljenju s $x - 1$ daje ostatak 2, a pri dijeljenju s $x - 2$ daje ostatak 61.

Rješenje.
a) Prema uvjetu zadatka želimo da je $P(-1) = 0$ i $P(1) = 0$.

$$P(-1) = 0 \;\Rightarrow\; 2 \cdot (-1)^5 + a \cdot (-1)^4 + b \cdot (-1)^2 - 7 = 0$$
$$P(1) = 0 \;\Rightarrow\; 2 \cdot 1^5 + a \cdot 1^4 + b \cdot 1^2 - 7 = 0$$

Dobivamo sustav linearnih jednažbi

$$a + b = 9$$
$$a + b = 5$$

koji očito nema rješenja. Dakle, ne postoje $a, b \in \mathbb{R}$ za koje bi -1 i 1 istovremeno bile nultočke polinoma $P(x)$.

b) Prema teoremu o dijeljenju s ostatkom i uvjetima zadatka mora vrijediti

$$P(x) = (x - 1)q_1(x) + 2$$
$$P(x) = (x - 2)q_2(x) + 61$$

za neke polinome q_1 i q_2. Iz toga slijedi

$$2x^5 + ax^4 + bx^2 - 7 = (x - 1)q_1(x) + 2$$
$$2x^5 + ax^4 + bx^2 - 7 = (x - 2)q_2(x) + 61$$

Uvrstimo li $x = 1$ u prvu jednakost i $x = 2$ u drugu jednakost, dobivamo

$$2 \cdot 1^5 + a \cdot 1^4 + b \cdot 1^2 - 7 = (1 - 1)q_1(1) + 2$$
$$2 \cdot 2^5 + a \cdot 2^4 + b \cdot 2^2 - 7 = (2 - 2)q_2(2) + 61$$

odnosno

$$a + b = 7$$
$$4a + b = 1$$

Gornji sustav ima jedinstveno rješenje $a = -2$, $b = 9$.

Zadatak 34.
Riješite jednadžbu $5x^3 - 9x^2 - x - 2 = 0$.

Rješenje.
Ako jednadžba ima cjelobrojnih rješenja, tada ta rješenja moraju biti djelitelji slobodnog člana. U našem slučaju je slobodni član jednak -2 pa su kandidati za cjelobrojna rješenja brojevi

$$1, -1, 2, -2.$$

Pomoću Hornerovog algoritma dobivamo da je $x_1 = 2$ jedno rješenje.

	5	−9	−1	−2
2	5	1	1	0

Stoga se početna jednadžba može faktorizirati kao

$$(x-2)(5 \cdot x^2 + 1 \cdot x + 1) = 0,$$

odnosno

$$(x-2)(5x^2 + x + 1) = 0.$$

Preostaje nam da riješimo još kvadratnu jednadžbu $5x^2 + x + 1 = 0$ iz koje dobivamo preostala dva rješenja.

$$\begin{aligned} 5x^2 + x + 1 &= 0 \\ x_{2,3} &= \frac{-1 \pm \sqrt{1-20}}{10} \\ x_{2,3} &= \frac{-1 \pm i\sqrt{19}}{10} \end{aligned}$$

Dakle, sva rješenja početne jednadžbe su

$$x_1 = 2, \quad x_2 = \frac{-1 + i\sqrt{19}}{10}, \quad x_3 = \frac{-1 - i\sqrt{19}}{10}.$$

Zadatak 35.
Riješite jednadžbu $2x^4 + 13x^3 + 25x^2 + 15x + 9 = 0$.

Rješenje.
Kandidati za cjelobrojna rješenja su djelitelji slobodnog člana. U ovom slučaju su to brojevi

$$1, -1, 3, -3, 9, -9.$$

Hornerovim algoritmom dobivamo da je $x_1 = -3$ jedno rješenje.

	2	13	25	15	9
−3	2	7	4	3	0

Stoga se početna jednadžba može faktorizirati kao

$$\big(x-(-3)\big)(2x^3+7x^2+4x+3)=0,$$

odnosno

$$(x+3)(2x^3+7x^2+4x+3)=0.$$

Dalje nastavljamo s rješavanjem jednadžbe

$$2x^3+7x^2+4x+3=0, \tag{1}$$

čija rješenja su ujedno i rješenja od početne jednadžbe. Kandidati za cjelobrojna rješenja su brojevi $1,-1,3,-3$. Hornerovim algoritmom dobivamo da je $x_2=-3$ rješenje jednadžbe (1).

	2	7	4	3
-3	2	1	1	0

Iz dobivenog slijedi da se jednadžba (1) može faktorizirati kao

$$\big(x-(-3)\big)(2x^2+x+1)=0,$$

odnosno

$$(x+3)(2x^2+x+1)=0.$$

Stoga se početna jednadžba može dalje faktorizirati kao

$$(x+3)^2(2x^2+x+1)=0.$$

Konačno, preostaje nam da još riješimo kvadratnu jednadžbu $2x^2+x+1=0$, a njezina rješenja su $x_3=\frac{-1+i\sqrt{7}}{4}$ i $x_4=\frac{-1-i\sqrt{7}}{4}$. Dakle, sva rješenja početne jednadžbe su

$$x_1=-3,\quad x_2=-3,\quad x_3=\frac{-1+i\sqrt{7}}{4},\quad x_4=\frac{-1-i\sqrt{7}}{4}.$$

Uočavamo da je -3 dvostruko rješenje, tj. dvostruka nultočka pripadnog polinoma.

Kada imamo puno kandidata za cjelobrojna rješenja, tada nam sljedeći teorem pomaže da eliminiramo brzo čim više kandidata.

Teorem. *Ako je $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ polinom s cjelobrojnim koeficijentima i $\alpha\in\mathbb{Z}$ korijen jednadžbe $f(x)=0$, tada je za svaki $k\in\mathbb{Z}$ broj $f(k)$ djeljiv s $\alpha-k$.*

U zadacima ćemo zapravo koristiti kontrapoziciju tog teorema, tj. ako za neki $k\in\mathbb{Z}$ broj $f(k)$ neće biti djeljiv s $\alpha-k$, tada ćemo zaključiti da kandidat $\alpha\in\mathbb{Z}$ nije cjelobrojni korijen promatrane jednadžbe.

Zadatak 36.
Riješite jednadžbu $x^3 + 3x^2 - 9x - 20 = 0$.

Rješenje.
Kandidati za cjelobrojna rješenja su djelitelji broja -20, tj. brojevi

$$1, -1, 2, -2, 4, -4, 5, -5, 10, -10, 20, -20.$$

Iskoristimo sada prethodni teorem da brzo eliminiramo iz razmatranja neke kandidate. Ako uzmemo $k = 1$, tada je $f(k) = f(1) = -25$. Za svaki od cjelobrojnih kandidata α ispod njega napišemo broj $\alpha - k$, tj. u našem slučaju $\alpha - 1$ pa dobivamo

$$\begin{array}{rcccccccccccc} \alpha: & 1, & -1, & 2, & -2, & 4, & -4, & 5, & -5, & 10, & -10, & 20, & -20 \\ \alpha - 1: & 0, & -2, & 1, & -3, & 3, & -5, & 4, & -6, & 9, & -11, & 19, & -21 \end{array}$$

Sada pogledamo s kojima od brojeva $\alpha - 1$ broj $f(1) = -25$ nije djeljiv. Ti brojevi su dolje označeni crvenom bojom.

$$\begin{array}{rcccccccccccc} \alpha: & 1, & -1, & 2, & -2, & 4, & -4, & 5, & -5, & 10, & -10, & 20, & -20 \\ \alpha - 1: & \color{red}{0,} & \color{red}{-2,} & 1, & \color{red}{-3,} & \color{red}{3,} & -5, & \color{red}{4,} & \color{red}{-6,} & \color{red}{9,} & \color{red}{-11,} & \color{red}{19,} & \color{red}{-21} \end{array}$$

Za svaki od crvenih brojeva $\alpha - 1$, eliminiramo njegov pripadni broj α. Eliminirani brojevi α su dolje označeni plavom bojom.

$$\begin{array}{rcccccccccccc} \alpha: & \color{blue}{1,} & \color{blue}{-1,} & 2, & \color{blue}{-2,} & \color{blue}{4,} & -4, & \color{blue}{5,} & \color{blue}{-5,} & \color{blue}{10,} & \color{blue}{-10,} & \color{blue}{20,} & \color{blue}{-20} \\ \alpha - 1: & \color{red}{0,} & \color{red}{-2,} & 1, & \color{red}{-3,} & \color{red}{3,} & -5, & \color{red}{4,} & \color{red}{-6,} & \color{red}{9,} & \color{red}{-11,} & \color{red}{19,} & \color{red}{-21} \end{array}$$

Nakon ovog postupka nam preostaju brojevi 2 i -4 kao jedini kandidati za cjelobrojna rješenja zadane jednadžbe. Hornerovim algoritmom lagano nalazimo da je $x_1 = -4$ jedno rješenje.

	1	3	-9	-20
-4	1	-1	-5	0

Stoga se početna jednadžba može faktorizirati kao

$$\big(x - (-4)\big)(x^2 - x - 5) = 0,$$

odnosno

$$(x + 4)(x^2 - x - 5) = 0.$$

Rješavanjem kvadratne jednadžbe $x^2 - x - 5 = 0$ dobivamo preostala dva rješenja $x_2 = \frac{1+\sqrt{21}}{2}$ i $x_3 = \frac{1-\sqrt{21}}{2}$. Dakle, sva rješenja početne jednadžbe su

$$x_1 = -4, \quad x_2 = \frac{1 + \sqrt{21}}{2}, \quad x_3 = \frac{1 - \sqrt{21}}{2}.$$

Napomena. U prethodnom zadatku smo uzeli $k = 1$. Možemo odabrati bilo koji cijeli broj k, a ideja je da (ukoliko je to moguće) uzmemo onaj k tako da broj $f(k)$ ima čim manje djelitelja jer ćemo na taj način u jednom koraku eliminirati puno kandidata. Isto tako, taj postupak možemo ponavljati više puta za različite odabire $k \in \mathbb{Z}$.

Zadatak 37.
Riješite jednadžbu $x^4 - 12x^3 - 44x^2 - 12x - 45 = 0$.

Rješenje.
Kandidati za cjelobrojna rješenja su djelitelji broja -45, tj. brojevi

$$1, -1, 3, -3, 5, -5, 9, -9, 15, -15, 45, -45.$$

Ako uzmemo $k = 1$, tada je $f(k) = f(1) = -112$. Za svaki od cjelobrojnih kandidata α ispod njega napišemo broj $\alpha - k$, tj. u našem slučaju $\alpha - 1$ pa dobivamo

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrrrr} \alpha: & 1, & -1, & 3, & -3, & 5, & -5, & 9, & -9, & 15, & -15, & 45, & -45 \\ \alpha-1: & 0, & -2, & 2, & -4, & 4, & -6, & 8, & -10, & 14, & -16, & 44, & -46 \end{array}$$

Sada pogledamo s kojima od brojeva $\alpha - 1$ broj $f(1) = -112$ nije djeljiv. Ti brojevi su dolje označeni crvenom bojom.

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrrrr} \alpha: & 1, & -1, & 3, & -3, & 5, & -5, & 9, & -9, & 15, & -15, & 45, & -45 \\ \alpha-1: & 0, & -2, & 2, & -4, & 4, & -6, & 8, & -10, & 14, & -16, & 44, & -46 \end{array}$$

Za svaki od crvenih brojeva $\alpha - 1$, eliminiramo njegov pripadni broj α. Eliminirani brojevi α su dolje označeni plavom bojom.

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrrrr} \alpha: & 1, & -1, & 3, & -3, & 5, & -5, & 9, & -9, & 15, & -15, & 45, & -45 \\ \alpha-1: & 0, & -2, & 2, & -4, & 4, & -6, & 8, & -10, & 14, & -16, & 44, & -46 \end{array}$$

Nakon ovog postupka nam preostanu sljededeći kandidati za cjelobrojna rješenja:

$$-1, 3, -3, 5, 9, 15, -15.$$

Nastavimo dalje postupak eliminacije preostalih kandidata. Odaberimo, npr. $k = -2$. Tada je $f(k) = f(-2) = -85$. Za svaki od preostalih cjelobrojnih kandidata α ispod njega napišemo broj $\alpha - k$, tj. u našem slučaju $\alpha + 2$ pa dobivamo

$$\begin{array}{rrrrrrrr} \alpha: & -1, & 3, & -3, & 5, & 9, & 15, & -15 \\ \alpha+2: & 1, & 5, & -1, & 7, & 11, & 17, & -13 \end{array}$$

Sada pogledamo s kojima od brojeva $\alpha + 2$ broj $f(-2) = -85$ nije djeljiv. Ti brojevi su dolje označeni crvenom bojom.

$$\begin{array}{rrrrrrrr} \alpha: & -1, & 3, & -3, & 5, & 9, & 15, & -15 \\ \alpha+2: & 1, & 5, & -1, & 7, & 11, & 17, & -13 \end{array}$$

Za svaki od crvenih brojeva $\alpha + 2$, eliminiramo njegov pripadni broj α. Eliminirani brojevi α su dolje označeni plavom bojom.

$$\begin{array}{rrrrrrrr} \alpha: & -1, & 3, & -3, & 5, & 9, & 15, & -15 \\ \alpha+2: & 1, & 5, & -1, & 7, & 11, & 17, & -13 \end{array}$$

Nakon ovog koraka nam preostanu još samo četiri kandidata za cjelobrojna rješenja: $-1, 3, -3, 15$. Mogli bismo dalje nastaviti postupak eliminacije tako da odaberemo neki $k \in \mathbb{Z} \setminus \{1, -2\}$. Međutim, kako nemamo više tako puno kandidata, možemo završiti s tim postupkom. Hornerovim algoritmom lagano dobivamo da je $x_1 = -3$ jedno rješenje zadane jednadžbe.

	1	−12	−44	−12	−45
−3	1	−15	1	−15	0

Stoga se početna jednadžba može faktorizirati kao

$$(x+3)(x^3 - 15x^2 + x - 15) = 0.$$

Dalje rješavamo jednadžbu

$$x^3 - 15x^2 + x - 15 = 0. \tag{2}$$

Kandidati za cjelobrojna rješenja su djelitelji slobodnog člana -15, tj. brojevi

$$1, -1, 3, -3, 5, -5, 15, -15.$$

Kako brojevi $1, 5, -5, -15$ nisu rješenja početne jednadžbe (već smo ih ranije eliminirali iz razmatranja), tada ovi brojevi sigurno nisu rješenja jednadžbe (2) jer je svako rješenje jednadžbe (2) ujedno i rješenje početne jednadžbe (jednadžba (2) je "sadržana" unutar početne jednadžbe). Stoga preostaje da su jedini kandidati za cjelobrojna rješenja jednadžbe (2) brojevi $-1, 3, -3, 15$. Hornerovim algoritmom se lagano dobiva da je $x_2 = 15$ rješenje od (2), a onda i od početne jednadžbe.

	1	−15	1	−15
15	1	0	1	0

Stoga se (2) može faktorizirati u obliku

$$(x-15)(x^2+1) = 0,$$

a početna jednadžba

$$(x+3)(x-15)(x^2+1) = 0.$$

Konačno, rješavanjem kvadratne jednadžbe $x^2 + 1 = 0$ dobivamo preostala dva rješenja $x_3 = i$ i $x_4 = -i$. Dakle, sva rješenja početne jednadžbe su

$$x_1 = -3, \quad x_2 = 15, \quad x_3 = i, \quad x_4 = -i.$$

Zadatak 38.
Riješite jednadžbu $2x^3 - x^2 + 10x - 5 = 0$.

Rješenje.
Kandidati za cjelobrojna rješenja su djelitelji slobodnog člana -5, tj. brojevi $-1, 1, 5, -5$. Međutim, lagano se provjeri da niti jedan od tih kandidata nije rješenje. Stoga zadana jednadžba nema cjelobrojnih rješenja. Prelazimo na traženje racionalnih rješenja. Sjetimo se, ako je $\frac{p}{q}$ racionalno rješenje, tada je p djelitelj slobodnog koeficijenta, a q je djelitelj vodećeg koeficijenta.

$$\begin{aligned} \text{djelitelji slobodnog koeficijenta: } & 1, -1, 5, -5 \\ \text{djelitelji vodećeg koeficijenta: } & 1, -1, 2, -2 \end{aligned}$$

Stoga je $p \in \{1, -1, 5, -5\}$, $q \in \{1, 2\}$. Dovoljno je uzeti samo pozitivne kandidate za q jer se svaki racionalni broj uvijek može napisati s pozitivnim nazivnikom. Nakon svih mogućih kombinacija dobivamo sljedeće kandidate za racionalna rješenja:

$$\frac{p}{q}: \ \frac{1}{1}, \ \frac{-1}{1}, \ \frac{5}{1}, \ \frac{-5}{1}, \ \frac{1}{2}, \ \frac{-1}{2}, \ \frac{5}{2}, \ \frac{-5}{2}.$$

Međutim, prva četiri kandidata su cijeli brojevi, a za njih smo već vidjeli da nisu rješenja pa nam preostanu još samo četiri kandidata za racionalna rješenja:

$$\frac{1}{2}, \ \frac{-1}{2}, \ \frac{5}{2}, \ \frac{-5}{2}.$$

Hornerovim algoritmom dobivamo da je $x_1 = \frac{1}{2}$ jedno rješenje početne jednadžbe.

	2	−1	10	−5
$\frac{1}{2}$	2	0	10	0

Stoga se početna jednadžba može faktorizirati u obliku

$$\left(x - \tfrac{1}{2}\right)\left(2x^2 + 10\right) = 0.$$

Konačno, rješavanjem kvadratne jednadžbe $2x^2 + 10 = 0$ dobivamo preostala dva rješenja $x_2 = i\sqrt{5}$ i $x_3 = -i\sqrt{5}$. Dakle, sva rješenja početne jednadžbe su

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = i\sqrt{5}, \quad x_3 = -i\sqrt{5}.$$

Kada imamo puno kandidata za racionalna rješenja, tada nam sljedeći teorem pomaže da eliminiramo brzo čim više kandidata.

Teorem. *Ako je $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ polinom s cjelobrojnim koeficijentima i $\alpha = \frac{p}{q}$ racionalni korijen jednadžbe $f(x) = 0$, tada je za svaki $k \in \mathbb{Z}$ broj $f(k)$ djeljiv s $p - kq$.*

U zadacima ćemo zapravo koristiti kontrapoziciju tog teorema, tj. ako za neki $k \in \mathbb{Z}$ broj $f(k)$ neće biti djeljiv s $p - kq$, tada ćemo zaključiti da kandidat $\alpha = \frac{p}{q}$ nije racionalni korijen promatrane jednadžbe.

Zadatak 39.
Riješite jednadžbu $8x^5 - 4x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 5x - 1 = 0$.

Rješenje.
Ako je $\frac{p}{q}$ racionalno rješenje, tada je p djelitelj slobodnog koeficijenta, a q je djelitelj vodećeg koeficijenta.

$$\text{djelitelji slobodnog koeficijenta: } 1, -1$$
$$\text{djelitelji vodećeg koeficijenta: } 1, -1, 2, -2, 4, -4, 8, -8$$

Stoga je $p \in \{1, -1\}$, $q \in \{1, 2, 4, 8\}$. Dovoljno je uzeti samo pozitivne kandidate za q jer se svaki racionalni broj uvijek može napisati s pozitivnim nazivnikom. Nakon svih mogućih kombinacija dobivamo sljedeće kandidate za racionalna rješenja:

$$\frac{p}{q}: \frac{1}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{-1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{-1}{8}.$$

Ako uzmemo $k = 1$, tada je $f(k) = f(1) = 3$. Za svaki od racionalnih kandidata $\frac{p}{q}$ ispod njega napišemo broj $p - kq$, tj. u našem slučaju $p - q$ pa dobivamo

$$\begin{array}{rcccccccc} \frac{p}{q}: & \frac{1}{1}, & \frac{-1}{1}, & \frac{1}{2}, & \frac{-1}{2}, & \frac{1}{4}, & \frac{-1}{4}, & \frac{1}{8}, & \frac{-1}{8} \\ p-q: & 0, & -2, & -1, & -3, & -3, & -5, & -7, & -9 \end{array}$$

Sada pogledamo s kojima od brojeva $p - q$ broj $f(1) = 3$ nije djeljiv. Ti brojevi su dolje označeni crvenom bojom.

$$\begin{array}{rcccccccc} \frac{p}{q}: & \frac{1}{1}, & \frac{-1}{1}, & \frac{1}{2}, & \frac{-1}{2}, & \frac{1}{4}, & \frac{-1}{4}, & \frac{1}{8}, & \frac{-1}{8} \\ p-q: & \color{red}{0,} & \color{red}{-2,} & -1, & -3, & -3, & \color{red}{-5,} & \color{red}{-7,} & \color{red}{-9} \end{array}$$

Za svaki od crvenih brojeva $p - q$, eliminiramo njegov pripadni broj $\frac{p}{q}$. Eliminirani brojevi $\frac{p}{q}$ su dolje označeni plavom bojom.

$$\begin{array}{rcccccccc} \frac{p}{q}: & \color{blue}{\frac{1}{1}}, & \color{blue}{\frac{-1}{1}}, & \frac{1}{2}, & \frac{-1}{2}, & \frac{1}{4}, & \color{blue}{\frac{-1}{4}}, & \color{blue}{\frac{1}{8}}, & \color{blue}{\frac{-1}{8}} \\ p-q: & \color{red}{0,} & \color{red}{-2,} & -1, & -3, & -3, & \color{red}{-5,} & \color{red}{-7,} & \color{red}{-9} \end{array}$$

Nakon ovog koraka nam preostanu sljedeći kandidati za racionalna rješenja:

$$\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{4}.$$

Hornerovim algoritmom dobivamo da je $x_1 = \frac{1}{2}$ jedno rješenje početne jednadžbe.

	8	−4	2	−7	5	−1
$\frac{1}{2}$	8	0	2	−6	2	0

Stoga se početna jednadžba može faktorizirati u obliku

$$\begin{aligned} \left(x - \tfrac{1}{2}\right)\left(8x^4 + 0 \cdot x^3 + 2x^2 - 6x + 2\right) &= 0 \\ \left(x - \tfrac{1}{2}\right)\left(8x^4 + 2x^2 - 6x + 2\right) &= 0 \\ 2\left(x - \tfrac{1}{2}\right)\left(4x^4 + x^2 - 3x + 1\right) &= 0 \\ \left(2x - 1\right)\left(4x^4 + x^2 - 3x + 1\right) &= 0. \end{aligned}$$

Dalje nastavljamo s rješavanjem jednadžbe

$$4x^4 + x^2 - 3x + 1 = 0. \tag{3}$$

Kandidati za racionalna rješenja su brojevi

$$1, -1, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{-1}{4}.$$

Već smo ranije iz razmatranja eliminirali brojeve $1, -1, \frac{-1}{4}$ pa nam preostanu samo brojevi $\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{4}$ kao kandidati za racionalna rješenja od (3). Hornerovim algoritmom dobivamo da je $x_2 = \frac{1}{2}$ rješenje od (3), a to je također rješenje i od početne jednadžbe.

	4	0	1	−3	1
$\frac{1}{2}$	4	2	2	−2	0

Stoga se jednadžba (3) može faktorizirati u obliku

$$\begin{aligned} \left(x - \tfrac{1}{2}\right)\left(4x^3 + 2x^2 + 2x - 2\right) &= 0 \\ 2\left(x - \tfrac{1}{2}\right)\left(2x^3 + x^2 + x - 1\right) &= 0 \\ \left(2x - 1\right)\left(2x^3 + x^2 + x - 1\right) &= 0. \end{aligned}$$

Početna jednadžba se u ovom trenutku može faktorizirati kao

$$\left(2x - 1\right)^2\left(2x^3 + x^2 + x - 1\right) = 0$$

pa dalje nastavljamo s rješavanjem jednadžbe

$$2x^3 + x^2 + x - 1 = 0. \tag{4}$$

Kandidati za racionalna rješenja su brojevi

$$1,\ -1,\ \frac{1}{2},\ \frac{-1}{2}.$$

Kako smo brojeve 1 i -1 već ranije eliminirali iz razmatranja, ostaju nam samo kandidati $\frac{1}{2}$ i $\frac{-1}{2}$. Hornerovim algoritmom dobivamo da je $x_3 = \frac{1}{2}$ rješenje od (4), a to je ujedno i rješenje od početne jednadžbe.

	2	1	1	−1
$\frac{1}{2}$	2	2	2	0

Stoga se jednadžba (4) može faktorizirati u obliku

$$\begin{aligned} \left(x - \tfrac{1}{2}\right)\left(2x^2 + 2x + 2\right) &= 0 \\ 2\left(x - \tfrac{1}{2}\right)\left(x^2 + x + 1\right) &= 0 \\ \left(2x - 1\right)\left(x^2 + x + 1\right) &= 0. \end{aligned}$$

Početnu jednadžbu zbog toga možemo faktorizirati u obliku

$$\left(2x - 1\right)^3\left(x^2 + x + 1\right) = 0.$$

Rješavanjem kvadratne jednadžbe $x^2 + x + 1 = 0$ dobivamo preostala dva rješenja $x_4 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ i $x_5 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$. Dakle, sva rješenja početne jednadžbe su

$$x_1 = \frac{1}{2},\quad x_2 = \frac{1}{2},\quad x_3 = \frac{1}{2},\quad x_4 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2},\quad x_5 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Uočite da je $\frac{1}{2}$ trostruko rješenje, odnosno trostruka nultočka pripadnog polinoma.

Zadatak 40.
Dokažite da je $\sqrt{7}$ iracionalni broj.

Rješenje.
Iz definicije drugog korijena slijedi da je $\sqrt{7}$ rješenje jednadžbe $x^2 - 7 = 0$. Ako bi $\sqrt{7}$ bio racionalni broj, tada bi se on morao nalaziti među kandidatima za racionalna rješenja jednadžbe $x^2 - 7 = 0$. Međutim, jedini kandidati za racionalna rješenja su brojevi $1, -1, 7, -7$. Očito je da $\sqrt{7}$ nije jednak niti jednom od tih kandidata pa je stoga $\sqrt{7}$ iracionalni broj.

Zadatak 41.
Bez upotrebe kalkulatora i računala izračunajte $\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}$.

Rješenje.
Neka je $x = \sqrt[3]{9+4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}$. Tada slijedi

$$x = \sqrt[3]{9+4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9-4\sqrt{5}} \quad \Big/^{3}$$

$$x^3 = 9 + 4\sqrt{5} + 3\sqrt[3]{(9+4\sqrt{5})^2}\,\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}} + 3\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}\,\sqrt[3]{(9-4\sqrt{5})^2} + 9 - 4\sqrt{5}$$

$$x^3 = 18 + 3\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}\,\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}} \cdot \left(\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}\right)$$

$$x^3 = 18 + 3\sqrt[3]{81-80} \cdot \Big(\underbrace{\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}}_{x}\Big)$$

$$x^3 = 18 + 3x$$

Dakle, dobili smo da je broj $\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}$ rješenje jednadžbe $x^3 - 3x - 18 = 0$. Pronađimo sva rješenja ove jednadžbe. Hornerovim algoritmom lagano dobivamo da je $x_1 = 3$ jedno rješenje.

	1	0	−3	−18
3	1	3	6	0

Stoga jednadžbu $x^3 - 3x - 18 = 0$ možemo faktorizirati u obliku $(x-3)(x^2+3x+6) = 0$. Rješavanjem kvadratne jednadžbe $x^2 + 3x + 6 = 0$ dobivamo preostala dva rješenja $x_2 = \frac{-3+i\sqrt{15}}{2}$ i $x_3 = \frac{-3-i\sqrt{15}}{2}$. Dakle, sva rješenja jednadžbe $x^3 - 3x - 18 = 0$ su

$$x_1 = 3, \quad x_2 = \frac{-3+i\sqrt{15}}{2}, \quad x_3 = \frac{-3-i\sqrt{15}}{2}.$$

Kako je $\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}$ također rješenje promatrane jednadžbe, on mora biti jednak nekom od gornja tri rješenja. Jasno je da je $\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}$ realni broj pa slijedi da je

$$\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9-4\sqrt{5}} = 3.$$

Zadatak 42.
Izračunajte $\left(i-\sqrt{3}\right)^{13}$.

Rješenje.
Koristit ćemo Moivreovu formulu za potenciranje kompleksnih brojeva. Ako je $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, tada je $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$. Da bismo mogli upotrijebiti tu formulu, moramo najprije kompleksni broj $z = -\sqrt{3}+i$ pretvoriti u trigonometrijski oblik.

$$r = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x} = \frac{1}{-\sqrt{3}} \Rightarrow \varphi = \operatorname{arctg}\frac{-1}{\sqrt{3}} + \pi \Rightarrow \varphi = \frac{5}{6}\pi$$

Korištenjem Moivreove formule dobivamo

$$\begin{aligned}
\left(i-\sqrt{3}\right)^{13} &= \left[2\left(\cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi\right)\right]^{13} = \\
&= 2^{13}\left(\cos\left(13\cdot\frac{5}{6}\pi\right) + i\sin\left(13\cdot\frac{5}{6}\pi\right)\right) = \\
&= 2^{13}\left(\cos\frac{65}{6}\pi + i\sin\frac{65}{6}\pi\right) = \\
&= 2^{13}\left(\cos\left(\frac{5}{6}\pi + 10\pi\right) + i\sin\left(\frac{5}{6}\pi + 10\pi\right)\right) = \\
&= 2^{13}\left(\cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi\right) = \\
&= 2^{13}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -2^{12}\sqrt{3} + 2^{12}i
\end{aligned}$$

Napomena. U prethodnom zadatku smo iz jednakosti $\operatorname{tg}\varphi = \frac{-1}{\sqrt{3}}$ zaključili da je $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{-1}{\sqrt{3}} + \pi$. Objasnimo zašto je bilo potrebno dodati broj π. Poznato nam je da funkcija tangens nije bijekcija na svojoj prirodnoj domeni pa zbog toga nema inverznu funkciju. Međutim, pogledamo li restrikciju funkcije tangens na interval $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle$, tada je funkcija

$$\operatorname{tg} : \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle \to \mathbb{R}$$

bijekcija pa ima inverznu funkciju koju zovemo arkustangens i označavamo s arctg. Dakle, funkcija

$$\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \to \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle$$

svaki realni broj preslikava u neki broj unutar intervala $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle$, tj. vraća samo kutove između $-\frac{\pi}{2}$ i $\frac{\pi}{2}$ radijana. U zadatku smo imali kompleksni broj $z = -\sqrt{3}+i$ koji se nalazi u drugom kvadrantu pa mora biti $\varphi \in \left\langle \frac{\pi}{2}, \pi\right\rangle$. Međutim, $\operatorname{arctg}\frac{-1}{\sqrt{3}}$ je kut u četvrtom kvadrantu, tj. $\operatorname{arctg}\frac{-1}{\sqrt{3}} \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, 0\right\rangle$, pa kad njemu dodamo π radijana dobivamo kut φ u drugom kvadrantu za koji isto vrijedi da je $\operatorname{tg}\varphi = \frac{-1}{\sqrt{3}}$ jer je temeljni period funkcije tangens jednak π.

Zadatak 43.
Riješite jednadžbu $z^3 + i = 0$.

Rješenje.
U ovom zadatku će nam trebati Moivreova formula za korjenovanje kompleksnih brojeva. Ako je $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, tada je

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Iz $z^3 + i = 0$ slijedi da je $z^3 = -i$ pa je $z = \sqrt[3]{-i}$. Kako je

$$-i = \cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi, \quad r = 1,\ \varphi = \frac{3}{2}\pi,$$

prema Moivreovoj formuli za korjenovanje slijedi

$$z_k = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi}{3}\right), \quad k = 0, 1, 2$$

odnosno

$$z_k = \cos\frac{3\pi + 4k\pi}{6} + i\sin\frac{3\pi + 4k\pi}{6}, \quad k = 0, 1, 2.$$

Konačno, uvrštavanjem pojedinih k-ova dobivamo

$$\begin{aligned} z_0 &= \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} \\ z_1 &= \cos\frac{7}{6}\pi + i\sin\frac{7}{6}\pi \\ z_2 &= \cos\frac{11}{6}\pi + i\sin\frac{11}{6}\pi \end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned} z_0 &= i \\ z_1 &= -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \\ z_2 &= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \end{aligned}$$

Uočite da se u prethodnom zadatku kompleksna rješenja ne pojavljuju u konjugiranim parovima zato jer nemamo algebarsku jednadžbu s realnim koeficijentima (slobodni član i nije realni broj, dok ostali koeficijenti u toj jednadžbi jesu realni brojevi). Međutim, ukoliko se radi o algebarskoj jednadžbi s realnim koeficijentima, tada se kompleksna rješenja pojavljuju u konjugiranim parovima.

Teorem. *Ako je $x_0 = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ korijen algebarske jednadžbe $f(x) = 0$ s realnim koeficijentima, tada je $\bar{x}_0 = a - bi$ također korijen te jednadžbe.*

Zadatak 44.
Odredite sve nultočke polinoma $f(x) = x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x - 3$ ako se zna da je $f(i) = 0$.

Rješenje.
Zapravo treba riješiti algebarsku jednadžbu $x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x - 3 = 0$. Kako se radi o algebarskoj jednadžbi s realnim koeficijentima i kako znamo da je $x_1 = i$ jedno njezino rješenje, tada prema prethodnom teoremu možemo zaključiti da je $x_2 = -i$ također rješenje promatrane jednadžbe. Da bismo dobili preostala dva rješenja moramo polinom $f(x)$ podijeliti s polinomom $(x - i)(x + i) = x^2+1$. Prema Descartesovom teoremu znamo da moramo dobiti ostatak nula, no ne smijemo koristiti Hornerov algoritam jer se taj algoritam koristi samo u slučaju da polinom dijelimo s normiranim polinomom prvog stupnja, što ovdje nije slučaj.

$$
\begin{array}{rrrrrl}
(\ x^4 & +\ 2x^3 & -\ 2x^2 & +\ 2x & -\ 3\ ) & : (x^2+1) = x^2 + 2x - 3 \\
-\ x^4 & & -\ x^2 & & & \\
\hline
& 2x^3 & -\ 3x^2 & +\ 2x & -\ 3 & \\
& -\ 2x^3 & & -\ 2x & & \\
\cline{2-5}
& & -\ 3x^2 & & -\ 3 & \\
& & +\ 3x^2 & & +\ 3 & \\
\cline{3-5}
& & & & 0 &
\end{array}
$$

Isto tako, umjesto da polinom $f(x)$ dijelimo s polinomom $x^2 + 1$, možemo najprije polinom $f(x)$ podijeliti s polinomom $x - i$, a zatim dobiveni kvocijent dalje podijeliti s polinomom $x + i$. U oba slučaja dijelimo s normiranim polinomom prvog stupnja pa smijemo u oba dijeljenja koristiti Hornerov algoritam. Kratko taj postupak možemo zapisati pomoću tablice

	1	2	-2	2	-3
i	1	$2+i$	$-3+2i$	$-3i$	0
$-i$	1	2	-3	0	

Kojim god načinom dijelili, dobivamo da se početna jednadžba može faktorizirati u obliku

$$(x^2 + 1)(x^2 + 2x - 3) = 0.$$

Rješavanjem kvadratne jednadžbe $x^2+2x-3 = 0$ dobivamo preostala dva rješenja $x_3 = 1$ i $x_4 = -3$. Dakle, nultočke polinoma f su brojevi i, $-i$, 1, -3.

Zadatak 45.
Odredite sve nultočke polinoma $f(x) = (-1 + i)x^4 + (1 + i)x^3 + ix + 1$ ako je poznato da je $x = i$ jedna njegova nultočka, pri čemu je $i = \sqrt{-1}$.

Rješenje.
Zapravo trebamo riješiti algebarsku jednadžbu $(-1 + i)x^4 + (1 + i)x^3 + ix + 1 = 0$. Znamo da je $x = i$ jedno rješenje. Kako nemamo algebarsku jednadžbu s realnim koeficijentima, tada ne možemo zaključiti da je $x = -i$ također rješenje. Kod algebarske jednadžbe s kompleksnim koeficijentima kompleksna rješenja se ne pojavljuju u konjugiranim parovima. Hornerovim algoritmom dobivamo

	$-1+i$	$1+i$	0	i	1
i	$-1+i$	0	0	i	0

iz čega slijedi da se početna jednadžba može faktorizirati u obliku

$$(x-i)\big((-1+i)x^3+i\big)=0.$$

Preostala tri rješenja dobit ćemo rješavanjem jednadžbe $(-1+i)x^3+i=0$.

$$\begin{aligned}
(-1+i)x^3+i&=0\\
(-1+i)x^3&=-i\\
x^3&=\frac{-i}{-1+i}\\
x^3&=\frac{-i}{-1+i}\cdot\frac{-1-i}{-1-i}\\
x^3&=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\\
x&=\sqrt[3]{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i}
\end{aligned}$$

Sada trebamo pomoću Moivreove formule izračunati treći korijen iz kompleksnog broja $z=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$. Najprije moramo taj broj pretvoriti u trigonometrijski oblik (uočite, opet trebamo kod računanja kuta dodati π jer se promatrani kompleksni broj nalazi u drugom kvadrantu).

$$r=\sqrt{\Big(-\frac{1}{2}\Big)^2+\Big(\frac{1}{2}\Big)^2}=\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{y}{x}=\frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}}=-1\ \Rightarrow\ \varphi=\operatorname{arctg}(-1)+\pi\ \Rightarrow\ \varphi=\frac{3}{4}\pi$$

Stoga je

$$x_k=\sqrt[3]{\sqrt{\frac{1}{2}}}\left(\cos\frac{\frac{3}{4}\pi+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{3}{4}\pi+2k\pi}{3}\right),\quad k=0,1,2.$$

Nakon uvrštavanja pojedinih k-ova dobivamo

$$\begin{aligned}
x_0&=\frac{1}{\sqrt[6]{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\\
x_1&=\frac{1}{\sqrt[6]{2}}\left(\cos\frac{11}{12}\pi+i\sin\frac{11}{12}\pi\right)\\
x_2&=\frac{1}{\sqrt[6]{2}}\left(\cos\frac{19}{12}\pi+i\sin\frac{19}{12}\pi\right)
\end{aligned}$$

Dakle, sve nultočke polinoma $f(x)$ su

$$x_0=\frac{1}{\sqrt[6]{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right),\ x_1=\frac{1}{\sqrt[6]{2}}\left(\cos\frac{11}{12}\pi+i\sin\frac{11}{12}\pi\right),\ x_2=\frac{1}{\sqrt[6]{2}}\left(\cos\frac{19}{12}\pi+i\sin\frac{19}{12}\pi\right),\ x_3=i.$$

Teorem. *Ako je $\alpha+\beta i$ cjelobrojni kompleksni korijen ($\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$) jednadžbe $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ s cjelobrojnim koeficijentima, tada je $\alpha^2+\beta^2$ djelitelj slobodnog člana a_0.*

Zadatak 46.
Riješite jednadžbu $x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 14x + 10 = 0$.

Rješenje.
Kandidati za cjelobrojna rješenja su djelitelji slobodnog člana 10, tj. brojevi

$$1, -1, 2, -2, 5, -5, 10, -10.$$

Ako uzmemo $k = 2$, tada je $f(k) = f(2) = 10$. Za svaki od cjelobrojnih kandidata α ispod njega napišemo broj $\alpha - k$, tj. u našem slučaju $\alpha - 2$ pa dobivamo

$$\begin{array}{rcccccccc} \alpha: & 1, & -1, & 2, & -2, & 5, & -5, & 10, & -10 \\ \alpha-2: & -1, & -3, & 0, & -4, & 3, & -7, & 8, & -12 \end{array}$$

Sada pogledamo s kojima od brojeva $\alpha - 2$ broj $f(2) = 10$ nije djeljiv. Ti brojevi su dolje označeni crvenom bojom.

$$\begin{array}{rcccccccc} \alpha: & 1, & -1, & 2, & -2, & 5, & -5, & 10, & -10 \\ \alpha-2: & -1, & \color{red}{-3,} & \color{red}{0,} & \color{red}{-4,} & \color{red}{3,} & \color{red}{-7,} & \color{red}{8,} & \color{red}{-12} \end{array}$$

Za svaki od crvenih brojeva $\alpha - 2$, eliminiramo njegov pripadni broj α. Eliminirani brojevi α su dolje označeni plavom bojom.

$$\begin{array}{rcccccccc} \alpha: & 1, & \color{blue}{-1,} & \color{blue}{2,} & \color{blue}{-2,} & \color{blue}{5,} & \color{blue}{-5,} & \color{blue}{10,} & \color{blue}{-10} \\ \alpha-2: & -1, & \color{red}{-3,} & \color{red}{0,} & \color{red}{-4,} & \color{red}{3,} & \color{red}{-7,} & \color{red}{8,} & \color{red}{-12} \end{array}$$

Nakon ovog postupka nam preostane samo broj 1 kao kandidat za cjelobrojno rješenje. Međutim, lagano se provjeri da niti on nije rješenje. Dakle, zadana jednadžba nema cjelobrojnih rješenja. Kako je vodeći koeficijent jednak 1, jednadžba nema niti racionalnih rješenja (jer u nazivniku mogu biti samo djelitelji vodećeg koeficijenta, a to je u ovom slučaju samo broj 1 pa bismo s njime opet za kandidate dobili samo cijele brojeve). U ovom slučaju nam jedino još preostane da potražimo cjelobrojna kompleksna rješenja. Pozitivne djelitelje $1, 2, 5, 10$ od slobodnog člana moramo najprije napisati kao sumu kvadrata cijelih brojeva na sve moguće načine (može se dogoditi da neki od djelitelja nije moguće napisati kao sumu kvadrata cijelih brojeva, ali u ovom zadatku to neće biti slučaj).

$$\begin{aligned}
1 &= 0^2 + 1^2 = 0^2 + (-1)^2 \\
2 &= 1^2 + 1^2 = 1^2 + (-1)^2 = (-1)^2 + 1^2 = (-1)^2 + (-1)^2 \\
5 &= 1^2 + 2^2 = 1^2 + (-2)^2 = (-1)^2 + 2^2 = (-1)^2 + (-2)^2 = \\
&= 2^2 + 1^2 = 2^2 + (-1)^2 = (-2)^2 + 1^2 = (-2)^2 + (-1)^2 \\
10 &= 1^2 + 3^2 = 1^2 + (-3)^2 = (-1)^2 + 3^2 = (-1)^2 + (-3)^2 = \\
&= 3^2 + 1^2 = 3^2 + (-1)^2 = (-3)^2 + 1^2 = (-3)^2 + (-1)^2
\end{aligned}$$

Od napisanih suma kvadrata $\alpha^2+\beta^2$ formiramo cjelobrojne kompleksne kandidate $\alpha+\beta i$ pa dobivamo ukupno 22 kandidata za cjelobrojna kompleksna rješenja.

$$i,\ -i,\ 1+i,\ 1-i,\ -1+i,\ -1-i,\ 1+2i,\ 1-2i,\ -1+2i,\ -1-2i,\ 2+i,\ 2-i,$$
$$-2+i,\ -2-i,\ 1+3i,\ 1-3i,\ -1+3i,\ -1-3i,\ 3+i,\ 3-i,\ -3+i,\ -3-i$$

Hornerovim algoritmom dobivamo da je $x_1=1+i$ jedno rješenje. Kako imamo jednadžbu s realnim koeficijentima, tada je $x_2=1-i$ također rješenje (kompleksna rješenja se pojavljuju u konjugiranim parovima kod jednadžbe s realnim koeficijentima).

	1	-4	11	-14	10
$1+i$	1	$-3+i$	$7-2i$	$-5+5i$	0
$1-i$	1	-2	5	0	

Stoga se početna jednadžba može faktorizirati u obliku

$$\big(x-(1+i)\big)\big(x-(1-i)\big)\big(x^2-2x+5\big)=0.$$

Rješavanjem kvadratne jednadžbe $x^2-2x+5=0$ dobivamo preostala dva rješenja $x_3=1+2i$ i $x_4=1-2i$. Dakle, sva rješenja početne jednadžbe su

$$x_1=1+i,\quad x_2=1-i,\quad x_3=1+2i,\quad x_4=1-2i.$$

Zadatak 47.
Jednadžba $8x^4-76x^3+270x^2-425x+250=0$ ima jedan trostruki korijen. Odredite sva rješenja ove jednadžbe.

Rješenje.
Neka je

$$f(x)=8x^4-76x^3+270x^2-425x+250.$$

Ako je x_0 trostruka nultočka polinoma $f(x)$, tada vrijedi

$$f(x_0)=0,\quad f'(x_0)=0,\quad f''(x_0)=0,\quad f'''(x_0)\neq 0.$$

Deriviranjem dobivamo

$$\begin{aligned} f'(x)&=32x^3-228x^2+540x-425\\ f''(x)&=96x^2-456x+540\\ f'''(x)&=192x-456 \end{aligned}$$

Kako je u zadatku navedeno da polinom $f(x)$ ima trostruku nultočku, tada ta nultočka mora biti i nultočka od prve i druge derivacije tog polinoma. Najlakše nam je pronaći nultočke od $f''(x)$, a tada jedna od tih nultočki mora biti ujedno i nultočka od $f(x)$ i $f'(x)$ jer u protivnom zadatak ne bi bio dobro zadan. Rješavanjem kvadratne jednadžbe $96x^2-456x+540=0$ dobivamo $x_1=\frac{9}{4}$ i $x_2=\frac{5}{2}$. Direktnom provjerom dobivamo

$$f\left(\frac{5}{2}\right)=0,\quad f'\left(\frac{5}{2}\right)=0,\quad f''\left(\frac{5}{2}\right)=0,\quad f'''\left(\frac{5}{2}\right)\neq 0$$

pa je $\frac{5}{2}$ trostruki korijen zadane jednadžbe, tj. $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{5}{2}$. Sada moramo faktorizirati polinom $f(x)$, a to možemo napraviti na dva načina. Prvi način je da polinom $f(x)$ klasično podijelimo s polinomom $\left(x-\frac{5}{2}\right)^3$, ili pak možemo uzastopce tri puta Hornerovim algoritmom dijeliti s polinomom $x - \frac{5}{2}$. Pokazat ćemo oba načina. Kako je

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^3 = x^3 - \frac{15}{2}x^2 + \frac{75}{4}x - \frac{125}{8}$$

dobivamo

$$\begin{array}{l} (\ 8x^4 - 76x^3 + 270x^2 - 425x + 250\,) : \left(x^3 - \frac{15}{2}x^2 + \frac{75}{4}x - \frac{125}{8}\right) = 8x - 16 \\ \underline{-8x^4 + 60x^3 - 150x^2 + 125x} \\ \qquad -16x^3 + 120x^2 - 300x + 250 \\ \qquad \underline{+16x^3 - 120x^2 + 300x - 250} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 \end{array}$$

Drugi način, preko Hornerovog algoritma

	8	−76	270	−425	250
$\frac{5}{2}$	8	−56	130	−100	0
$\frac{5}{2}$	8	−36	40	0	
$\frac{5}{2}$	8	−16	0		

Kojim god načinom radili, dobivamo da se početna jednadžba može faktorizirati u obliku

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^3 (8x - 16) = 0.$$

Rješavanjem linearne jednadžbe $8x - 16 = 0$ dobivamo preostalo rješenje $x_4 = 2$. Dakle, sva rješenja početne jednadžbe su

$$x_1 = \frac{5}{2}, \quad x_2 = \frac{5}{2}, \quad x_3 = \frac{5}{2}, \quad x_4 = 2.$$

Teorem (Vieteove formule)**.** *Neka je* $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ *polinom s kompleksnim koeficijentima, a* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *njegove nultočke. Tada vrijedi*

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \cdots + x_n &= -\frac{a_{n-1}}{a_n} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n &= \frac{a_{n-2}}{a_n} \\ &\vdots \\ x_1x_2\cdots x_n &= (-1)^n \frac{a_0}{a_n} \end{aligned}$$

Zadatak 48.
Odredite $a, b \in \mathbb{R}$ tako da jednadžba $x^3 + ax^2 + 4x + b = 0$ ima jedno rješenje 2, a razlika preostalih dvaju rješenja jest 2.

Rješenje.
Neka su x_1, x_2, x_3 rješenja jednadžbe $x^3 + ax^2 + 4x + b = 0$. Prema uvjetu zadatka mora biti

$$x_1 = 2, \quad x_2 - x_3 = 2. \tag{5}$$

Prema Vieteovim formulama vrijedi

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -a \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 &= 4. \\ x_1x_2x_3 &= -b \end{aligned}$$

Uvrstimo li (5) u prethodni sustav jednadžbi, dobivamo

$$\begin{aligned} 2 + x_2 + (x_2 - 2) &= -a \\ 2x_2 + 2(x_2 - 2) + x_2(x_2 - 2) &= 4, \\ 2x_2(x_2 - 2) &= -b \end{aligned}$$

odnosno nakon sređivanja

$$\begin{aligned} a &= -2x_2 \\ 0 &= x_2^2 + 2x_2 - 8. \\ b &= -2x_2(x_2 - 2) \end{aligned} \tag{6}$$

Rješavanjem kvadratne jednadžbe $x_2^2 + 2x_2 - 8 = 0$ dobivamo $(x_2)_1 = 2$ i $(x_2)_2 = -4$ pa uvrštavanjem u prvu i treću jednadžbu od (6) dobivamo dva moguća rješenja za brojeve a i b:

$$a_1 = -4,\ b_1 = 0 \qquad \text{ili} \qquad a_2 = 8,\ b_2 = -48.$$

Zadatak 49.
Jednadžba $x^6 - 3x^5 + 12x^4 - 21x^3 + 47x^2 - 36x + 60 = 0$ ima dva para čisto imaginarnih rješenja. Odredite sva rješenja zadane jednadžbe.

Rješenje.
Za kompleksni broj z kažemo da je čisto imaginarni ako vrijedi $\operatorname{Re} z = 0$ i $\operatorname{Im} z \neq 0$, tj. ako je oblika $z = ai$ za neki $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Znamo da zadana jednadžba ima čisto imaginarnih rješenja pa uvrstimo li $x = ai$ u početnu jednadžbu, dobivamo

$$\begin{gathered} a^6i^6 - 3a^5i^5 + 12a^4i^4 - 21a^3i^3 + 47a^2i^2 - 36ai + 60 = 0 \\ -a^6 - 3a^5i + 12a^4 + 21a^3i - 47a^2 - 36ai + 60 = 0 \\ \big(-a^6 + 12a^4 - 47a^2 + 60\big) + \big(-3a^5 + 21a^3 - 36a\big)i = 0 \end{gathered}$$

Kako je $a \in \mathbb{R}$, iz definicije jednakosti kompleksnih brojeva slijedi

$$-a^6 + 12a^4 - 47a^2 + 60 = 0 \tag{7}$$

$$-3a^5 + 21a^3 - 36a = 0 \tag{8}$$

Pogledajmo jednadžbu (8). Kako je $a \neq 0$, smijemo tu jednadžbu podijeliti s $-3a$ pa dobivamo bikvadratnu jednadžbu

$$a^4 - 7a^2 + 12 = 0.$$

Uvođenjem supstitucije $a^2 = t$ dobivamo kvadratnu jednadžbu $t^2 - 7t + 12 = 0$, čija rješenja su $t_1 = 4$ i $t_2 = 3$. Iz toga slijedi da je $a^2 = 4$ ili $a^2 = 3$ pa dobivamo

$$a_1 = 2, \quad a_2 = -2, \quad a_3 = \sqrt{3}, \quad a_4 = -\sqrt{3}.$$

Lagano se provjeri da ta rješenja također zadovoljavaju i jednadžbu (7). Moramo na ovom mjestu biti oprezni jer mi zapravo rješavamo sustav koji se sastoji od jednadžbi (7) i (8), a do sada smo samo gledali jednadžbu (8) pa smo dužni provjeriti da li sva dobivena rješenja za a-ove zadovoljavaju i jednadžbu (7). Mogli bismo lukavo taj korak provjeravanja i izbjeći pozivajući se na navedene uvjete u zadatku. Naime, u zadatku piše da jednadžba ima dva para čisto imaginarnih rješenja, a mi smo upravo dobili četiri mogućnosti za a-ove koje će nam dati dva para čisto imaginarnih rješenja. Kada neki od dobivenih a-ova ne bi zadovoljavao jednadžbu (7), tada zadatak ne bi bio dobro zadan. Ovdje nam navedena informacija o ukupnom broju čisto imaginarnih rješenja zapravo omogućuje da izbjegnemo provjeravanje jednadžbe (7), ali moramo biti svjesni tih činjenica. Da smo dobili više od četiri mogućnosti za a-ove ili da nije pisalo koliko zapravo imamo čisto imaginarnih rješenja, tada bismo morali provjeravati da li dobivena rješenja zadovoljavaju jednadžbu (7). Ona rješenja od (8) koja eventualno ne bi zadovoljavala jednadžbu (7), otpala bi iz daljnjeg razmatranja. Dakle, u ovom trenutku smo dobili četiri rješenja

$$x_1 = 2i, \quad x_2 = -2i, \quad x_3 = \sqrt{3}i, \quad x_4 = -\sqrt{3}i.$$

Sada polinom $f(x) = x^6 - 3x^5 + 12x^4 - 21x^3 + 47x^2 - 36x + 60$ trebamo podijeliti s polinomom

$$(x-2i)(x+2i)\big(x-\sqrt{3}i\big)\big(x+\sqrt{3}i\big) = (x^2+4)(x^2+3) = x^4 + 7x^2 + 12.$$

To možemo provesti na dva načina. Prvi način je da klasično podijelimo polinom $f(x)$ s polinomom $x^4 + 7x^2 + 12$, a drugi način je da uzastopce četiri puta zaredom dijelimo s polinomima $x - 2i$, $x + 2i$, $x - \sqrt{3}i$, $x + \sqrt{3}i$ pomoću Hornerovog algoritma. Pokazat ćemo oba načina.

$$
\begin{array}{rrrrrrrl}
(x^6 & - 3x^5 & + 12x^4 & - 21x^3 & + 47x^2 & - 36x & + 60\,) & : (x^4 + 7x^2 + 12) = x^2 - 3x + 5 \\
- x^6 & & - 7x^4 & & - 12x^2 & & & \\
\hline
& - 3x^5 & + 5x^4 & - 21x^3 & + 35x^2 & - 36x & + 60 & \\
& + 3x^5 & & + 21x^3 & & + 36x & & \\
\hline
& & 5x^4 & & + 35x^2 & & + 60 & \\
& & - 5x^4 & & - 35x^2 & & - 60 & \\
\hline
& & & & & & 0 &
\end{array}
$$

Drugi način, pomoću Hornerovog algoritma

	1	-3	12	-21	47	-36	60
$2i$	1	$-3+2i$	$8-6i$	$-9+16i$	$15-18i$	$30i$	0
$-2i$	1	-3	8	-9	15	0	
$\sqrt{3}i$	1	$-3+i\sqrt{3}$	$5-3i\sqrt{3}$	$5i\sqrt{3}$	0		
$-\sqrt{3}i$	1	-3	5	0			

Kojim god načinom radili, dobivamo da se početna jednadžba može faktorizirati u obliku

$$(x^2+4)(x^2+3)(x^2-3x+5)=0.$$

Rješavanjem kvadratne jednadžbe $x^2-3x+5=0$ dobivamo preostala dva rješenja $x_5=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{11}}{2}i$ i $x_6=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{11}}{2}i$. Dakle, sva rješenja početne jednadžbe su

$$x_1=2i,\quad x_2=-2i,\quad x_3=\sqrt{3}i,\quad x_4=-\sqrt{3}i,\quad x_5=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{11}}{2}i,\quad x_6=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{11}}{2}i.$$

Zadatak 50.
Riješite jednadžbu $(1+i)x^4-(1-i)x=0$.

Rješenje.
Izlučimo li x, dobivamo

$$\begin{aligned}(1+i)x^4-(1-i)x&=0\\ x\big((1+i)x^3-(1-i)\big)&=0\end{aligned}$$

pa je jedno rješenje $x=0$. Preostala rješenja dobivamo rješavanjem jednadžbe $(1+i)x^3-(1-i)=0$.

$$\begin{aligned}(1+i)x^3-(1-i)&=0\\ (1+i)x^3&=1-i\\ x^3&=\frac{1-i}{1+i}\\ x^3&=\frac{1-i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}\\ x^3&=\frac{(1-i)^2}{2}\\ x^3&=\frac{1}{2}\big(1-2i+i^2\big)\\ x^3&=-i\end{aligned}$$

Kako je $-i=1\cdot\big(\cos\frac{3}{2}\pi+i\sin\frac{3}{2}\pi\big)$, prema Moivreovoj formuli je tada

$$x_k=\sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\frac{3}{2}\pi+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{3}{2}\pi+2k\pi}{3}\right),\quad k=0,1,2.$$

Nakon uvrštavanja pojedinih k-ova dobivamo

$$x_0 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$$
$$x_1 = \cos\frac{7}{6}\pi + i\sin\frac{7}{6}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$
$$x_2 = \cos\frac{11}{6}\pi + i\sin\frac{11}{6}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

Dakle, sva rješenja početne jednadžbe su

$$x_0 = i, \quad x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i, \quad x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i, \quad x_3 = 0.$$

Zadatak 51.
Riješite jednadžbu $x^6 - 16x^4 - 30x^3 - 16x^2 + 1 = 0$.

Rješenje.
Ovdje se radi o simetričnoj jednadžbi parnog stupnja.

$$x^6 + 0\cdot x^5 - 16x^4 - 30x^3 - 16x^2 + 0\cdot x + 1 = 0$$
$$a_6 = a_0 = 1, \quad a_5 = a_1 = 0, \quad a_4 = a_2 = -16$$

Simetričnu jednadžbu stupnja $2k$ rješavamo tako da najprije jednadžbu podijelimo s x^k, a nakon toga uvodimo supstituciju $t = x + \frac{1}{x}$. Pogledajmo na ovom zadatku kako to funkcionira.

$$x^6 - 16x^4 - 30x^3 - 16x^2 + 1 = 0 \Big/ : x^3$$

$$x^3 - 16x - 30 - \frac{16}{x} + \frac{1}{x^3} = 0$$

$$\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) - 16\left(x + \frac{1}{x}\right) - 30 = 0 \tag{9}$$

Sada uvodimo supstituciju $x + \frac{1}{x} = t$. No, moramo još i $x^3 + \frac{1}{x^3}$ izraziti pomoću t.

$$x + \frac{1}{x} = t \Big/^{3}$$

$$x^3 + 3x + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3} = t^3$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = t^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = t^3 - 3t$$

Iz (9) dalje slijedi

$$\left(t^3 - 3t\right) - 16t - 30 = 0$$
$$t^3 - 19t - 30 = 0.$$

Dalje nastavljamo s rješavanjem jednadžbe $t^3 - 19t - 30 = 0$. Kandidati za cjelobrojna rješenja su

$$1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 3,\ -3,\ 5,\ -5,\ 6,\ -6,\ 10,\ -10,\ 15,\ -15,\ 30,\ -30$$

Ako uzmemo $k = -1$, tada je $f(k) = f(-1) = -12$. Za svaki od cjelobrojnih kandidata α ispod njega napišemo broj $\alpha - k$, tj. u našem slučaju $\alpha + 1$ pa dobivamo

$$\begin{array}{rcccccccccccccccc} \alpha: & 1, & -1, & 2, & -2, & 3, & -3, & 5, & -5, & 6, & -6, & 10, & -10, & 15, & -15, & 30, & -30 \\ \alpha+1: & 2, & 0, & 3, & -1, & 4, & -2, & 6, & -4, & 7, & -5, & 11, & -9, & 16, & -14, & 31, & -29 \end{array}$$

Sada pogledamo s kojima od brojeva $\alpha + 1$ broj $f(-1) = -12$ nije djeljiv. Ti brojevi su dolje označeni crvenom bojom.

$$\begin{array}{rcccccccccccccccc} \alpha: & 1, & -1, & 2, & -2, & 3, & -3, & 5, & -5, & 6, & -6, & 10, & -10, & 15, & -15, & 30, & -30 \\ \alpha+1: & 2, & \color{red}{0,} & 3, & -1, & 4, & -2, & 6, & -4, & \color{red}{7,} & \color{red}{-5,} & \color{red}{11,} & \color{red}{-9,} & \color{red}{16,} & \color{red}{-14,} & \color{red}{31,} & \color{red}{-29} \end{array}$$

Za svaki od crvenih brojeva $\alpha + 1$, eliminiramo njegov pripadni broj α. Eliminirani brojevi α su dolje označeni plavom bojom.

$$\begin{array}{rcccccccccccccccc} \alpha: & 1, & \color{blue}{-1,} & 2, & -2, & 3, & -3, & 5, & -5, & \color{blue}{6,} & \color{blue}{-6,} & \color{blue}{10,} & \color{blue}{-10,} & \color{blue}{15,} & \color{blue}{-15,} & \color{blue}{30,} & \color{blue}{-30} \\ \alpha+1: & 2, & \color{red}{0,} & 3, & -1, & 4, & -2, & 6, & -4, & \color{red}{7,} & \color{red}{-5,} & \color{red}{11,} & \color{red}{-9,} & \color{red}{16,} & \color{red}{-14,} & \color{red}{31,} & \color{red}{-29} \end{array}$$

Nakon ovog koraka nam preostanu sljedeći kandidati za cjelobrojna rješenja:

$$1,\ 2,\ -2,\ 3,\ -3,\ 5,\ -5.$$

Hornerovim algoritmom dobivamo da je $t_1 = -2$ jedno rješenje jednadžbe $t^3 - 19t - 30 = 0$.

	1	0	−19	−30
−2	1	−2	−15	0

Stoga se jednadžba $t^3 - 19t - 30 = 0$ može faktorizirati u obliku

$$(t+2)(t^2 - 2t - 15) = 0.$$

Rješavanjem kvadratne jednadžbe $t^2 - 2t - 15 = 0$ dobivamo preostala dva rješenja $t_2 = -3$ i $t_3 = 5$. Sada se za svaki od dobivenih t-ova vraćamo na uvedenu supstituciju $x + \frac{1}{x} = t$.

$$x + \frac{1}{x} = t_1$$

$$x + \frac{1}{x} = -2 \Big/ \cdot x$$

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{2}$$

$$x_1 = -1, \quad x_2 = -1$$

$$x + \frac{1}{x} = t_2$$

$$x + \frac{1}{x} = -3 \Big/ \cdot x$$

$$x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$x_{3,4} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-4}}{2}$$

$$x_3 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}, \quad x_4 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$$

$$x + \frac{1}{x} = t_3$$

$$x + \frac{1}{x} = 5 \Big/ \cdot x$$

$$x^2 - 5x + 1 = 0$$

$$x_{5,6} = \frac{5 \pm \sqrt{25-4}}{2}$$

$$x_5 = \frac{5+\sqrt{21}}{2}, \quad x_6 = \frac{5-\sqrt{21}}{2}$$

Dakle, sva rješenja početne jednadžbe su

$$x_1 = -1, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}, \quad x_4 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}, \quad x_5 = \frac{5+\sqrt{21}}{2}, \quad x_6 = \frac{5-\sqrt{21}}{2}.$$

Zadatak 52.
Riješite jednadžbu $2x^5 + 5x^4 - 13x^3 - 13x^2 + 5x + 2 = 0$.

Rješenje.
Ovo je simetrična jednadžba neparnog stupnja jer je

$$a_5 = a_0 = 2, \quad a_4 = a_1 = 5, \quad a_3 = a_2 = -13.$$

Svaka simetrična jednadžba neparnog stupnja uvijek ima jedno rješenje $x_1 = -1$. Hornerovim algoritmom dobivamo

	2	5	−13	−13	5	2
−1	2	3	−16	3	2	0

pa se početna jednadžba može faktorizirati u obliku

$$(x+1)\left(2x^4 + 3x^3 - 16x^2 + 3x + 2\right) = 0.$$

Dalje treba riješiti simetričnu jednadžbu parnog stupnja $2x^4 + 3x^3 - 16x^2 + 3x + 2 = 0$.

$$2x^4 + 3x^3 - 16x^2 + 3x + 2 = 0 \Big/ : x^2$$

$$2x^2 + 3x - 16 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} = 0$$

$$2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 16 = 0$$

$$x + \frac{1}{x} = t \Big/^2$$

$$x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = t^2$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$$

$$2\big(t^2 - 2\big) + 3t - 16 = 0$$

$$2t^2 + 3t - 20 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 160}}{4}$$

$$t_1 = \frac{5}{2}, \quad t_2 = -4$$

Sada se za svaki od dobivenih t-ova vraćamo na uvedenu supstituciju $x + \frac{1}{x} = t$.

$$x + \frac{1}{x} = t_1$$

$$x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \Big/ \cdot 2x$$

$$2x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$x_{2,3} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4}$$

$$x_2 = 2, \quad x_3 = \frac{1}{2}$$

$$x + \frac{1}{x} = t_2$$

$$x + \frac{1}{x} = -4 \Big/ \cdot x$$

$$x^2 + 4x + 1 = 0$$

$$x_{4,5} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4}}{2}$$

$$x_4 = -2 + \sqrt{3}, \quad x_5 = -2 - \sqrt{3}$$

Dakle, sva rješenja početne jednadžbe su

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = \frac{1}{2}, \quad x_4 = -2 + \sqrt{3}, \quad x_5 = -2 - \sqrt{3}.$$

Cardanova formula. Cardanovu formulu koristimo kod rješavanja normirane algebarske jednadžbe trećeg stupnja u kojoj nema kvadratnog člana, tj. kod jednadžbe oblika $x^3 + px + q = 0$. Rješenja jednadžbe $x^3 + px + q = 0$ su dana s

$$\begin{aligned} x_1 &= u_1 + v_1 \\ x_2 &= u_1\varepsilon + v_1\varepsilon^2 \\ x_3 &= u_1\varepsilon^2 + v_1\varepsilon \end{aligned}$$

gdje je

$$\varepsilon = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad \varepsilon^2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$u_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}, \quad v_1 = -\frac{p}{3u_1}.$$

Pritom je u_1 jedna od triju vrijednosti trećeg korijena iz kompleksnog broja. Sjetimo se, n-ti korijen iz kompleksnog broja ima točno n vrijednosti u skupu kompleksnih brojeva.

Zadatak 53.
Riješite jednadžbu $4x^3 + 60x + 496 = 0$.

Rješenje.
U zadanoj kubnoj jednadžbi se ne javlja kvadratni član pa nakon što ju normiramo možemo primijeniti Cardanovu formulu.

$$\begin{aligned} 4x^3 + 60x + 496 = 0 &\Big/ : 4 \\ x^3 + 15x + 124 = 0 & \\ p = 15, \quad q = 124 & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_1 &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \\ u_1 &= \sqrt[3]{-\frac{124}{2} + \sqrt{\left(\frac{124}{2}\right)^2 + \left(\frac{15}{3}\right)^3}} \\ u_1 &= \sqrt[3]{1} \end{aligned}$$

Znamo da $\sqrt[3]{1}$ ima točno tri vrijednosti u skupu kompleksnih brojeva, a sigurno je jedna od tih vrijednosti jednaka 1 pa možemo uzeti da je $u_1 = 1$ (jer nama treba jedna, bilo koja, od tih triju vrijednosti) tako da u ovom slučaju ne moramo koristiti Moivreovu formulu za korjenovanje kompleksnih brojeva. Nadalje,

$$v_1 = -\frac{p}{3u_1} = -\frac{15}{3\cdot 1} = -5.$$

Sada, prema spomenutim formulama, možemo pronaći rješenja početne jednadžbe.

$$x_1 = u_1 + v_1 = 1 + (-5) = -4$$

$$x_2 = u_1\varepsilon + v_1\varepsilon^2 = 1\cdot\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + (-5)\cdot\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2 - 3\sqrt{3}\,i$$

$$x_3 = u_1\varepsilon^2 + v_1\varepsilon = 1\cdot\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + (-5)\cdot\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2 + 3\sqrt{3}\,i$$

Rješenje x_3 zapravo nismo morali računati po formuli jer kako imamo jednadžbu s realnim koeficijentima, tada znamo da se kompleksna rješenja pojavljuju u konjugiranim parovima pa smo na temelju izračunatog x_2 mogli zaključiti da je $x_3 = \bar{x}_2$.

Zadatak 54.
Riješite jednadžbu $x^3 - 2x - 2 = 0$.

Rješenje.
Kako se radi o normiranoj jednadžbi trećeg stupnja u kojoj se ne javlja kvadratni član, možemo odmah primijeniti Cardanovu formulu. U ovom slučaju je $p = -2$ i $q = -2$ pa dobivamo

$$u_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

$$u_1 = \sqrt[3]{-\frac{-2}{2} + \sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2 + \left(\frac{-2}{3}\right)^3}}$$

$$u_1 = \sqrt[3]{1 + \sqrt{\frac{19}{27}}}$$

Znamo da $\sqrt[3]{1+\sqrt{\frac{19}{27}}}$ ima točno tri vrijednosti u skupu kompleksnih brojeva, a kako se pod trećim korijenom nalazi zapravo realni broj sigurno je jedna od tih vrijednosti realna i upravo jednaka broju koji piše, tj. treći korijen iz $1+\sqrt{\frac{19}{27}}$ jednak je $\sqrt[3]{1+\sqrt{\frac{19}{27}}}$ (mogli bismo taj treći korijen izračunati pomoću kalkulatora na određeni broj decimala, ali to ovdje nećemo raditi). Preostale dvije vrijednosti trećeg korijena iz $1+\sqrt{\frac{19}{27}}$ su kompleksne i njih bismo mogli pronaći pomoću Moivreove formule za korjenovanje kompleksnih brojeva. Međutim, nama je za u_1 dovoljna jedna od te tri vrijednosti, a najlakše nam je da uzmemo spomenutu realnu vrijednost. Nadalje,

$$v_1 = -\frac{p}{3u_1} = \frac{2}{3\sqrt[3]{1+\sqrt{\frac{19}{27}}}}$$

pa su rješenja zadane jednadžbe

$$
\begin{aligned}
x_1 &= u_1 + v_1 \\
x_1 &= \sqrt[3]{1+\sqrt{\frac{19}{27}}} + \frac{2}{3\sqrt[3]{1+\sqrt{\frac{19}{27}}}} \\
x_2 &= u_1\varepsilon + v_1\varepsilon^2 \\
x_2 &= \sqrt[3]{1+\sqrt{\frac{19}{27}}}\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + \frac{2}{3\sqrt[3]{1+\sqrt{\frac{19}{27}}}}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\
x_2 &= \left[-\frac{1}{2}\sqrt[3]{1+\sqrt{\frac{19}{27}}} - \frac{1}{3\sqrt[3]{1+\sqrt{\frac{19}{27}}}}\right] + \frac{\sqrt{3}}{2}\left[\frac{2}{3\sqrt[3]{1+\sqrt{\frac{19}{27}}}} - \sqrt[3]{1+\sqrt{\frac{19}{27}}}\right] i \\
x_3 &= u_1\varepsilon^2 + v_1\varepsilon \\
x_3 &= \sqrt[3]{1+\sqrt{\frac{19}{27}}}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + \frac{2}{3\sqrt[3]{1+\sqrt{\frac{19}{27}}}}\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\
x_3 &= \left[-\frac{1}{2}\sqrt[3]{1+\sqrt{\frac{19}{27}}} - \frac{1}{3\sqrt[3]{1+\sqrt{\frac{19}{27}}}}\right] - \frac{\sqrt{3}}{2}\left[\frac{2}{3\sqrt[3]{1+\sqrt{\frac{19}{27}}}} - \sqrt[3]{1+\sqrt{\frac{19}{27}}}\right] i
\end{aligned}
$$

Rješenje x_3 opet nismo morali računati po formuli jer kako imamo jednadžbu s realnim koeficijentima, tada znamo da se kompleksna rješenja pojavljuju u konjugiranim parovima pa smo na temelju izračunatog x_2 mogli zaključiti da je $x_3 = \bar{x}_2$. Numerički, ta rješenja iznose

$$
\begin{aligned}
x_1 &\approx 1.76929 \\
x_2 &\approx -0.884646 + 0.589743i \\
x_3 &\approx -0.884646 - 0.589743i.
\end{aligned}
$$

Ukoliko se u kubnoj jednadžbi javlja kvadratni član, tada najprije moramo pomoću pogodne supstitucije eliminirati taj kvadratni član da bismo mogli primijeniti Cardanovu formulu. Preciznije, ukoliko imamo normiranu kubnu jednadžbu $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, tada kvadratni član eliminiramo pomoću supstitucije $x = y - \frac{a}{3}$.

Zadatak 55.
Riješite jednadžbu $x^3 - 3x^2 + 3 = 0$.

Rješenje.
Kako se u kubnoj jednadžbi javlja kvadratni član, tada najprije moramo eliminirati taj član da bismo mogli primijeniti Cardanovu formulu.

$$x^3 - 3x^2 + 3 = 0$$
$$x = y - \frac{a}{3}, \quad x = y - \frac{-3}{3}$$
$$x = y + 1$$
$$(y+1)^3 - 3(y+1)^2 + 3 = 0$$
$$y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - 3y^2 - 6y - 3 + 3 = 0$$
$$y^3 - 3y + 1 = 0$$

Dobili smo kubnu jednadžbu $y^3 - 3y + 1 = 0$ u kojoj se ne javlja kvadratni član pa nju možemo riješiti pomoću Cardanove formule.

$$y^3 - 3y + 1 = 0$$
$$p = -3, \ q = 1$$
$$u_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$
$$u_1 = \sqrt[3]{-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - 1}}$$
$$u_1 = \sqrt[3]{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

Sada treba pronaći jednu vrijednost trećeg korijena iz kompleksnog broja $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. U prethodna dva zadatka je to bilo lagano jer smo zapravo tražili treći korijen iz realnog broja pa nam je bilo najlakše da uzmemo realnu vrijednost, umjesto da tražimo kompleksne vrijednosti pomoću Moivreove formule. U ovom slučaju imamo "pravi" kompleksni broj pa ćemo morati koristiti Moivreovu formulu za korjenovanje kompleksnih brojeva da bismo našli jednu vrijednost trećeg korijena iz kompleksnog broja z. U tu svrhu moramo kompleksni broj z pretvoriti u trigonometrijski oblik.

$$r = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3} \Rightarrow \varphi = \operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) + \pi \Rightarrow \varphi = \frac{2}{3}\pi$$

Prema Moivreovoj formuli za korjenovanje je

$$\left(\sqrt[3]{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i}\right)_k = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\frac{2}{3}\pi + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{2}{3}\pi + 2k\pi}{3}\right), \quad k = 0, 1, 2.$$

Za u_1 ćemo uzeti vrijednost trećeg korijena koju dobijemo za $k = 0$ (mogli smo uzeti i $k = 1$ ili $k = 2$) pa slijedi da je

$$u_1 = \cos\frac{2}{9}\pi + i\sin\frac{2}{9}\pi.$$

Nadalje, zbog $v_1 = -\frac{p}{3u_1}$ dobivamo

$$v_1 = \frac{3}{3\left(\cos\frac{2}{9}\pi + i\sin\frac{2}{9}\pi\right)} = \frac{1}{\cos\frac{2}{9}\pi + i\sin\frac{2}{9}\pi} = \frac{1}{\cos\frac{2}{9}\pi + i\sin\frac{2}{9}\pi} \cdot \frac{\cos\frac{2}{9}\pi - i\sin\frac{2}{9}\pi}{\cos\frac{2}{9}\pi - i\sin\frac{2}{9}\pi} =$$

$$= \frac{\cos\frac{2}{9}\pi - i\sin\frac{2}{9}\pi}{\cos^2\frac{2}{9}\pi - i^2\sin^2\frac{2}{9}\pi} = \frac{\cos\frac{2}{9}\pi - i\sin\frac{2}{9}\pi}{\cos^2\frac{2}{9}\pi + \sin^2\frac{2}{9}\pi} = \frac{\cos\frac{2}{9}\pi - i\sin\frac{2}{9}\pi}{1}$$

pa je

$$v_1 = \cos\frac{2}{9}\pi - i\sin\frac{2}{9}\pi.$$

Stoga su rješenja jednadžbe $y^3 - 3y + 1 = 0$ prema Cardanovoj formuli dana s

$$y_1 = u_1 + v_1$$

$$y_1 = \left(\cos\frac{2}{9}\pi + i\sin\frac{2}{9}\pi\right) + \left(\cos\frac{2}{9}\pi - i\sin\frac{2}{9}\pi\right)$$

$$y_1 = 2\cos\frac{2}{9}\pi$$

$$y_2 = u_1\varepsilon + v_1\varepsilon^2$$

$$y_2 = \left(\cos\frac{2}{9}\pi + i\sin\frac{2}{9}\pi\right)\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + \left(\cos\frac{2}{9}\pi - i\sin\frac{2}{9}\pi\right)\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$y_2 = -\cos\frac{2}{9}\pi + \sqrt{3}\sin\frac{2}{9}\pi$$

$$y_3 = u_1\varepsilon^2 + v_1\varepsilon$$

$$y_3 = \left(\cos\frac{2}{9}\pi + i\sin\frac{2}{9}\pi\right)\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + \left(\cos\frac{2}{9}\pi - i\sin\frac{2}{9}\pi\right)\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$y_3 = -\cos\frac{2}{9}\pi - \sqrt{3}\sin\frac{2}{9}\pi$$

Rješenja početne jednadžbe $x^3 - 3x^2 + 3 = 0$ dobivamo preko uvedene supstitucije $x = y + 1$ pa je

$$x_1 = y_1 + 1$$

$$x_1 = 1 + 2\cos\frac{2}{9}\pi$$

$$x_2 = y_2 + 1$$

$$x_2 = 1 - \cos\frac{2}{9}\pi + \sqrt{3}\sin\frac{2}{9}\pi$$

$$x_3 = y_3 + 1$$

$$x_3 = 1 - \cos\frac{2}{9}\pi - \sqrt{3}\sin\frac{2}{9}\pi$$

Teorem. *Neka je* $\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$ *diskriminanta jednadžbe* $x^3+px+q=0$ *s realnim koeficijentima. Tada vrijedi*

(1) Ako je $\Delta > 0$*, onda* $x^3+px+q=0$ *ima jedan realni i dva konjugirano kompleksna korijena.*

(2) Ako je $\Delta = 0$*, onda su svi korijeni od* $x^3+px+q=0$ *realni i barem jedan od njih je višestruki.*

(3) Ako je $\Delta < 0$*, onda su svi korijeni od* $x^3+px+q=0$ *realni i različiti.*

Zadatak 56.
Zadana je jednadžba $z^3 - 12z - 8 = 0$.

(a) Bez direktnog rješavanja jednadžbe odredite koliko ima realnih, a koliko kompleksnih korijena.

(b) Pomoću Cardanove formule riješite zadanu jednadžbu.

Rješenje.

(a) Broj realnih i kompleksnih rješenja bez direktnog rješavanja jednadžbe možemo odrediti pomoću njezine diskriminante. Kako je $p = -12$ i $q = -8$, dobivamo

$$\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left(\frac{-8}{2}\right)^2 + \left(\frac{-12}{3}\right)^3 = -48$$

pa prema prethodnom teoremu zbog $\Delta < 0$ slijedi da zadana jednadžba ima tri različita realna rješenja.

(b) Kako se u zadanoj kubnoj jednadžbi ne javlja kvadratni član, možemo odmah primijeniti Cardanovu formulu.

$$z^3 - 12z - 8 = 0$$

$$p = -12, \ q = -8$$

$$u_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

$$u_1 = \sqrt[3]{4 + \sqrt{16 - 64}}$$

$$u_1 = \sqrt[3]{4 + 4\sqrt{3}\, i}$$

Sada trebamo pronaći jednu vrijednost trećeg korijena iz kompleksnog broja $4 + 4\sqrt{3}\, i$ pomoću Moivreove formule za korjenovanje kompleksnih brojeva. Stoga moramo pretvoriti broj $4 + 4\sqrt{3}\, i$ u trigonometrijski oblik.

$$r = \sqrt{4^2 + \left(4\sqrt{3}\right)^2} = 8$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x} = \frac{4\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3} \Rightarrow \varphi = \operatorname{arctg}\sqrt{3} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}$$

Prema Moivreovoj formuli za korjenovanje je

$$\left(\sqrt[3]{4+4\sqrt{3}\,i}\right)_k = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{3}\right), \quad k = 0,1,2.$$

Za u_1 ćemo uzeti vrijednost trećeg korijena koju dobijemo za $k = 0$ (mogli smo uzeti i $k = 1$ ili $k = 2$) pa slijedi da je

$$u_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}\right).$$

Nadalje, zbog $v_1 = -\frac{p}{3u_1}$ dobivamo

$$v_1 = \frac{12}{3\cdot 2\left(\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}\right)} = \frac{2}{\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}} = \frac{2}{\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}}\cdot\frac{\cos\frac{\pi}{9} - i\sin\frac{\pi}{9}}{\cos\frac{\pi}{9} - i\sin\frac{\pi}{9}} =$$

$$= \frac{2\left(\cos\frac{\pi}{9} - i\sin\frac{\pi}{9}\right)}{\cos^2\frac{\pi}{9} - i^2\sin^2\frac{\pi}{9}} = \frac{2\left(\cos\frac{\pi}{9} - i\sin\frac{\pi}{9}\right)}{\cos^2\frac{\pi}{9} + \sin^2\frac{\pi}{9}} = \frac{2\left(\cos\frac{\pi}{9} - i\sin\frac{\pi}{9}\right)}{1}$$

pa je

$$v_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{9} - i\sin\frac{\pi}{9}\right).$$

Stoga su rješenja zadane jednadžbe prema Cardanovoj formuli dana s

$$z_1 = u_1 + v_1$$

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}\right) + 2\left(\cos\frac{\pi}{9} - i\sin\frac{\pi}{9}\right)$$

$$z_1 = 4\cos\frac{\pi}{9}$$

$$z_2 = u_1\varepsilon + v_1\varepsilon^2$$

$$z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}\right)\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + 2\left(\cos\frac{\pi}{9} - i\sin\frac{\pi}{9}\right)\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$z_2 = -2\cos\frac{\pi}{9} + 2\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{9}$$

$$z_3 = u_1\varepsilon^2 + v_1\varepsilon$$

$$z_3 = 2\left(\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}\right)\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + 2\left(\cos\frac{\pi}{9} - i\sin\frac{\pi}{9}\right)\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$z_3 = -2\cos\frac{\pi}{9} - 2\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{9}$$

Zadatak 57.
Ferrarijevom metodom riješite jednadžbu $x^4 + 2x^3 + x^2 - 1 = 0$.

Rješenje.
Krećemo od izraza

$$\left(x^2 + \frac{\text{BROJ UZ } x^3}{2}\cdot x + \text{NOVA VARIJABLA}\right)^2.$$

Ukoliko novu varijablu označimo s y dobivamo

$$\left(x^2 + \frac{2}{2}x + y\right)^2 = \big(x^2 + x + y\big)^2.$$

Očito je da izraz

$$\big(x^2 + x + y\big)^2 = x^4 + x^2 + y^2 + 2x^3 + 2yx^2 + 2yx$$

nije jednak $x^4 + 2x^3 + x^2 - 1$ pa nam je cilj da to popravimo. Koeficijenti uz x^4 i x^3 su u redu, jedino treba popraviti koeficijente uz x^2, x i slobodni član. Dobivamo

$$\big(x^2 + x + y\big)^2 - \big[(1 + 2y - 1)x^2 + (2y)x + y^2 + 1\big] = 0$$
$$\big(x^2 + x + y\big)^2 - \big[(2y)x^2 + (2y)x + y^2 + 1\big] = 0$$

Tražimo onaj $y \in \mathbb{R}$ za koji će izraz u uglatoj zagradi biti potpuni kvadrat. Kako je izraz u uglatoj zagradi polinom drugog stupnja u varijabli x, on će biti potpuni kvadrat jedino ako je njegova diskriminanta $D = b^2 - 4ac$ jednaka nula.

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &= 0 \\ (2y)^2 - 4 \cdot 2y \cdot (y^2 + 1) &= 0 \\ -8y^3 + 4y^2 - 8y &= 0 \Big/ : (-4) \\ 2y^3 - y^2 + 2y &= 0 \end{aligned}$$

Nama treba samo jedno realno rješenje dobivene kubne jednadžbe $2y^3 - y^2 + 2y = 0$. Očito je $y = 0$ jedno realno rješenje. Uvrstimo $y = 0$ u

$$\big(x^2 + x + y\big)^2 - \big[(2y)x^2 + (2y)x + y^2 + 1\big] = 0$$

pa dobivamo da zadanu jednadžbu možemo napisati u obliku

$$\big(x^2 + x\big)^2 - 1 = 0.$$

Formula za razliku kvadrata $m^2 - n^2 = (m - n)(m + n)$ dalje daje

$$\big(x^2 + x - 1\big)\big(x^2 + x + 1\big) = 0.$$

Rješavanjem kvadratnih jednadžbi $x^2 + x - 1 = 0$ i $x^2 + x + 1 = 0$ dobivamo sva rješenja zadane jednadžbe.

$$\begin{aligned} x^2 + x - 1 &= 0 \\ x_{1,2} &= \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} \\ x_1 &= \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \\ x_2 &= \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 + x + 1 &= 0 \\ x_{3,4} &= \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} \\ x_3 &= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i \\ x_4 &= -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i \end{aligned}$$

Zadatak 58.
Ferrarijevom metodom riješite jednadžbu $x^4 + 8x^3 + 15x^2 - 4x - 2 = 0$.

Rješenje.
Krećemo od izraza
$$\left(x^2 + \frac{\text{BROJ UZ } x^3}{2} \cdot x + \text{NOVA VARIJABLA}\right)^2.$$
Ukoliko novu varijablu označimo s y dobivamo
$$\left(x^2 + \frac{8}{2}x + y\right)^2 = \left(x^2 + 4x + y\right)^2.$$
Očito je da izraz
$$\left(x^2 + 4x + y\right)^2 = x^4 + 16x^2 + y^2 + 8x^3 + 2yx^2 + 8yx$$
nije jednak $x^4 + 8x^3 + 15x^2 - 4x - 2$ pa nam je cilj da to popravimo. Koeficijenti uz x^4 i x^3 su u redu, jedino treba popraviti koeficijente uz x^2, x i slobodni član. Dobivamo
$$\left(x^2 + 4x + y\right)^2 - \left[(16 + 2y - 15)x^2 + (8y + 4)x + y^2 + 2\right] = 0$$
$$\left(x^2 + 4x + y\right)^2 - \left[(2y + 1)x^2 + (8y + 4)x + y^2 + 2\right] = 0$$
Tražimo onaj $y \in \mathbb{R}$ za koji će izraz u uglatoj zagradi biti potpuni kvadrat. Kako je izraz u uglatoj zagradi polinom drugog stupnja u varijabli x, on će biti potpuni kvadrat jedino ako je njegova diskriminanta $D = b^2 - 4ac$ jednaka nula.
$$b^2 - 4ac = 0$$
$$(8y + 4)^2 - 4(2y + 1)(y^2 + 2) = 0$$
Dobivenu kubnu jednadžbu $(8y + 4)^2 - 4(2y + 1)(y^2 + 2) = 0$ nećemo dalje sređivati jer nam treba samo jedno njezino realno rješenje, a iz ovog oblika se lagano vidi da je to $y = -\frac{1}{2}$. Uvrstimo $y = -\frac{1}{2}$ u
$$\left(x^2 + 4x + y\right)^2 - \left[(2y + 1)x^2 + (8y + 4)x + y^2 + 2\right] = 0$$
pa dobivamo da zadanu jednadžbu možemo napisati u obliku
$$\left(x^2 + 4x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 0.$$
Formula za razliku kvadrata $m^2 - n^2 = (m - n)(m + n)$ dalje daje
$$\left(x^2 + 4x - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right)\left(x^2 + 4x - \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right) = 0,$$
odnosno
$$\left(x^2 + 4x - 2\right)\left(x^2 + 4x + 1\right) = 0.$$
Rješavanjem kvadratnih jednadžbi $x^2 + 4x - 2 = 0$ i $x^2 + 4x + 1 = 0$ dobivamo sva rješenja zadane jednadžbe.

$$x^2 + 4x - 2 = 0 \qquad\qquad x^2 + 4x + 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+8}}{2} \qquad\qquad x_{3,4} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-4}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{6}}{2} \qquad\qquad x_{3,4} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{3}}{2}$$

$$x_1 = -2 + \sqrt{6} \qquad\qquad x_3 = -2 + \sqrt{3}$$

$$x_2 = -2 - \sqrt{6} \qquad\qquad x_4 = -2 - \sqrt{3}$$

Zadatak 59.
Ferrarijevom metodom riješite jednadžbu $x^4 + 3x^2 + 2x + 3 = 0$.

Rješenje.
Krećemo od izraza

$$\left(x^2 + \frac{\text{BROJ UZ } x^3}{2} \cdot x + \text{NOVA VARIJABLA}\right)^2.$$

Ukoliko novu varijablu označimo s y dobivamo

$$\left(x^2 + \frac{0}{2}x + y\right)^2 = \left(x^2 + y\right)^2.$$

Očito je da izraz

$$\left(x^2 + y\right)^2 = x^4 + y^2 + 2yx^2$$

nije jednak $x^4 + 3x^2 + 2x + 3$ pa nam je cilj da to popravimo. Koeficijenti uz x^4 i x^3 su u redu, jedino treba popraviti koeficijente uz x^2, x i slobodni član. Dobivamo

$$\left(x^2 + y\right)^2 - \left[(2y-3)x^2 - 2x + y^2 - 3\right] = 0.$$

Tražimo onaj $y \in \mathbb{R}$ za koji će izraz u uglatoj zagradi biti potpuni kvadrat. Kako je izraz u uglatoj zagradi polinom drugog stupnja u varijabli x, on će biti potpuni kvadrat jedino ako je njegova diskriminanta $D = b^2 - 4ac$ jednaka nula.

$$b^2 - 4ac = 0$$
$$4 - 4(2y-3)(y^2-3) = 0$$

Dobivenu kubnu jednadžbu $4 - 4(2y-3)(y^2-3) = 0$ nećemo dalje sređivati jer nam treba samo jedno njezino realno rješenje, a iz ovog oblika se lagano vidi da je to $y = 2$. Uvrstimo $y = 2$ u

$$\left(x^2 + y\right)^2 - \left[(2y-3)x^2 - 2x + y^2 - 3\right] = 0$$

pa dobivamo

$$\left(x^2 + 2\right)^2 - \left[x^2 - 2x + 1\right] = 0$$
$$\left(x^2 + 2\right)^2 - (x-1)^2 = 0$$
$$\left[(x^2+2) + (x-1)\right] \cdot \left[(x^2+2) - (x-1)\right] = 0$$
$$\left(x^2 + x + 1\right)\left(x^2 - x + 3\right) = 0$$

Rješavanjem kvadratnih jednadžbi $x^2 + x + 1 = 0$ i $x^2 - x + 3 = 0$ dobivamo sva rješenja zadane jednadžbe.

$$\begin{aligned} x^2 + x + 1 &= 0 \\ x_{1,2} &= \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} \\ x_1 &= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i \\ x_2 &= -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} x^2 - x + 3 &= 0 \\ x_{3,4} &= \frac{1 \pm \sqrt{1-12}}{2} \\ x_3 &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{11}}{2}\,i \\ x_4 &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{11}}{2}\,i \end{aligned}$$

Zadatak 60.
Ferrarijevom metodom riješite jednadžbu $x^4 + 2x^3 + x^2 + 4x - 2 = 0$.

Rješenje.
Krećemo od izraza

$$\left(x^2 + \frac{\text{BROJ UZ } x^3}{2} \cdot x + \text{NOVA VARIJABLA}\right)^2.$$

Ukoliko novu varijablu označimo s y dobivamo

$$\left(x^2 + \frac{2}{2}\,x + y\right)^2 = \left(x^2 + x + y\right)^2.$$

Očito je da izraz

$$\left(x^2 + x + y\right)^2 = x^4 + x^2 + y^2 + 2x^3 + 2yx^2 + 2yx$$

nije jednak $x^4 + 2x^3 + x^2 + 4x - 2$ pa nam je cilj da to popravimo. Koeficijenti uz x^4 i x^3 su u redu, jedino treba popraviti koeficijente uz x^2, x i slobodni član. Dobivamo

$$\begin{aligned} \left(x^2 + x + y\right)^2 - \left[(1 + 2y - 1)x^2 + (2y - 4)x + y^2 + 2\right] &= 0 \\ \left(x^2 + x + y\right)^2 - \left[(2y)x^2 + (2y - 4)x + y^2 + 2\right] &= 0 \end{aligned}$$

Tražimo onaj $y \in \mathbb{R}$ za koji će izraz u uglatoj zagradi biti potpuni kvadrat. Kako je izraz u uglatoj zagradi polinom drugog stupnja u varijabli x, on će biti potpuni kvadrat jedino ako je njegova diskriminanta $D = b^2 - 4ac$ jednaka nula.

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &= 0 \\ (2y - 4)^2 - 4 \cdot 2y \cdot (y^2 + 2) &= 0 \\ -8y^3 + 4y^2 - 32y + 16 &= 0 \Big/ : 4 \\ -2y^3 + y^2 - 8y + 4 &= 0 \end{aligned}$$

Nama treba samo jedno realno rješenje dobivene kubne jednadžbe $-2y^3 + y^2 - 8y + 4 = 0$. U ovom slučaju nam nije lako brzo pogoditi jedno rješenje te jednadžbe kao što je to bilo u prethodnim zadacima. Stoga tražimo kandidate za cjelobrojna i racionalna rješenja. Naravno, moguće je da ta kubna jednadžba nema racionalnih rješenja pa bismo onda morali koristiti Cardanovu formulu kako bismo došli do jednog njezinog realnog rješenja. Međutim, kod zadavanja zadataka koji eksplicitno zahtijevaju korištenje Ferrarijeve metode, se pazi da pripadna kubna jednadžba, tj. **rezolventa**, ima uvijek barem jedno racionalno rješenje jer bi u protivnom rješavanje zadatka bilo prekomplicirano za ručno računanje. Stoga kod traženja jednog realnog rješenja pripadne rezolvente nemojte koristiti Cardanovu formulu jer je zadatak uvijek zadan tako da rezolventa ima barem jedno racionalno rješenje. Kandidati za racionalna rješenja od $-2y^3 + y^2 - 8y + 4 = 0$ su

$$\frac{p}{q} : \frac{1}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{-2}{1}, \frac{4}{1}, \frac{-4}{1}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}$$

Ako uzmemo $k = 1$, tada je $f(k) = f(1) = -5$. Za svaki od racionalnih kandidata $\frac{p}{q}$ ispod njega napišemo broj $p - kq$, tj. u našem slučaju $p - q$ pa dobivamo

$$\begin{array}{rcccccccc} \frac{p}{q}: & \frac{1}{1}, & \frac{-1}{1}, & \frac{2}{1}, & \frac{-2}{1}, & \frac{4}{1}, & \frac{-4}{1}, & \frac{1}{2}, & \frac{-1}{2} \\ p-q: & 0, & -2, & 1, & -3, & 3, & -5, & -1, & -3 \end{array}$$

Sada pogledamo s kojima od brojeva $p - q$ broj $f(1) = -5$ nije djeljiv. Ti brojevi su dolje označeni crvenom bojom.

$$\begin{array}{rcccccccc} \frac{p}{q}: & \frac{1}{1}, & \frac{-1}{1}, & \frac{2}{1}, & \frac{-2}{1}, & \frac{4}{1}, & \frac{-4}{1}, & \frac{1}{2}, & \frac{-1}{2} \\ p-q: & 0, & -2, & 1, & -3, & 3, & -5, & -1, & -3 \end{array}$$

Za svaki od crvenih brojeva $p - q$, eliminiramo njegov pripadni broj $\frac{p}{q}$. Eliminirani brojevi $\frac{p}{q}$ su dolje označeni plavom bojom.

$$\begin{array}{rcccccccc} \frac{p}{q}: & \frac{1}{1}, & \frac{-1}{1}, & \frac{2}{1}, & \frac{-2}{1}, & \frac{4}{1}, & \frac{-4}{1}, & \frac{1}{2}, & \frac{-1}{2} \\ p-q: & 0, & -2, & 1, & -3, & 3, & -5, & -1, & -3 \end{array}$$

Nakon ovog koraka nam preostanu sljedeći kandidati za racionalna rješenja:

$$2, \ -4, \ \frac{1}{2}.$$

Hornerovim algoritmom dobivamo da je $y = \frac{1}{2}$ jedno rješenje jednadžbe $-2y^3 + y^2 - 8y + 4 = 0$. Uvrstimo $y = \frac{1}{2}$ u

$$\left(x^2 + x + y\right)^2 - \left[(2y)x^2 + (2y - 4)x + y^2 + 2\right] = 0$$

pa dobivamo da početnu jednadžbu možemo napisati u obliku

$$\left(x^2 + x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left[x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right] = 0$$

$$\left(x^2 + x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = 0$$

$$\left[\left(x^2 + x + \frac{1}{2}\right) - \left(x - \frac{3}{2}\right)\right] \cdot \left[\left(x^2 + x + \frac{1}{2}\right) + \left(x - \frac{3}{2}\right)\right] = 0$$

$$\left(x^2 + 2\right)\left(x^2 + 2x - 1\right) = 0$$

Rješavanjem kvadratnih jednadžbi $x^2 + 2 = 0$ i $x^2 + 2x - 1 = 0$ dobivamo sva rješenja zadane jednadžbe.

$$
\begin{aligned}
x^2 + 2 &= 0 & \qquad x^2 + 2x - 1 &= 0 \\
x^2 &= -2 & x_{3,4} &= \frac{-2 \pm \sqrt{4+4}}{2} \\
x_1 &= \sqrt{2}\, i & x_3 &= -1 + \sqrt{2} \\
x_2 &= -\sqrt{2}\, i & x_4 &= -1 - \sqrt{2}
\end{aligned}
$$

Zadatak 61.
Riješite jednadžbu $x^6 + 5x^3 - 6 = 0$.

Rješenje.
Uvodimo supstituciju $x^3 = t$ pa dobivamo kvadratnu jednadžbu $t^2 + 5t - 6 = 0$. Rješenja dobivene kvadratne jednadžbe su $t_1 = 1$ i $t_2 = -6$.

$$
\begin{aligned}
x^3 &= t_1 \\
x^3 &= 1 \\
x &= \sqrt[3]{1}
\end{aligned}
$$

Sada trebamo izračunati treći korijen iz 1 koji ima tri vrijednosti u skupu kompleksnih brojeva. Kako je

$$1 = 1 \cdot \big(\cos 0 + i \sin 0\big),$$

prema Moivreovoj formuli je tada

$$\big(\sqrt[3]{1}\,\big)_k = \sqrt[3]{1} \left(\cos \frac{0 + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{0 + 2k\pi}{3}\right), \quad k = 0, 1, 2.$$

Uvrštavanjem pojedinih k-ova slijedi

$$
\begin{aligned}
\big(\sqrt[3]{1}\,\big)_0 &= \sqrt[3]{1}\,(\cos 0 + i \sin 0) = 1 \\
\big(\sqrt[3]{1}\,\big)_1 &= \sqrt[3]{1} \left(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\, i \\
\big(\sqrt[3]{1}\,\big)_2 &= \sqrt[3]{1} \left(\cos \frac{4}{3}\pi + i \sin \frac{4}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\, i
\end{aligned}
$$

pa na taj način dobijemo prva tri rješenja početne jednadžbe

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\, i, \quad x_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\, i.$$

Preostala tri rješenja dobijemo iz $t_2 = -6$ i supstitucije $x^3 = t$.

$$
\begin{aligned}
x^3 &= t_2 \\
x^3 &= -6 \\
x &= \sqrt[3]{-6}
\end{aligned}
$$

Sada trebamo izračunati treći korijen iz -6 koji ima tri vrijednosti u skupu kompleksnih brojeva. Kako je

$$-6 = 6 \cdot \big(\cos\pi + i\sin\pi\big),$$

prema Moivreovoj formuli je tada

$$\left(\sqrt[3]{-6}\,\right)_k = \sqrt[3]{6}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{3}\right), \quad k = 0,1,2.$$

Uvrštavanjem pojedinih k-ova slijedi

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt[3]{-6}\,\right)_0 &= \sqrt[3]{6}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt[3]{6}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right)\\
\left(\sqrt[3]{-6}\,\right)_1 &= \sqrt[3]{6}\left(\cos\pi + i\sin\pi\right) = -\sqrt[3]{6}\\
\left(\sqrt[3]{-6}\,\right)_2 &= \sqrt[3]{6}\left(\cos\frac{5}{3}\pi + i\sin\frac{5}{3}\pi\right) = \sqrt[3]{6}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right)
\end{aligned}$$

pa dobivamo preostala tri rješenja početne jednadžbe

$$x_4 = \sqrt[3]{6}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right), \quad x_5 = -\sqrt[3]{6}, \quad x_6 = \sqrt[3]{6}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right).$$

Zadatak 62.
Odredite sve $a, b \in \mathbb{R}$ za koje je $x = -2$ dvostruka nultočka polinoma

$$f(x) = x^4 + 2x^3 + ax^2 + (a+b)x + 2.$$

Rješenje.
Ako je $x = -2$ dvostruka nultočka polinoma $f(x)$, tada mora biti

$$f(-2) = 0, \quad f'(-2) = 0, \quad f''(-2) \neq 0. \tag{10}$$

Kako je

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 4x^3 + 6x^2 + 2ax + a + b\\
f''(x) &= 12x^2 + 12x + 2a
\end{aligned}$$

slijedi da je

$$\begin{aligned}
f(-2) &= 2a - 2b + 2\\
f'(-2) &= -3a + b - 8\\
f''(-2) &= 2a + 24
\end{aligned}$$

Zbog (10) mora biti

$$\begin{aligned}
2a - 2b + 2 &= 0\\
-3a + b - 8 &= 0\\
2a + 24 &\neq 0
\end{aligned}$$

Iz treće relacije dobivamo da mora biti $a \neq -12$, a rješavanjem sustava

$$2a - 2b + 2 = 0$$
$$-3a + b - 8 = 0$$

se dobiva $a = -\frac{7}{2}$ i $b = -\frac{5}{2}$. Iz svega konačno slijedi da je $x = -2$ dvostruka nultočka polinoma $f(x)$ jedino u slučaju $a = -\frac{7}{2}$, $b = -\frac{5}{2}$.

Zadatak 63.
Riješite jednadžbu $x^8 + 3x^4 + 2x^2 + 3 = 0$.

Rješenje.
Uvodimo supstituciju $x^2 = t$ pa dobivamo jednadžbu

$$t^4 + 3t^2 + 2t + 3 = 0. \tag{11}$$

Jednadžbu (11) rješavamo Ferrarijevom metodom. Krećemo od izraza

$$\left(t^2 + \frac{\text{BROJ UZ } t^3}{2} \cdot t + \text{NOVA VARIJABLA}\right)^2.$$

Ukoliko novu varijablu označimo s y dobivamo

$$\left(t^2 + \frac{0}{2}\,t + y\right)^2 = \left(t^2 + y\right)^2.$$

Očito je da izraz

$$\left(t^2 + y\right)^2 = t^4 + y^2 + 2yt^2$$

nije jednak $t^4 + 3t^2 + 2t + 3$ pa nam je cilj da to popravimo. Koeficijenti uz t^4 i t^3 su u redu, jedino treba popraviti koeficijente uz t^2, t i slobodni član. Dobivamo

$$\left(t^2 + y\right)^2 - \left[(2y-3)t^2 - 2t + y^2 - 3\right] = 0.$$

Tražimo onaj $y \in \mathbb{R}$ za koji će izraz u uglatoj zagradi biti potpuni kvadrat. Kako je izraz u uglatoj zagradi polinom drugog stupnja u varijabli t, on će biti potpuni kvadrat jedino ako je njegova diskriminanta $D = b^2 - 4ac$ jednaka nula.

$$b^2 - 4ac = 0$$
$$4 - 4(2y-3)(y^2-3) = 0$$

Dobivenu kubnu jednadžbu $4 - 4(2y-3)(y^2-3) = 0$ nećemo dalje sređivati jer nam treba samo jedno njezino realno rješenje, a iz ovog oblika se lagano vidi da je to $y = 2$. Uvrstimo $y = 2$ u

$$\left(t^2 + y\right)^2 - \left[(2y-3)t^2 - 2t + y^2 - 3\right] = 0$$

pa dobivamo

$$\left(t^2 + 2\right)^2 - \left[t^2 - 2t + 1\right] = 0$$
$$\left(t^2 + 2\right)^2 - (t-1)^2 = 0$$
$$\left[(t^2+2) + (t-1)\right] \cdot \left[(t^2+2) - (t-1)\right] = 0$$
$$\left(t^2 + t + 1\right)\left(t^2 - t + 3\right) = 0$$

Rješavanjem kvadratnih jednadžbi $t^2+t+1=0$ i $t^2-t+3=0$ dobivamo sva rješenja jednadžbe (11).

$$t^2+t+1=0 \qquad t^2-t+3=0$$

$$t_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2} \qquad t_{3,4}=\frac{1\pm\sqrt{1-12}}{2}$$

$$t_1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \qquad t_3=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{11}}{2}i$$

$$t_2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \qquad t_4=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{11}}{2}i$$

Sva rješenja početne jednadžbe dobit ćemo tako da svaki od dobivenih t-ova uvrstimo u uvedenu supstituciju $x^2=t$.

$$x^2=t_1$$

$$x^2=-\tfrac{1}{2}+\tfrac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$x=\sqrt{-\tfrac{1}{2}+\tfrac{\sqrt{3}}{2}i}$$

$$r=\sqrt{\left(-\tfrac{1}{2}\right)^2+\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$$

$$\operatorname{tg}\varphi=\tfrac{y}{x}=-\sqrt{3},\quad \varphi=\tfrac{2}{3}\pi$$

$$x=\cos\frac{\frac{2}{3}\pi+2k\pi}{2}+i\sin\frac{\frac{2}{3}\pi+2k\pi}{2},\ k=0,1$$

$$x_1=\cos\tfrac{\pi}{3}+i\sin\tfrac{\pi}{3}$$

$$\boxed{x_1=\tfrac{1}{2}+\tfrac{\sqrt{3}}{2}i}$$

$$x_2=\cos\tfrac{4}{3}\pi+i\sin\tfrac{4}{3}\pi$$

$$\boxed{x_2=-\tfrac{1}{2}-\tfrac{\sqrt{3}}{2}i}$$

$$x^2=t_2$$

$$x^2=-\tfrac{1}{2}-\tfrac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$x=\sqrt{-\tfrac{1}{2}-\tfrac{\sqrt{3}}{2}i}$$

$$r=\sqrt{\left(-\tfrac{1}{2}\right)^2+\left(-\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$$

$$\operatorname{tg}\varphi=\tfrac{y}{x}=\sqrt{3},\quad \varphi=\tfrac{4}{3}\pi$$

$$x=\cos\frac{\frac{4}{3}\pi+2k\pi}{2}+i\sin\frac{\frac{4}{3}\pi+2k\pi}{2},\ k=0,1$$

$$x_3=\cos\tfrac{2}{3}\pi+i\sin\tfrac{2}{3}\pi$$

$$\boxed{x_3=-\tfrac{1}{2}+\tfrac{\sqrt{3}}{2}i}$$

$$x_4=\cos\tfrac{5}{3}\pi+i\sin\tfrac{5}{3}\pi$$

$$\boxed{x_4=\tfrac{1}{2}-\tfrac{\sqrt{3}}{2}i}$$

$$x^2=t_3$$

$$x^2=\tfrac{1}{2}+\tfrac{\sqrt{11}}{2}i$$

$$x=\sqrt{\tfrac{1}{2}+\tfrac{\sqrt{11}}{2}i}$$

$$r=\sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\right)^2+\left(\tfrac{\sqrt{11}}{2}\right)^2}=\sqrt{3}$$

$$\operatorname{tg}\varphi=\tfrac{y}{x}=\sqrt{11},\quad \varphi=\operatorname{arctg}\sqrt{11}$$

$$x=\sqrt[4]{3}\left(\cos\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{11}+2k\pi}{2}+i\sin\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{11}+2k\pi}{2}\right),\ k=0,1$$

$$\boxed{x_5=\sqrt[4]{3}\left(\cos\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{11}}{2}+i\sin\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{11}}{2}\right)}$$

$$\boxed{x_6=\sqrt[4]{3}\left(\cos\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{11}+2\pi}{2}+i\sin\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{11}+2\pi}{2}\right)}$$

$$x^2 = t_4$$

$$x^2 = \tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{11}}{2}\, i$$

$$x = \sqrt{\tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{11}}{2}\, i}$$

$$r = \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(-\tfrac{\sqrt{11}}{2}\right)^2} = \sqrt{3}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \tfrac{y}{x} = -\sqrt{11}, \quad \varphi = \operatorname{arctg}\left(-\sqrt{11}\right)$$

$$x = \sqrt[4]{3}\left(\cos\tfrac{\operatorname{arctg}(-\sqrt{11})+2k\pi}{2} + i\sin\tfrac{\operatorname{arctg}(-\sqrt{11})+2k\pi}{2}\right),\ k = 0, 1$$

$$\boxed{x_7 = \sqrt[4]{3}\left(\cos\tfrac{\operatorname{arctg}\sqrt{11}}{2} - i\sin\tfrac{\operatorname{arctg}\sqrt{11}}{2}\right)}$$

$$\boxed{x_8 = \sqrt[4]{3}\left(\cos\tfrac{-\operatorname{arctg}\sqrt{11}+2\pi}{2} + i\sin\tfrac{-\operatorname{arctg}\sqrt{11}+2\pi}{2}\right)}$$